Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Cuaderno de ejercicios resueltos
Cinemática y Dinámica

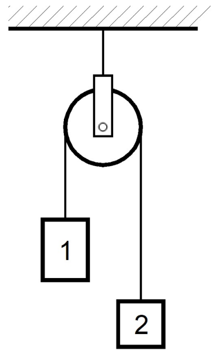
Autor: Yukihiro Minami Koyama

Cinética de partículas conectadas

Academia de Dinámica
División de Ciencias Básicas

Ejercicio 31

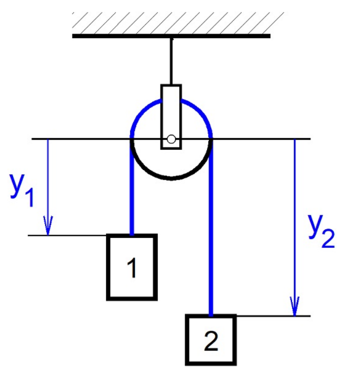
Determine la aceleración de cada uno de los bloques así como la tensión en la cuerda del sistema de polea y bloques que se muestra en la figura.



Las masas de los bloques son $m_1 = 25$ kg y $m_2 = 15$ kg, considere que la poleastiene masa y fricción despreciables y la cuerda es flexible, inextensible y también de masa despreciable.

Para la resolución de problemas relacionados con cuerpos conectados, es necesario establecer la relación cinemática del movimiento de ambos cuerpos, en los que se relacionen las velocidades, por un lado, y las aceleraciones, por otro.
Cuando el problema implica poleas y cuerdas, una manera relativamente sencilla de obtener la mencionada relación cinemática es con la obtención de la longitud de la cuerda, o cuerdas, a partir de la posición de los cuerpos, con respecto al centro de una polea fija.

Para el caso de este problema, se establece la posición de cada uno de los bloques, y_1 e y_2, con respecto al centro de la única polea que se tiene:



La longitud de la cuerda, L, que es constante, es igual a la suma de y_1, más la longitud de la semicircunferecia, C_1, de la parte superior de la polea fija y que también es constante, más y_2:

$$L = y_1 + C_1 + y_2$$

Se deriva la expresión anterior con respecto al tiempo:

$$0 = v_1 + 0 + v_2$$

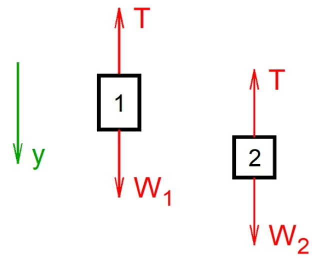
De donde:

$$v_2 = -v_1$$

Se deriva la expresión anterior con respecto al tiempo para obtener la relación cinemática de aceleraciones:

$a_2 = -a_1$

Posteriormente, se trazan los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los bloques:



Para los problemas de cuerpos conectados que implican cuerdas y poleas, el sentido de los ejes de referencia debe ser siempre del centro de la polea fija, que sirve como referencia, a cada uno de los cuerpos; en este caso coincide que los ejes son verticales, de arriba hacia abajo.

Con base en la segunda ley de Newton, se establecen las ecuaciones de movimiento de cada uno de los cuerpos:

$W_1 - T = m_1\, a_1$

$W_2 - T = m_2\, a_2$

Luego de sustituir los valores de peso de los bloques, se obtiene:

$25\ (9.81) - \mathrm{T} = 25\, a_1$

$245.3 - \mathrm{T} = 25\, a_1$ (1)

$15\ (9.81) - \mathrm{T} = 15\ a_2$

$147.2 - \mathrm{T} = 15\, a_2$ (2)

Dada la relación cinemática:

$a_2 = -a_1$

La expresión 2 queda:

$147.2 - \mathrm{T} = 15\ (-a_1)$

$147.2 - \mathrm{T} = -15\, a_1$ (3)

Se suma 1 con 2 multiplicado por (-1):

$245.3 - \mathrm{T} = 25\, a_1$

$-147.2 + \mathrm{T} = 15\, a_1 \quad +$

____

$98.1 = 40\, a_1$

De donde:

$40\, a_1 = 98.1$

$a_1 = \frac{98.1}{40}$

$a_1 = 2.453\ \frac{m}{s^2}$ (hacia abajo, por ser positivo)

Por tanto:

$a_2 = -a_1$

$a_2 = -2.453\ \frac{m}{s^2}$ (hacia arriba, por ser negativo)

Finalmente, se sustituye el valor de la aceleración a_1 en la ecuación 1:

$245.3 - T = 25\, a_1$

$T - 245.3 = -25\, (2.453)$

$T = -61.31 + 245.3$

$T = 183.9$ N

Las aceleraciones de cada uno de los bloques son:

$a_1 = 2.453\, \frac{m}{s^2}$ (hacia abajo)

$a_2 = -2.453\, \frac{m}{s^2}$ (hacia arriba)

y la tensión en la cuerda es:

$T = 183.9$ N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m1 = 25;
m2 = 15;
g = 9.81;
```

Relación cinemática:

```
L == y1 + C1 + y2
ec1 = 0 == v1 + v2
ec2 = 0 == a1 + a2
```

Ecuaciones de movimiento:

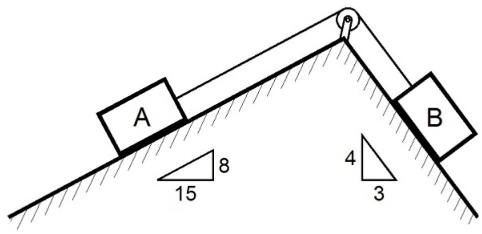
```
ec3 = m1 g - T == m1 a1
ec4 = m2 g - T == m2 a2
```

Obtención solución ecuaciones de movimiento

```
resp4 = Solve[{ec2, ec3, ec4}]
a1sol = a1 /. resp4[[1]]
a2sol = a2 /. resp4[[1]]
Tsol = T /. resp4[[1]]
```

Ejercicio 32

Dos bloques, A y B, de 22.1 y 20 kg de masa respectivamente, están unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, a través de una polea con fricción despreciable, y se les coloca sobre dos rampas tal como se muestra en la figura.



Si parten del reposo, el plano inclinado de la izquierda es liso y el coeficiente de fricción entre el bloque B y el plano de la derecha es $\mu_k = 0.1$, determine:

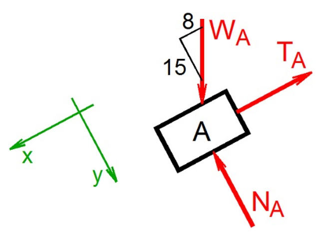
a) hacia dónde se mueve el bloque A;

b) la magnitud de la tensión en el cable; y

c) la rapidez de B cuando se haya movido 1.2 m.

a) Hacia dónde se mueve el bloque A

Para determinar hacia dónde sse mueve el bloque A, se calcula la magnitud de la tensión del cable en uno de los bloques, suponiendo que no existe fricción y que está en reposo, y verificar qué sucedería si se aplica dicha fuerza de tensión al otro bloque.
Por ejemplo, se puede analizar, bajo las consideraciones indicadas, al bloque A.
Su diagrama de cuerpo libre se muestra a continuación:



La hipotenusa del triángulo rectángulo relacionado con la inclinación del peso con respecto a los ejes de referencia es:

$$\text{hip}_A = \sqrt{\Delta x_A^2 + \Delta y_A^2}$$

$$\text{hip}_A = \sqrt{8^2 + 15^2}$$

$$\text{hip}_A = \sqrt{64 + 225}$$

$$\text{hip}_A = \sqrt{289}$$

$$\text{hip}_A = 17$$

La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque es:

$$\overline{T_A} = \{-T_A, 0\}$$

$$\overline{N_A} = \{0, -N_A\}$$

$$\overline{W_A} = m_A\, g \left\{\frac{\Delta x_A}{\text{hip}_A}, \frac{\Delta y_A}{\text{hip}_A}\right\}$$

$$\overline{W_A} = 22.1\,(9.81) \left\{\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right\}$$

$$\overline{W_A} = \{102.0, 191.3\}\ \text{N}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, considerando que la aceleración es nula, la expresión queda:

$\overline{T_A} + \overline{N_A} + \overline{W_A} = \overline{0}$

$\{102.0 - T_A, 191.3 - N_A\} = \{0, 0\}$

Luego de resolver la componente en x de la ecuación anterior:

$102.0 - T_A = 0$

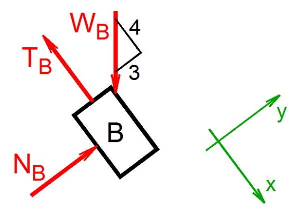
$T_A = 102.0$ N

Ahora, se verifica qué le sucede al bloque B si la magnitud de la tensión en el cable es el obtenido, es decir:

$T_B = T_A$

$T_B = 102.0$ N

Para ello, se muestra abajo el diagrama de cuerpo libre de B:



Previo al análisis, se obtiene la hipotenusa del triángulo rectángulo asociado a la pendiente del plano inclinado:

$\text{hip}_B = \sqrt{\Delta x_B^2 + \Delta y_B^2}$

$\text{hip}_B = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$\text{hip}_B = \sqrt{16 + 9}$

$\text{hip}_B = \sqrt{25}$

$\text{hip}_B = 5$

Representación vectorial de las fuerzas involucradas:

$\overline{T_B} = \{-T_B, 0\}$

$\overline{T_B} = \{-102.0, 0\}$

$\overline{N_B} = \{0, N_B\}$

$\overline{W_B} = m_B\, g \left\{\frac{\Delta x_B}{\text{hip}_B}, -\frac{\Delta y_B}{\text{hip}_B}\right\}$

$\overline{W_B} = 20\,(9.81) \left\{\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$

$\overline{W_B} = \{157.0, -117.7\}$ N

Con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{T_B} + \overline{N_B} + \overline{W_B} = m_B\, \overline{a_B}$

$\{157.0 - 102.0, \text{magN}_B - 160\} = m_B\, \{a_{B,x}, 0\}$

Al resolver la componente en x de la expresión anterior:

$55.0 = m_B\, a_{B,x}$

Dado que la aceleración $a_{B,x}$ es positiva, con base en el sistema de referencia establecido implica que el bloque B tiende a bajar y, por consiguiente, el bloque A tiende a subir.

El bloque A se mueve hacia arriba a la derecha.

b) La magnitud de la tensión en el cable

Para determinar la magnitud de la tensión en el cable, se pueden plantear las ecuaciones de movimiento de ambos bloques, con base en la segunda ley de Newton.

En el caso del bloque A, las ecuaciones de movimiento son similares a las que se obtuvieron previamente:

$$\overline{T_A} + \overline{N_A} + \overline{W_A} = m_A\,\overline{a_A}$$

Para el cual se desconoce la magnitud de la tensión en la cuerda:

$$\overline{T_A} = \{-T_A, 0\}$$

De donde:

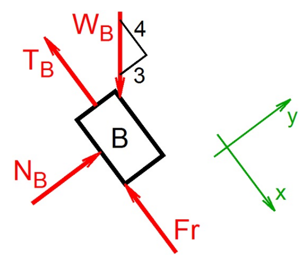
$$\{102.0 - T_A,\ 191.3 - N_A\} = m_A\,\{a_{A,x},\ 0\}$$

La ecuación de movimiento es, entonces:

$$102.0 - T_A = 22.1\,a_{A,x}$$

$$102.0 - T_A = 22.1\,a_{A,x}$$

Luego, se muestra el diagrama de cuerpo libre del bloque B completo. Ya que este bloque tiende a moverse hacia abajo, la fuerza de fricción será hacia arriba:



Conviene recordar que el sentido del eje de referencia principal, x, es del centro de la polea fija hacia los bloques, con objeto de que sean consistentes los signos de la rapidez y la aceleración que se obtienen con base en la relación cinemática que se obtendrá posteriormente.
Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque:

$$\overline{Fr} = \{-Fr, 0\}$$

$$\overline{T_B} = \{-T_B, 0\}$$

$$\overline{N_B} = \{0, N_B\}$$

$$\overline{W_B} = \{157.0, -117.7\}\ \text{N}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton:

$$\overline{Fr} + \overline{T_B} + \overline{N_B} + \overline{W_B} = m_B\,\overline{a_B}$$

$$\{157.0 - Fr - T_B,\ N_B - 117.7\} = 20\,\{a_{B,x},\ 0\}$$

Si se resuelve la componente y de la ecuación anterior:

$$N_B - 117.7 = 0$$

$$N_B = 117.7\ \text{N}$$

Con base en el valor obtenido, se puede calcular la magnitud de la fuerza de fricción cinética:

$$Fr = \mu_k\,N_B$$

Por tanto:

$$Fr = 0.1\,(117.7)$$

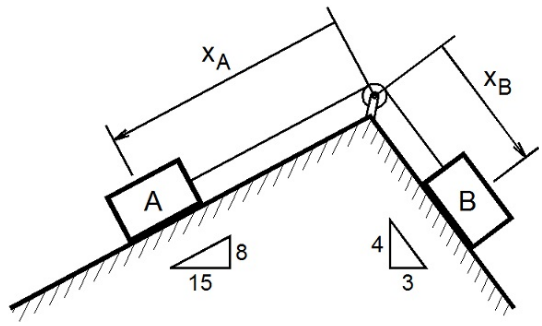
$$Fr = 11.77\ \text{N}$$

Entonces, la ecuación de movimiento de B queda:

$157.0 - 11.77 - T_B = 20\ a_{B,x}$

$145.2 - T_B = 20\ a_{B,x}$

También se requiere establecer la relación cinemática entre los bloques.
En seguida se muestra un diagrama a partir del cual puede calcularse dicha relación:



La longitud constante de la cuerda, L, es:

$L = x_A + C + x_B$

Si se deriva la expresión anterior con respecto al tiempo, se obtiene:

$0 = v_{A,x} + 0 + v_{B,x}$

por consiguiente:

$v_{A,x} = -v_{B,x}$

Si se vuelve a derivar esta última ecuación con respecto al tiempo:

$a_{A.x} = -a_{B,x}$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de movimiento de dichos bloques junto con la relación cinemática:

$102.0 - T_A = 22.1\ a_{A,x}$

$145.2 - T_B = 20\ a_{B,x}$

$a_{A.x} = -a_{B,x}$

$T_A = T_B$

Se sustituye la relación cinemática y T_A en la primera ecuación:

$102.0 - T_B = -22.1\ a_{B,x}$

Se multiplica la ecuación anterior por (-1) se suma con la segunda miembro a miembro:

$-102.0 + T_B = 22.1\ a_{B,x}$

$145.2 - T_B = 20\ a_{B,x}$ +

____

$43.2 = 42.1\ a_{B,x}$

$42.1\ a_{B,x} = 43.2$

$a_{B,x} = \frac{43.2}{42.1}$

$a_{B,x} = 1.026\ \frac{m}{s^2}$

Por consiguiente, sustituyendo la aceleración obtenida en la segunda expresión:

$145.2 - T_B = 20\, a_{B,x}$

$T_B = 145.2 - 20\,(1.026)$

$T_B = 145.2 - 20.52$

$T_B = 124.7$ N

La magnitud de la tensión del cable es:

$T_B = 124.7$ N.

c) La rapidez de B cuando se haya movido 1.2 m

Para la resolución de este inciso, a partir del resultado de la aceleración de B obtenida:

$a_{B,x} = 1.026\, \frac{m}{s^2}$

Con base en la definición de aceleración en función de la rapidez y la posición:

$a_{B,x} = v_{B,x}\, \frac{d\, v_{B,x}}{d\, x_B}$

$v_{B,x}\, \frac{d\, v_{B,x}}{d\, x_B} = 1.026$

Luego de separar variables:

$v_{B,x}\, d\, v_{B,x} = 1.026\, d\, x_B$

Se integran ambos miembros, considerando las condiciones iniciales del enunciado del problema:

$x_{B0} = 0$

$v_{B,x0} = 0$

$\int_0^{v_{B,x}} v_{B,x}\, d\, v_{B,x} = \int_0^{x_B} 1.026\, d\, x_B$

$\frac{1}{2}\, v_{B,x}^2 \Big]_0^{v_{B,x}} = 1.026\, x_B \Big]_0^{x_B}$

$\frac{1}{2}\, v_{B,x}^2 = 1.026\, x_B$

Entonces, para $x_B = 1.2$ m:

$\frac{1}{2}\, v_{B,x}^2 = 1.026\,(1.2)$

$v_{B,x}^2 = 2\,(1.231)$

$v_{B,x} = \sqrt{2.462}$

$v_{B,x} = 1.569\, \frac{m}{s}$

La rapidez del bloque B cuando se haya movido 1.2 m es:

$v_{B,x} = 1.569\, \frac{m}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 22.1;
mB = 20;
g = 9.81;
μk = 0.1;
xBf = 1.2;
ΔxA = 8;
ΔyA = 15;
ΔxB = 4;
ΔyB = -3;
```

a) Hacia dónde se mueve el bloque A

```
hipA = Sqrt[ΔxA^2 + ΔyA^2]
vTA = {-TA, 0}
vNA = {0, -NA}
vWA = mA g {ΔxA/hipA, ΔyA/hipA}
ec1 = vTA + vNA + vWA == {0, 0}
resp1 = Solve[ec1]
TAsolProv = TA /. resp1[[1]]
hipB = Sqrt[ΔxB^2 + ΔyB^2]
vTB = {-TAsolProv, 0}
vNB = {0, NB}
vWB = mB g {ΔxB/hipB, ΔyB/hipB}
ec2 = vTB + vNB + vWB == mB {aBx, 0}
resp2 = Solve[ec2, {aBx, NB}]
aBxSolProv = aBx /. resp2[[1]]
```

b) La magnitud de la tensión en el cable

```
ec3 = vTA + vNA + vWA == mA {aAx, 0}
vFr = {-Fr, 0}
vTB = {-TB, 0}
ec4 = vFr + vTB + vNB + vWB == mB {aBx, 0}
resp4 = Solve[ec4, {aBx, NB}]
NBsol = NB /. resp4[[1]]
FrSol = μk NBsol
```

Relación cinemática:

```
L = xA + xB
ec5 = 0 == vAx + vBx
ec6 = 0 == aAx + aBx
```

Cálculo de la magnitud de la fuerza de tensión en el cable:

```
ec7 = TA == TB
resp7 = Solve[{ec3, (ec4 /. Fr → FrSol), ec6, ec7}]
TBSol = TB /. resp7[[1]]
aBxSol = aBx /. resp7[[1]]
```

c) La rapidez de B cuando se haya movido 1.2 m

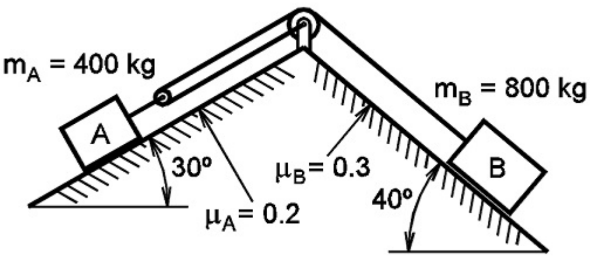
Dado que $a_{B,x}\text{Sol} = v_{B,x}\,\frac{d v_{B,x}}{d x_B}$, $v_{B,x}\, d v_{B,x} = a_{B,x}\,\text{Sol}\, d x_B$, por consiguiente:

$$ec8 = \int_0^{vBx} vBx \, dvBx == \int_0^{xB} aBxSol \, dxB$$

```
resp8 = Solve[ec8, vBx]
vBxSol = vBx /. resp8[[2]]
vBxf = vBxSol /. xB → xBf
```

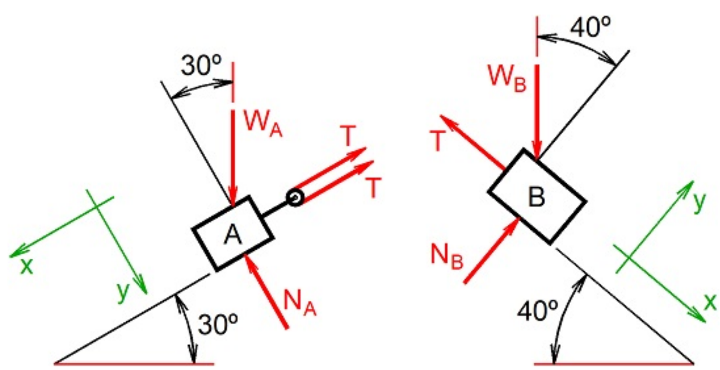
Ejercicio 33

En la figura se muestra un sistema mecánico formado por los bloques A y B de 400 y 800 kg de masa, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una polea fija y una segunda polea conectada con el bloque A, ambas sin fricción y de masa despreciable, que parte del reposo.
Si el coeficiente de fricción entre el bloque A y la superficie izquierda vale 0.2 y el que existe entre el bloque B y la superficie derecha es de 0.3, determine:
a) la aceleración de cada bloque;
b) la tensión en la cuerda.



a) la aceleración de cada bloque

Primero, es necesario establecer hacia dónde se va a mover cada uno de los bloques, para lo cual se requiere analizarlos considerando que está estático alguno de ellos y que no existe fricción entre dichos bloques y las superficies en las que están colocadas. Se obtiene la resultante en el otro bloque, con lo que puede establecerse hacia dónde se va a mover.
Para ello, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de los dos bloques:



En este caso se hace la suposición de que el bloque A no se mueve, se calcula la magnitud de la tensión de la cuerda, T; posteriormente, con el valor anterior se determina la resultante en el bloque B. Si ésta es positiva, indica que este bloque se mueve hacia la derecha-abajo.

Representación vectorial de las fuerzas:

$\overline{T_A}$ = {-T, 0}

$\overline{N_A}$ = {0, $-N_A$}

$\overline{W_A}$ = W_A {Sin [30°], Cos [30°]}

$\overline{W_A}$ = 400 (9.81) {0.5, 0.8660}

$\overline{W_A}$ = 3924 {0.5, 0.8660}

$\overline{W_A}$ = {1962, 3398} N

Se aplica la segunda ley de Newton, considerando que el bloque no se mueve:

$2\,\overline{T_A} + \overline{N_A} + \overline{W_A} = m_A\,\{0,\ 0\}$

$2\,\{-T, 0\} + \{0, -N_A\} + \{1962, 3398\} = \{0, 0\}$

$\{1962 - 2\,T, 3398 - N_A\} = \{0, 0\}$

De donde:

$1962 - 2\,T = 0$

$2\,T = 1962$

$T = \frac{1962}{2}$

$T = 981\ N$

Para el bloque B, la representación vectorial de las fuerzas que actúan en él es:

$\overline{T_B} = \{-T, 0\}$

$\overline{N_B} = \{0, N_B\}$

$\overline{W_B} = W_B\,\{\text{Sin}\,[40°], -\text{Cos}\,[40°]\}$

$\overline{W_B} = 800\,(9.81)\,\{0.6428, -0.7660\}$

$\overline{W_B} = 7848\,\{0.6428, -0.7660\}$

$\overline{W_B} = \{5045, -6012\}\ N$

Se obtiene la resultante, con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{T_B} + \overline{N_B} + \overline{W_B} = m_B\,\{a_B, 0\}$

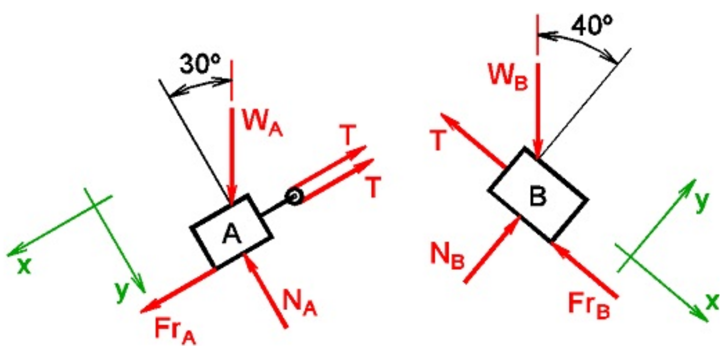
$\{-T, 0\} + \{0, N_B\} + \{5045, -6012\} = \{800\,a_B, 0\}$

$\{5045 - 981, N_B - 6012\} = \{800\,a_B, 0\}$

$\{4064, N_B - 6012\} = \{800\,a_B, 0\}$

Como se puede observar, la componente en x de la resultante es positiva y, por consiguiente,
su aceleración también sería positiva, lo cual indica que el bloque B se mueve hacia la derecha-abajo.

Con base en lo anterior, si B se mueve hacia la derecha-abajo, el bloque A se mueve hacia la derecha-arriba, por lo que el sentido de las fuerzas de fricción, en ambos casos es a la izquierda.
Se dibujan nuevos diagramas de cuerpo libre que incluyan las fuerzas de fricción:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque A es:

$\overline{Fr_A} = \{Fr_A,\ 0\}$

$\overline{T_A} = \{-T, 0\}$

$\overline{N_A} = \{0, -N_A\}$

$\overline{W_A} = m_A\ g\ \{Sin\ [30°], Cos\ [30°]\}$

$\overline{W_A} = 3924\ \{0.5, 0.8660\}$

$\overline{W_A} = \{1962, 3398\}$ N

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{Fr_A} + 2\ \overline{T_A} + \overline{N_A} + \overline{W_A} = m_A\ \{a_A,\ 0\}$

$\{Fr_A,\ 0\} + 2\ \{-T, 0\} + \{0, -N_A\} + \{1962, 3398\} = \{400\ a_A, 0\}$

$\{1962 + Fr_A - 2\ T, 3398 - N_A\} = \{400\ a_A, 0\}$

De la ecuación anterior se establecen las siguientes expresiones escalares:

$1962 + Fr_A - 2\ T = 400\ a_A$

$3398 - N_A = 0$

De la segunda expresión se obtiene:

$N_A = 3398$ N

De donde:

$Fr_A = \mu_A\ N_A$

$Fr_A = 0.2\ (3398)$

$Fr_A = 679.7$ N

Al sustituir el valor obtenido en la primera expresión anterior:

$1962 + 679.7 - 2\ T = 400\ a_A$

$2642 - 2\ T = 400\ a_A$ (1)

La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque B es:

$\overline{Fr_B} = \{-Fr_B,\ 0\}$

$\overline{T_B} = \{-T, 0\}$

$\overline{N_B} = \{0, N_B\}$

$\overline{W_B} = m_B\ g\ \{Sin\ [40°], -Cos\ [40°]\}$

$\overline{W_B} = 7848\ \{0.6428, -0.7660\}$

$\overline{W_B} = \{5045, -6012\}$ N

Con base en la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación vectorial del movimiento del bloque B:

$\overline{Fr_B} + \overline{T_B} + \overline{N_B} + \overline{W_B} = m_B\ \{a_B, 0\}$

$\{-Fr_B,\ 0\} + \{-T, 0\} + \{0, N_B\} + \{5045, -6012\} = \{800\ a_B, 0\}$

$\{5045 - Fr_B - T, N_B - 6012\} = \{800\ a_B, 0\}$

De la ecuación vectorial anterior se establecen las siguientes expresiones escalares:

$5045 - Fr_B - T = 800\ a_B$

$N_B - 6012 = 0$

Por consiguiente:

$N_B = 6012$ N

Del valor obtenido se puede calcular la magnitud de la fuerza de fricción en el bloque B:

$Fr_B = \mu_B N_B$

$Fr_B = 0.3\ (6012)$

$Fr_B = 1804$ N

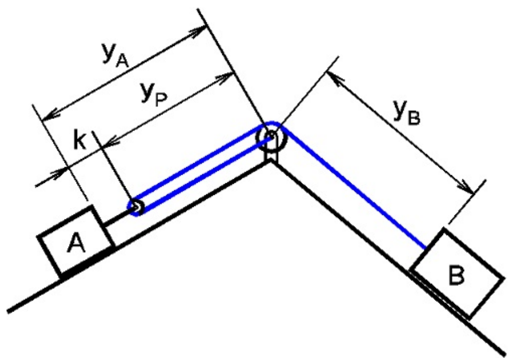
Luego de sustituir el resultado anterior, la ecuación de movimiento queda:

$5045 - 1804 - T = 800\ a_B$

$3241 - T = 800\ a_B$ (2)

Dado que se tienen dos ecuaciones con tres incógnitas, es necesario completar el sistema de ecuaciones con una tercera ecuación, que corresponde a la relación cinemática de las aceleraciones de ambos bloques.

Dicha relación cinemática se puede obtener por medio de la longitud de la cuerda, en función de la posición de los bloques, con base en la figura que se muestra a continuación:



La longitud constante de la cuerda, L, es:

$L = y_P + C_1 + y_P + C_2 + y_B$

De donde al derivar dos veces con respecto al tiempo se obtiene:

$0 = 2\ a_P + a_B$

La longitud constante k entre la polea móvil y el bloque A es:

$k = y_A - y_P$

De forma similar, se deriva dos veces con respecto al tiempo:

$0 = a_A - a_P$

Por tanto:

$a_P = a_A$

Se sustituye este valor en la expresión anterior:

$0 = 2\ a_A + a_B$

Es decir:

$a_B = -2\ a_A$ (3)

Se sutituye 3 en 2:

$3241 - T = 800\ (-2\ a_A)$

$3241 - T = -1600\ a_A$ (4)

Se multiplica la ecuación 4 por (-2) y se suma con la ecuación 1:

$3241 - T = -1600\, a_A \quad x\,(-2)$

$-6482 + 2\,T = 3200\, a_A$

$2642 - 2\,T = 400\, a_A \quad +$

____

$-3840 = 3600\, a_A$

$3600\, a_A = -3840$

$a_A = \frac{-3840}{3600}$

$a_A = -1.067\, \frac{m}{s^2}$

Finalmente, se sustituye este último resultado en la relación cinemática:

$a_B = (-2\,)\,(-1.067)$

$a_B = 2.134\, \frac{m}{s^{\square}}$

La aceleración de cada bloque es:

$a_A = -1.067\, \frac{m}{s^2}$ (hacia arriba/derecha) y $a_B = 2.134\, \frac{m}{s^{\square}}$ (hacia abajo/derecha).

b) la tensión en la cuerda

Para obtenerla, simplemente se sustituye en la ecuación 1 la aceleración del bloque A:

$2642 - 2\,T = 400\, a_A$

$2642 - 2\,T = 400\,(-1.066)$

$2642 - 2\,T = -426.4$

$2\,T = 2642 + 426.4$

$T = \frac{3068}{2}$

$T = 1534\ N$

La tensión en la cuerda es:

$T = 1534\ N.$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 400;
mB = 800;
g = 9.81;
μA = 0.2;
μB = 0.3;
```

Determinación del sentido de movimiento del bloque B:

```
vTA = {-T, 0}
vNA = {0, -NA}
vWA = mA g {Sin[30 °], Cos[30 °]}
ec1 = 2 vTA + vNA + vWA == mA {0, 0}
resp1 = Solve[ec1]
Tsol = T /. resp1⟦1⟧
vTB = {-T, 0}
vNB = {0, NB}
vWB = mB g {Sin[40 °], -Cos[40 °]}
ec2 = vTB + vNB + vWB == mB {aB, 0}
resp2 = Solve[ec2, {aB, NB}]
aBsol = aB /. resp1⟦1⟧
```

Representación vectorial de las fuerzas de fricción que actúan en los bloques:

```
vFrA = {FrA, 0}
vFrB = {-FrB, 0}
```

Ecuación de movimiento del bloque A:

```
ec3 = vFrA + 2 vTA + vNA + vWA == mA {aA, 0}
resp3 = Solve[ec3, {aA, NA}]
NAsol = NA /. resp3⟦1⟧
aAsol = aA /. resp3⟦1⟧
FrA = μA NAsol
ec4 = aA == aAsol
```

Ecuación de movimiento del bloque B:

```
ec5 = vFrB + vTB + vNB + vWB == mB {aB, 0}
resp5 = Solve[ec5, {aB, NB}]
NBsol = NB /. resp5⟦1⟧
aBsol = aB /. resp5⟦1⟧
FrB = μB NBsol
ec6 = aB == aBsol
```

Longitudes de las cuerdas en función de las posiciones de los bloques y de la polea móvil:

```
ec7 = L == yP + C1 + yP + C2 + yB
ec8 = k == yA - yP
```

Obtención de la relación cinemática:

```
ec9 = 0 == 2 aP + aB
ec10 = 0 == aA - aP
resp10 = Solve[{ec9, ec10}, {aB, aP}]
aBsol = aB /. resp10⟦1⟧
```

Cálculo de las aceleraciones de los bloques:

```
resp11 = Solve[{ec4, ec6 /. aB → aBsol}]
aAresp = aA /. resp11⟦1⟧
aBresp = aBsol /. aA → aAresp
```

Cálculo de la tensión en la cuerda:

```
Tsol = T /. resp11⟦1⟧
```

Ejercicio 34

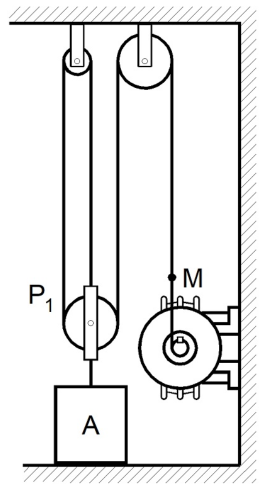
El motor eléctrico enrolla un cable de acero conectado a un sistema de poleas, con una fuerza de tensión constante T = 250 N.

Si el bloque A tiene un peso de 675 N y parte del reposo, determine:

a) la aceleración con el que sube el bloque;

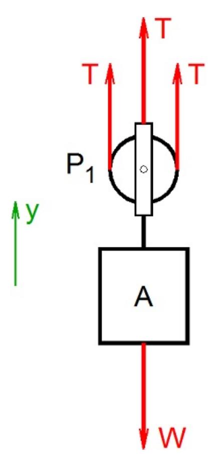
b) la rapidez con la que el motor enrolla el cable, v_{M6}, 6 s después de que inició el movimiento.

Considere que la polea tiene masa y fricción despreciables, y que el cable es flexible, inextensible y también de masa despreciable.



a) la aceleración con el que sube el bloque

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque A, considerando que la polea móvil P_1 es parte del mismo bloque:



Al aplicar la segunda ley de Newton, se obtiene que:

$$3\,T - W_A = m_A\, a_A$$

Luego de sustituir los valores conocidos:

$$3\,(250) - 675 = \frac{675}{9.81}\, a_A$$

Por consiguiente:

$750 - 675 = 68.81\, a_A$

$68.81\, a_A = 75$

$a_A = \frac{75}{68.81}$

$a_A = 1.09\ \frac{m}{s^2}$

La aceleración con el que sube el bloque es:

$a_A = 1.09\ \frac{m}{s^2}$.

b) la rapidez con la que el motor enrolla el cable, v_{M6}, 6 s después de que inició el movimiento

Para obtener la función de la rapidez del bloque respecto del tiempo, se aplica la definición de aceleración como la derivada de dicha rapidez con respecto del tiempo:

$a_A = \frac{d\,v_A}{d\,t}$

$\frac{d\,v_A}{d\,t} = 1.09$

$d\,v_A = 1.09\, d\,t$

Se integran ambos miembros, considerando las condiciones iniciales $v_{A0} = 0$ para t = 0:

$\int_0^{v_A} d\,v_A = \int_0^t 1.09\, d\,t$

$v_A\,]_0^{v_A} = 1.09\, t\,]_0^t$

$v_A - 0 = 1.09\, t - 1.09\,(0)$

$v_A = 1.09\, t$

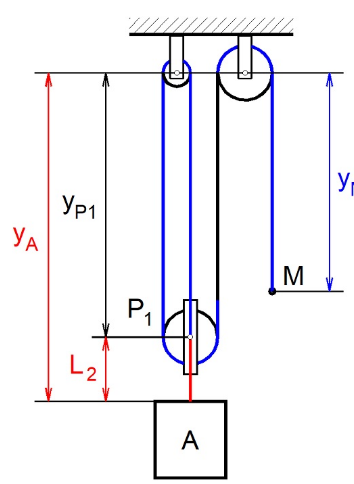
Entonces, para t = 6 s:

$v_{A6} = 1.09\,(6)$

$v_{A6} = 6.54\ \frac{m}{s}$

Ahora, para calcular la rapidez con la que el motor enrolla el cable en ese instante, v_{M6}, se requiere obtener la relación cinemática del sistema de poleas.

Para ello, se determina la longitud de la cuerda en función de la posición de la polea P_1 y del punto M de la cuerda, así como la relación entre el posición del bloque A y la polea P_1, con base en el diagrama mostrado a continuación:



La longitud de la cuerda azul, L_1, es:

$$L_1 = y_{P1} + C_1 + y_{P1} + C_2 + y_{P1} + C_3 + y_M$$

donde C_1, C_2 y C_3 son las semicircunferencias alrededor de cada una de las tres poleas.
Luego de derivar la expresión anterior con respecto del tiempo, se obtiene:

$$0 = 3\, v_{P1} + v_M$$

La longitud de la cuerda roja, L_2, es:

$$L_2 = y_A - y_{P1}$$

Se deriva la expresión anterior con respecto del tiempo:

$$0 = v_A - v_{P1}$$

es decir:

$$v_{P1} = v_A$$

De donde:

$$0 = 3\, v_A + v_M$$

$$v_M = -3\, v_A$$

Por consiguiente, si la rapidez del bloque A, v_{A6}, 6 s después de que inició el movimiento es:

$$v_{A6} = 6.54\ \frac{m}{s}$$

La rapidez con la que el motor enrolla en cable en ese instante es:

$$v_{M6} = -3\ (6.54)$$

$$v_{M6} = -19.62\ \frac{m}{s}$$

El signo menos indica que la rapidez es hacia abajo.

La rapidez con la que el motor enrolla el cable, v_{M6}, 6 s después de que inició el movimiento, es:

$$v_{M6} = -19.62\ \frac{m}{s}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
T = 250;
WA = 675;
g = 9.81;
mA = WA/g
t0 = 0;
vA0 = 0;
tf = 6;
```

a) la aceleración con el que sube el bloque

```
ec1 = 3 T - WA == mA aA
resp1 = Solve[ec1]
aAsol = aA /. resp1[[1]]
```

b) la rapidez con la que el motor enrolla el cable, v_{M6}, 6 s después de que inició el movimiento

$$ec2 = \int_{vA0}^{vA} dvA == \int_{t0}^{t} aAsol\, dt$$

```
resp2 = Solve[ec2, vA]
vAsol = vA /. resp2[[1]]
vA6 = vAsol /. t → tf
```

Obtención de la relación cinemática:

```
ec3 = L1 == yP1 + C1 + yP1 + C2 + yP1 + C3 + yM
ec4 = 0 == 3 vP1 + vM
ec5 = L2 == yA - yP1
ec6 = 0 == vA - vP1
resp6 = Solve[{ec4, ec6}, {vM, vP1}]
vMsol = vM /. resp6[[1]]
```

Cálculo de la rapidez con la que el motor enrolla el cable:

```
vM6 = vMsol /. vA → vA6
```

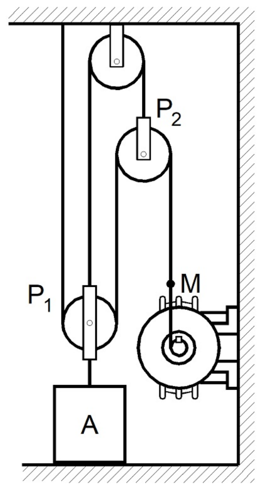
Ejercicio 35

El motor eléctrico enrolla un cable de acero conectado a un sistema de poleas, con una fuerza P = 50 t, donde P está en N y t en s.

Si el bloque A tiene un peso de 720 N, determine:

a) el tiempo en el cual el cuerpo inicia su movimiento;

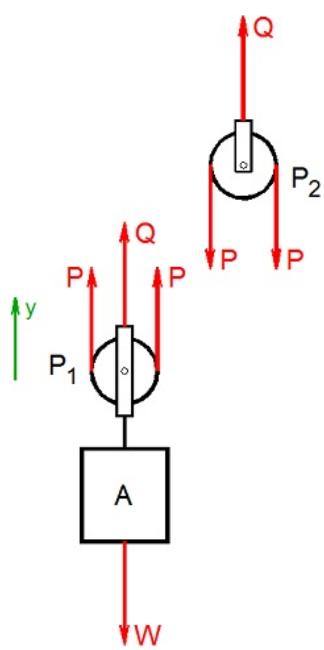
b) la rapidez del cuerpo 5 s después de que se aplicó la fuerza P.



a) el tiempo en el cual el cuerpo inicia su movimiento

Para que el bloque empiece a moverse, la fuerza aplicada por el sistema de poleas debe ser mayor que su peso.

Para determinar cuándo sucede esta situación, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque, considerando que la polea P_1 es parte de él, así como de la polea P_2:



Por tanto, la resultante de las fuerzas aplicadas al bloque es:

R_B = 2P + Q - W

Y para la polea P_2:

R_{P_2} = Q - 2P

Dado que cuando está a punto de moverse, las resultantes deben ser nulas:

0 = Q - 2P

Q = 2P

Se sustituye este resultado en la resultante del bloque igualada a cero:

0 = 2P + 2P - W

Dado que:

P = 50 t

4 (50 t) = 720

200 t = 720

$t = \frac{720}{200}$

t = 3.6 s

El tiempo en el cual el cuerpo inicia su movimiento es:

t = 3.6 s.

b) la rapidez del cuerpo 5 s después de que se aplicó la fuerza P

Para obtener la rapidez del cuerpo en un instante dado, se aplica la segunda ley de Newton:

$R_B = m\, a$

$4P - 720 = \frac{720}{9.81}\, a$

73.39 a = 200 t - 720

$a = \frac{200}{73.39}\, t - \frac{720}{73.39}$

a = 2.725 t - 9.81

Con base en la definición de aceleración:

$a = \frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = 2.725\, t - 9.81$

$dv = (2.725\, t - 9.81)\, dt$

Dado que las condiciones iniciales son, para t = 3.6 $v_0 = 0$:

$\int_0^v dv = \int_{3.6}^t (2.725\, t - 9.81)\, dt$

$v\,\Big]_0^v = \left(\frac{2.725}{2}\, t^2 - 9.81\, t\right)\Big]_{3.6}^t$

$v - 0 = 1.363\, t^2 - 9.81\, t - [1.363\, (3.6)^2 - 9.81\, (3.6)]$

$v = 1.363\, t^2 - 9.81\, t - [1.363\, (12.96) - 35.32]$

$v = 1.363\, t^2 - 9.81\, t - (17.66 - 35.32)$

$v = 1.363\, t^2 - 9.81\, t - (-17.66)$

$v = 1.363\, t^2 - 9.81\, t + 17.66$

Entonces, para $t_f = 5$ s:

$v_f = 1.363\,(5)^2 - 9.81\,(5) + 17.66$

$v_f = 1.363\,(25) - 49.05 + 17.66$

$v_f = 34.06 - 31.39$

$v_f = 2.67\ \frac{m}{s}$

La rapidez del cuerpo 5 s después de que se aplicó la fuerza P es:

$v_f = 2.67\ \frac{m}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
P = 50 t;
W = 720;
g = 9.81;
tf = 5;
```

a) el tiempo en el cual el cuerpo inicia su movimiento

```
RB = 2 P + Q - W
RP2 = Q - 2 P
ec1 = RP2 == 0
resp1 = Solve[ec1, Q]
Qsol = Q /. resp1[[1]]
ec2 = (RB /. Q → Qsol) == 0
resp2 = Solve[ec2]
tSol = t /. resp2[[1]] // N
```

b) la rapidez del cuerpo 5 s después de que se aplicó la fuerza P

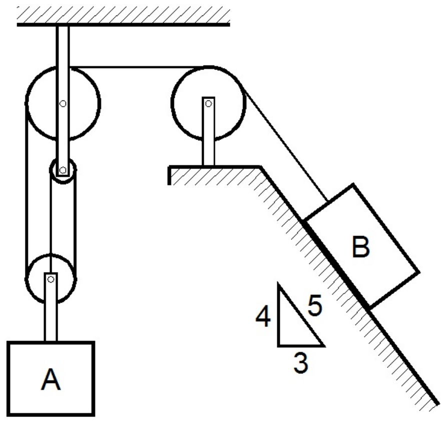
```
ec3 = (RB /. Q → Qsol) == W/g a
resp3 = Solve[ec3, a]
aSol = a /. resp3[[1]]
```

Obtención de la rapidez del cuerpo:

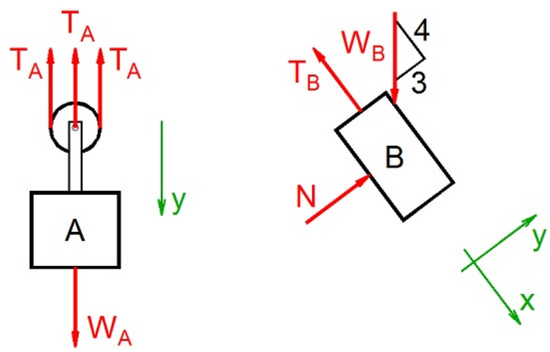
```
ec4 = ∫_0^v ⅆv == ∫_tSol^t aSol ⅆt
resp4 = Solve[ec4, v]
vSol = v /. resp4[[1]]
vf = vSol /. t → tf
```

Ejercicio 36

En la figura se muestra un sistema de cuerpos conectados con poleas y cuerdas ideales, formado por los bloques A y B que tienen masas de 20 y 25 kg, respectivamente.
Determine la rapidez del bloque B en t = 2 s, si se sabe que en t = 0 el bloque A está subiendo con una rapidez de 0.5 $\frac{m}{s}$, considerando que el plano inclinado en contacto con B es liso.



Primero, se dibujan los diagramas de cuerpo libre de los bloques *A* y *B*, el primero incluyendo a la polea móvil, con objeto de facilitar el análisis, dado que la masa de dicha polea es despreciable:



La representación vectorial de las fuerzas mostradas, con base en los ejes de referencia propuestos es la siguiente:

$\overline{W_A} = \{0, m_A\, g\}$

$\overline{W_A} = \{0, 20\ (9.81)\}$

$\overline{W_A} = \{0, 196.2\}$

$\overline{T_A} = \{0, \text{-T}\}$

$\overline{T_B} = \{\text{-T}, 0\}$

$\overline{N} = \{0, \text{N}\}$

$\overline{W_B} = m_B\, g \left\{\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right\}$

$\overline{W_B} = 25\ (9.81) \left\{\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right\}$

$\overline{W_B} = \{196.2, \text{-}147.15\}$

Con base en la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación de movimiento para el bloque A:

$\overline{W_A} + 3\ \overline{T_A} = m_A\ \overline{a_A}$

$196.2 - 3\ \text{T} = 20\ a_A$

La aceleración del bloque A es:

$20\ a_A = 196.2 - 3\ T$

$a_A = \frac{196.2}{20} - \frac{3}{20} T$

$a_A = 9.81 - 0.15\ T$

Y para el bloque B:

$\overline{T_B} + \overline{N} + \overline{W_B} = m_B\ \overline{a_B}$

$\{-T, 0\} + \{0, N\} + \{196.2, -147.15\} = 25 \{a_{x,B},\ 0\}$

$\{196.2 - T, N - 147.15\} = 25 \{a_B,\ 0\}$

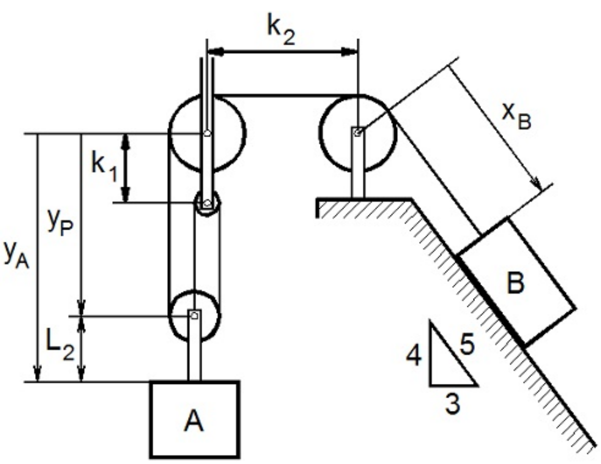
Entonces, la aceleración del bloque B es:

$25\ a_B = 196.2 - T$

$a_B = \frac{196.2}{25} - \frac{1}{25} T$

$a_B = 7.848 - 0.04\ T$

Luego, se determina la relación cinemática entre los bloques, con base en el cálculo de la longitud de la cuerda:



$L_1 = (y_P - k_1) + C_1 + (y_P - k_1) + C_2 + y_P + C_3 + k_2 + C_4 + x_B$

Se deriva la expresión con respecto al tiempo:

$0 = (v_P - 0) + 0 + (v_P - 0) + 0 + v_P + 0 + 0 + 0 + v_B$

$v_B = -3\ v_P$

Por otra parte:

$L_2 = y_A - y_P$

Después de derivar con respecto al tiempo:

$0 = v_A - v_P$

Por consiguiente:

$v_P = v_A$

Finalmente:

$v_B = -3\ v_A$

Asimismo. si se deriva nuevamente esta espresión con respecto al tiempo:

$a_B = -3\ a_A$

Dado que la rapidez inicial del bloque A es:

$v_{A,0} = -0.5 \frac{m}{s}$ (hacia arriba)

el bloque B tendrá una rapidez inicial:

$v_{B,0} = -3\,(-0.5)$

$v_{B,0} = 1.5 \frac{m}{s}$ (hacia abajo a la derecha)

Dado que:

$a_A = 9.81 - 0.15\ T$

$a_B = 7.848 - 0.04\ T$

$a_B = -3\ a_A$

Se sustituye a_B en la segunda expresión y se suma la primera multiplicada por 3:

$-3\ a_A = 7.848 - 0.04\ T$

$3\ a_A = 29.43 - 0.45\ T \quad +$

____

$0 = 37.28 - 0.49\ T$

$0.49\ T = 37.28$

$T = \frac{37.28}{0.49}$

$T = 76.08\ N$

Luego, se sustituye este resultado en la expresión de la aceleración del bloque B:

$a_B = 7.848 - 0.04\,(76.08)$

$a_B = 7.848 - 3.043$

$a_B = 4.805 \frac{m}{s^2}$

Dado que:

$a_B = \frac{d v_B}{d t}$

$\frac{d v_B}{d t} = 4.805$

$d v_B = 4.805\ d t$

Con base en las condiciones iniciales, para t = 0, $v_{B,0} = 1.5$:

$\int_{1.5}^{v_B} d v_B = \int_0^t 4.805\ d t$

$v_B \Big]_{1.5}^{v_B} = 4.805\ t \Big]_0^t$

$v_B - 1.5 = 4.805\ t - 4.805\,(0)$

$v_B = 4.805\ t + 1.5$

Por consiguiente, para t = 2 s:

$v_{B,2} = 4.805\,(2) + 1.5$

$v_{B,2} = 9.61 + 1.5$

$v_{B,2} = 11.11 \frac{m}{s}$

La rapidez del bloque B cuando t = 2 s es:

$v_{B,2} = 11.11 \frac{m}{s}$ (hacia abajo a la derecha).

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 20;
mB = 25;
g = 9.81;
t0 = 0;
t2 = 2;
vA0 = -0.5;
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre los bloques:

```
WA = mA g {0, 1}
TA = {0, -T}
TB = {-T, 0}
vN = {0, N}
WB = mB g {4/5, -3/5}
```

Ecuaciones de movimiento:

```
ec1 = WA + 3 TA == mA {0, aA}
resp1 = Solve[ec1, aA]
aAsol = aA /. resp1[[1]]
ec2 = TB + vN + WB == mB {aB, 0}
resp2 = Solve[ec2, {aB, N}]
aBsol = aB /. resp2[[1]]
```

Relación cinemática:

```
L1 = (yP - k1) + C1 + (yP - k1) + C2 + yP + C3 + k2 + C4 + xB
L2 = yA - yP
```

Se deriva con respecto al tiempo:

```
ec3 = 0 == (vP - 0) + 0 + (vP - 0) + 0 + vP + 0 + 0 + 0 + vB
ec4 = 0 == vA - vP
resp4 = Solve[{ec3, ec4}, {vA, vP}]
vAsol = vA /. resp4[[1]]
ec5 = aA == vAsol /. vB → aB
```

Cálculo de la aceleración del bloque B:

```
ec6 = aAsol == aA
ec7 = aBsol == aB
resp7 = Solve[{ec5, ec6, ec7}]
aBx = aB /. resp7〚1〛
```

Rapidez inicial del bloque B:

```
ec8 = vA0 == vAsol /. vB → vB0
resp8 = Solve[ec8]
vB0sol = vB0 /. resp8〚1〛
```

Dado que $a_B = \frac{dv_B}{dt}$, $dv_B = a_B\, dt$:

$$\text{ec9} = \int_{\text{vB0sol}}^{\text{vB}} dt == \int_0^t \text{aBx}\, dt$$

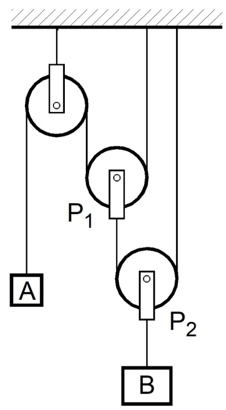
```
resp9 = Solve[ec9, vB]
vBx = vB /. resp9〚1〛
```

Obtención de la rapidez del bloque B para $t_2 = 2$ s:

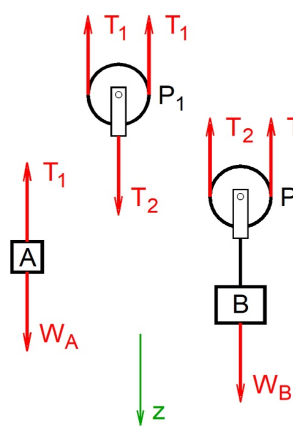
```
vB2 = vBx /. t → 2
```

Ejercicio 37

Para el arreglo de bloques, cuerdas y poleas mostrado en la figura, si se conocen la masa del bloque A, que es de 2 kg y la masa del bloque B que es de 6 kg, obtenga la magnitud de la tensión de la cuerda que está conectada al bloque A.
Asimismo, obtenga la distancia recorrida por B en 2 s partiendo del reposo, especificando si sube o si baja.
Considere que las poleas tienen masa y fricción despreciables, y la cuerda es flexible, inextensible y también de masa despreciable.



Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de los elementos móviles. Debido a que se mueven juntos el bloque B y la polea P_2, se considera que es un solo cuerpo:



Dado que todas las fuerzas tienen la dirección z, se aplica directamente la segunda ley de Newton a cada uno de los tres cuerpos, bloque A:

$$W_A - T_1 = m_A\, a_A$$

$$(2)\,(9.81) - T_1 = 2\, a_A$$

$$19.62 - T_1 = 2\, a_A \tag{1}$$

Polea P_1:

$$T_2 - 2\, T_1 = m_{\text{P1}}\, a_{\text{P1}}$$

$$m_{\text{P1}} = 0$$

$$T_2 - 2\, T_1 = 0 \tag{2}$$

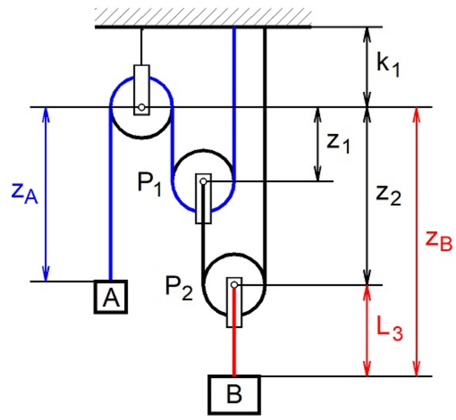
Bloque B, incluyendo la polea P_2, considerando la masa de esta polea despreciable:

W_B - 2 $T_2 = m_B\, a_B$

(6) (9.81) - 2 T_2 = 6 a_B

58.86 - 2 T_2 = 6 a_B (3)

Luego, se establece la relación cinemática de los bloques, con base en la longitud de las cuerdas que en la figura se muestran con color azul, negro y rojo:



$L_1 = z_A + C_1 + z_1 + C_2 + z_1 + k_1$

$L_2 = (z_2 - z_1) + C_3 + z_2 + k_1$

$L_3 = z_B - z_2$

Derivada de la primera expresión con respecto al tiempo:

$0 = v_A + 2\, v_1$

De donde:

$v_A = -2\, v_1$ (4)

Derivada de la segunda expresión con respecto al tiempo:

$0 = v_2 - v_1 + v_2$

Es decir:

$v_1 = 2\, v_2$ (5)

Derivada de la tercera expresión con respecto al tiempo:

$0 = v_B - v_2$

Por consiguiente:

$v_2 = v_B$ (6)

Se sustituye 6 en 5:

$v_1 = 2\, v_B$

Finalmente se sustituye esta última ecuación en 4:

$v_A = -2\,(2\, v_B)$

$v_A = -4\, v_B$ (7)

Para obtener la relación cinemática de aceleraciones, se deriva 7 con respecto al tiempo:

$a_A = -4\, a_B$ (8)

Posteriormente, para obtener la magnitud de la tensión de la cuerda conectada al bloque A, T_1, se resuelve el sistema de ecuaciones conformado por 1, 2, 3 y 8, las cuales se transcriben en seguida:

$$19.62 - T_1 = 2\,a_A \qquad (1)$$
$$T_2 - 2\,T_1 = 0 \qquad (2)$$
$$58.86 - 2\,T_2 = 6\,a_B \qquad (3)$$
$$a_A = -4\,a_B \qquad (8)$$

De la ecuación 1 se despeja T_1:

$$T_1 = 19.62 - 2\,a_A$$

En la expresión obtenida se sustituye 8:

$$T_1 = 19.62 - 2\,(-4\,a_B)$$
$$T_1 = 19.62 + 8\,a_B$$

Se despeja a_B del resultado anterior:

$$8\,a_B = T_1 - 19.62$$
$$a_B = \frac{1}{8}\,T_1 - \frac{19.62}{8}$$
$$a_B = 0.125\,T_1 - 2.453 \qquad (9)$$

De la ecuación 2 se obtiene:

$$T_2 = 2\,T_1$$

Se sustituye T_2 y 9 en la ecuación 3:

$$58.86 - 2\,(2\,T_1) = 6\,(0.125\,T_1 - 2.453)$$
$$58.86 - 4\,T_1 = 0.75\,T_1 - 14.72$$
$$0.75\,T_1 + 4\,T_1 = 58.86 + 14.72$$
$$4.75\,T_1 = 73.58$$
$$T_1 = \frac{73.58}{4.75}$$
$$T_1 = 15.49\text{ N}$$

La magnitud de la tensión de la cuerda conectada al bloque A es:

$T_1 = 15.49$ N.

Ahora, para calcular la distancia recorrida por B en 2 s partiendo del reposo, especificando si sube o si baja, se obtiene la aceleración del bloque B, con la sustitución de T_1 en la ecuación 9:

$$a_B = 0.125\,(15.49) - 2.453$$
$$a_B = -0.5163\,\frac{m}{s^2}$$

Con base en la definición de aceleración:

$$a_B = \frac{d\,v_B}{d\,t}$$
$$\frac{d\,v_B}{d\,t} = -0.5163$$

Se separan variables:

$$d\,v_B = -0.5163\,d\,t$$

Se integran ambos miembros, considerando las condiciones iniciales, para t = 0, $v_{B0} = 0$:

$$\int_0^{v_B} d\,v_B = \int_0^{t} -0.5163\,d\,t$$
$$v_B\,\Big]_0^{v_B} = -0.5163\,t\,\Big]_0^{t}$$
$$v_B - 0 = -0.5163\,t - [(-0.5163)\,(0)]$$
$$v_B = -0.5163\,t$$

Luego, se aplica la definición de rapidez como la derivada de la posición con respecto al tiempo en la expresión anterior:

$$v_B = \frac{d z_B}{d t}$$

$$\frac{d z_B}{d t} = -0.5163\ t$$

Se separan variables y se integran ambos miembros, con condiciones iniciales t = 0, $z_{B0} = 0$:

$$d x_B = -0.5163\ t\ d t$$

$$\int_0^{z_B} d z_B = \int_0^t -0.5163\ t\ d t$$

$$z_B \Big]_0^{z_B} = (-0.5163)\ \frac{1}{2}\ t^2 \Big]_0^t$$

$$z_B - 0 = -0.2582\ t^2 - 0.2582\ (0)^2$$

$$z_B = -0.2582\ t^2$$

Por último, se sustituye t = 2 en la expresión obtenida:

$$z_{B2} = -0.2582\ (2)^2$$

$$z_{B2} = -0.2582\ (4)$$

$$z_{B2} = -1.033\ \text{m}$$

El signo negativo indica que el bloque B se mueve hacia arriba, ya que el eje de referencia considerado es positivo hacia abajo.

La distancia recorrida por el bloque B en 2 s a partir del reposo es:

$$z_{B2} = -1.033\ \text{m}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 2;
mB = 6;
mP1 = 0;
g = 9.81;
```

Ecuaciones de movimiento:

```
ec1 = mA g - T1 == mA aA
ec2 = T2 - 2 T1 == mP1 aP1
ec3 = mB g - 2 T2 == mB aB
```

Cálculo de la longitud de las cuerdas en función de la posición de los bloques y la polea móvil:

```
ec4 = L1 == zA + C1 + z1 + C2 + z1 + k1
ec5 = L2 == z2 - z1 + C3 + z2 + k1
ec6 = L3 == zB - z2
```

Derivadas de las expresiones anteriores con respecto del tiempo:

```
ec7 = 0 == vA + v1 + v1
ec8 = 0 == v2 - v1 + v2
ec9 = 0 == vB - v2
```

Obtención de la relación cinemática:

```
resp9 = Solve[{ec7, ec8, ec9}, {vA, v1, v2}]
vAsol = vA /. resp9[[1]]
```

Relación cinemática de aceleraciones:

```
ec10 = aA == vAsol /. vB → aB
```

Resolución del sistema de ecuaciones ec1, ec2, ec3 y ec10:

```
resp10 = Solve[{ec1, ec2, ec3, ec10}]
T1sol = T1 /. resp10[[1]]
aBsol = aB /. resp10[[1]]
```

Obtención de la rapidez del bloque B:

$$ec11 = aBsol == \frac{d\,vB}{d\,t}$$

$$ec12 = \int_0^t aBsol\,dt == \int_0^{vB} dvB$$

```
resp12 = Solve[ec12, vB]
vBsol = vB /. resp12[[1]]
```

Obtención de la posición del bloque B:

$$ec13 = vBsol == \frac{d\,zB}{d\,t}$$

$$ec14 = \int_0^t vBsol\,dt == \int_0^{zB} dzB$$

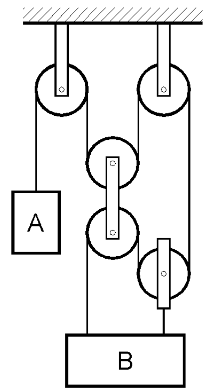
```
resp14 = Solve[ec14, zB]
zBsol = zB /. resp14[[1]]
```

Distancia recorrida por el bloque B en 2 s a partir del reposo:

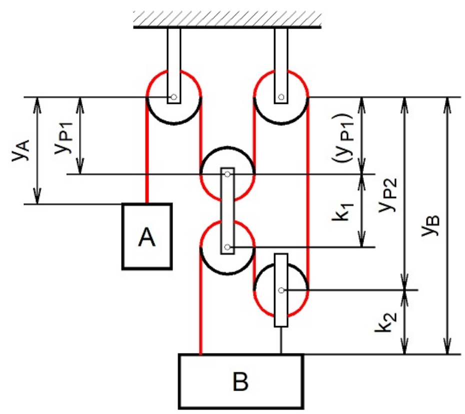
```
zB2 = zBsol /. t → 2
```

Ejercicio 38

El sistema mostrado en la figura se compone de dos bloques, A, de masa desconocida, y B, de 17 kg, cinco poleas y cuatro barras de masa despreciable, y una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable.
Si parte del reposo, determine la masa de A si su rapidez es de 6 $\frac{m}{s}$ (hacia abajo), luego de que B subió 2 m.



Para iniciar la resolución del problema, primero se obtiene la relación cinemática, con base en el cálculo de la longitud de la cuerda con respecto a la posición de los bloques con respecto al centro de las poleas fijas, donde P_1 es el conjunto de las dos poleas unidas con la barra vertical y P_2 es la polea que está conectada al bloque B:



La longitud de la cuerda, que está dibujada de color rojo en el diagrama anterior es:

$$L = y_A + C_1 + y_{P1} + C_2 + y_{P1} + C_3 + y_{P2} + C_4 + (y_{P2} - k_1 - y_{P1}) + C_5 + (y_B - k_1 - y_{P1}) \quad (1)$$

y la longitud de k_2 es:

$$k_2 = y_B - y_{P2} \quad (2)$$

Luego de derivar con respecto al tiempo las dos ecuaciones anteriores, considerando L_1, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, k_1 y k_2 constantes:

$$0 = v_A + 0 + v_{P1} + 0 + v_{P1} + 0 + v_{P2} + 0 + v_{P2} - 0 - v_{P1} + 0 + v_B - 0 - v_{P1}$$

$$0 = v_A + 2\,v_{P2} + v_B \quad (3)$$

$$0 = v_B - v_{P2} \quad (4)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado por 1 y 2 en función de v_B, para obtener la relación cinemática de rapideces:

$$v_{P2} = v_B$$
$$0 = v_A + 2\, v_B + v_B$$
$$v_A = -3\, v_B \qquad (5)$$

Al derivar con respecto al tiempo la expresión anterior, se obtiene la relación cinemática de aceleraciones:

$$a_A = -3\, a_B \qquad (6)$$

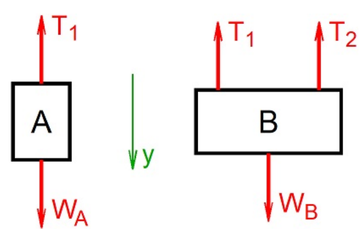
Se puede obtener la relación cinemática de posiciones, considerando que en ambos bloques la posición inicial es CERO:

$$\frac{d\, y_A}{d\, t} = -3\, \frac{d\, v_B}{d\, t}$$

por tanto:

$$d\, y_A = -3\, d\, y_B$$
$$\int_0^{y_A} d\, y_A = \int_0^{y_B} -3\, d\, y_B$$
$$y_A\Big]_0^{y_A} = -3\, y_B\Big]_0^{y_B}$$
$$y_A - 0 = -3\, y_B - 3\,(0)$$
$$y_A = -3\, y_B \qquad (7)$$

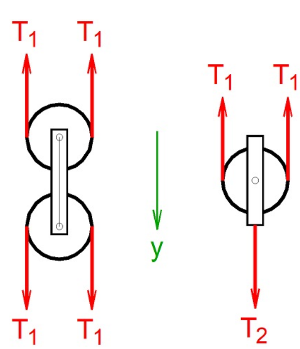
Posteriormente, se obtienen las ecuaciones de movimiento de ambos bloques, con base en sus diagramas de cuerpo libre:



Entonces:

$$W_A - T_1 = m_A\, a_A \qquad (8)$$
$$W_B - T_1 - T_2 = m_B\, a_B \qquad (9)$$

Asimismo, se obtienen las ecuaciones de movimiento de las poleas móviles a partir de sus diagramas de cuerpo libre:



Para el conjunto P_1:

$$2\, T_1 - 2\, T_1 = m_{P1}\, a_{P1}$$

Dado que la masa de las poleas es despreciable, se obtiene una identidad:

$0 = 0$

Para la polea P_2:

$T_2 - 2\,T_1 = m_{P2}\, a_{P2}$

Y como la masa de esta polea también es despreciable:

$T_2 - 2\,T_1 = 0$ (10)

Dado que se conoce la rapidez final del cuerpo A, se puede determinar la rapidez final de B con base en la relación cinemática de velocidades 5:

$v_A = -3\, v_B$

$v_{Af} = 6\, \frac{m}{s}$

$-3\, v_{Bf} = v_{Af}$

$v_{Bf} = \frac{6}{-3}$

$v_{Bf} = -2\, \frac{m}{s}$ (el signo negativo indica que B se mueve hacia arriba)

Como se conoce tanto la rapidez como la posición final del cuerpo B, es posible calcular el valor de su aceleración, que es constante, a partir de la definición de la aceleración de B:

$a_B = v_B\, \frac{d v_B}{d y_B}$

$a_B\, d y_B = v_B\, d v_B$

Las condiciones iniciales son, para $y_{B0} = 0$, $v_{B0} = 0$:

$\int_0^{y_B} a_B\, d y_B = \int_0^{v_B} v_B\, d v_B$

$a_B\, y_B \big]_0^{y_B} = \frac{1}{2}\, v_B^2 \big]_0^{v_B}$

$a_B\, y_B - a_B\,(0) = \frac{1}{2}\, v_B^2 - \frac{1}{2}\,(0)^2$

$a_B\, y_B = \frac{1}{2}\, v_B^2$

Y como y_{Bf} = -2 m, $v_{Bf} = -2\, \frac{m}{s}$, entonces:

$a_B\,(-2) = \frac{1}{2}\,(-2)^2$

$-2\, a_B = \frac{1}{2}\,(4)$

$a_B = \frac{2}{-2}$

$a_B = -1\, \frac{m}{s^2}$

Con base en la relación cinemática de aceleraciones, ecuación 6, se obtiene la aceleración del cuerpo A:

$a_A = -3\, a_B$

$a_A = -3\,(-1)$

$a_A = 3\, \frac{m}{s^2}$

Finalmente, se resuelve el sistema de ecuaciones formado por la ecuación 8 en el que se sustituye el valor de a_A por su valor:

$W_A - T_1 = m_A\, a_A$

$m_A\, g - T_1 = m_A\,(3)$

$9.81\, m_A - 3\, m_A = T_1$

$6.81\, m_A = T_1$

Con la ecuación 9 en la que se considera el valor obtenido de a_B

$17\,g - T_1 - T_2 = 17\,(-1)$

$166.8 + 17 - T_1 - T_2 = 0$

$183.8 = T_1 + T_2$

Y la ecuación 10:

$T_2 - 2\,T_1 = 0$

$T_2 = 2\,T_1$

Por lo que:

$183.8 = T_1 + 2\,T_1$

$3\,T_1 = 183.8$

$T_1 = \frac{183.8}{3}$

$T_1 = 61.26$ N

De donde:

$6.81\,m_A = 61.26$

$m_A = \frac{61.26}{6.81}$

$m_A = 8.995$ kg

La masa del cuerpo A es:

$m_A = 8.995$ kg.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mB = 17;
g = 9.81;
WB = mB g
vAf = 6;
yBf = -2;
WA = mA g
mP1 = 0;
mP2 = 0;
```

Longitudes de la cuerda, L, y de k_2:

```
ec1 = L == yA + C1 + yP1 + C2 + yP1 + C3 + yP2 + C4 + (yP2 - yP1 - k1) + C5 + (yB - yP1 - k1)
ec2 = k2 == yB - yP2
```

Obtención de la relación cinemática de rapideces:

```
ec3 = 0 == vA + vB + 2 vP2
ec4 = 0 == vB - vP2
resp1 = Solve[{ec3, ec4}, {vA, vP2}]
vAsol = vA /. resp1[[1]]
ec5 = vA == vAsol
```

Relación cinemática de aceleraciones: y de posiciones:

```
ec6 = aA == vAsol /. vB → aB
ec7 = yA == vAsol /. vB → yB
```

Obtención de las ecuaciones de movimiento de los bloques y de la segunda polea:

```
ec8 = WA - T1 == mA aA
ec9 = WB - T1 - T2 == mB aB
ec10 = T2 - 2 T1 == mP2 aP2
```

Cálculo de la rapidez final de B:

```
resp5 = Solve[ec5 /. vA → vAf]
vBf = vB /. resp5[[1]]
```

Cálculo de la aceleración de B:

$$ec11 = \int_0^{yB} aB \, dyB == \int_0^{vB} vB \, dvB$$

```
resp11 = Solve[ec11 /. {vB → vBf, yB → yBf}]
aBsol = aB /. resp11[[1]]
```

Obtención de la aceleración de A:

```
resp6 = Solve[ec6 /. aB → aBsol]
aAsol = aA /. resp6[[1]]
```

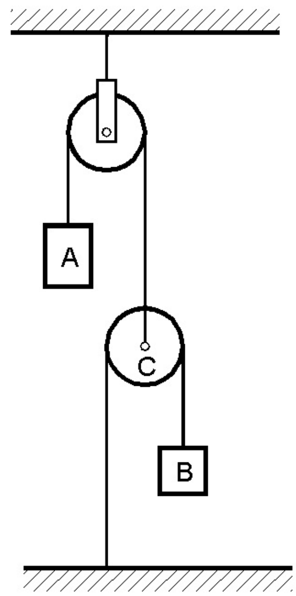
Cálculo de la masa del cuerpo A:

```
resp10 = Solve[{ec8 /. aA → aAsol, ec9 /. aB → aBsol, ec10}]
mAsol = mA /. resp10[[1]]
```

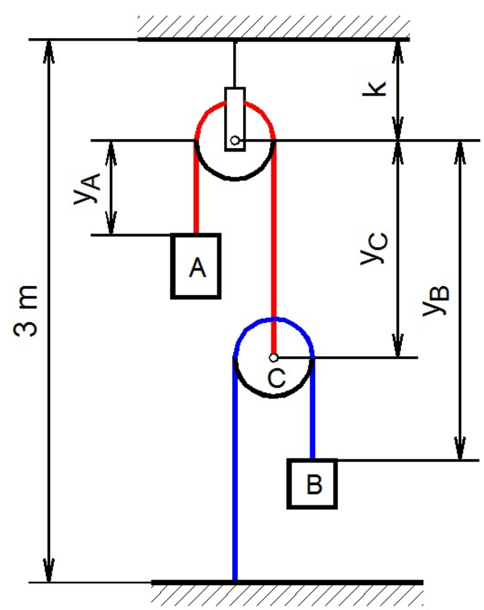
Ejercicio 39

Un sistema mecánico está formado por dos bloques, A y B, cuyas masas son, respectivamente, $m_A = 8$ kg y $m_B = 2.5$ kg, dos poleas de masa despreciable, una fija y otra móvil, C, y dos cuerdas flexibles, inextensibles y de masa despreciable.
Si el sistema se suelta desde el reposo, determine:

a) la aceleración que adquiere cada uno de los bloques;
b) la tensión en cada una de las cuerdas; y
c) la rapidez del bloque B, una vez que A haya bajado 0.5 m.



Primero, se procede a obtener la relación cinemática, con base en las longitudes de las cuerdas, L_1 que está con color rojo y L_2 trazada con color azul en el siguiente diagrama:



$$L_1 = y_A + C_1 + y_C \tag{1}$$

$$L_2 = (3 - y_C - k) + C_2 + (y_B - y_C) \tag{2}$$

Luego de derivar con respecto al tiempo las dos ecuaciones anteriores, considerando L_1, L_2, C_1, C_2 y k constantes:

$$0 = v_A + 0 + v_C$$

$$0 = v_A + v_C \tag{3}$$

$$0 = 0 - v_C - 0 + 0 + v_B - v_C$$

$$v_B = 2\,v_C \tag{4}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado por 3 y 4 en función de v_B, para obtener la relación cinemática de rapideces:

$$v_C = -v_A$$

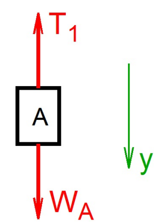
$$v_B = 2\,(-v_A)$$

$$v_B = -2\,v_A \tag{5}$$

Al derivar con respecto al tiempo la expresión anterior, se obtiene la relación cinemática de aceleraciones:

$$a_B = -2\,a_A \tag{6}$$

Posteriormente, se obtienen las ecuaciones de movimiento de ambos bloques.
Primero, las del bloque A, con base en el siguiente diagrama de cuerpo libre:



La ecuación de movimiento queda:

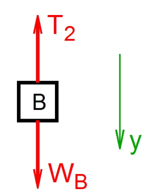
$$W_A - T_1 = m_A\,a_A$$

Luego de sustituir los valores conocidos:

$$8\,(9.81) - T_1 = 8\,a_A$$

$$78.48 - T_1 = 8\,a_A \tag{7}$$

Luego, para el bloque B, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra a continuación:



Su ecuación de movimiento es:

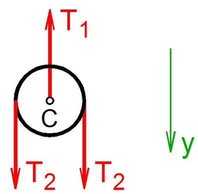
$$W_B - T_2 = m_B\,a_B$$

De donde:

$$2.5\,(9.81) - T_2 = 2.5\,a_B$$

$$24.53 - T_2 = 2.5\,a_B \tag{8}$$

Además, se requiere establecer la ecuación de movimiento de la polea móvil C, a partir de su diagrama de cuerpo libre:



La ecuación de movimiento es:

$$2\,T_2 - T_1 = m_C\,a_C$$

Dado que la masa de la polea es despreciable, se obtiene:

$$2\,T_2 - T_1 = 0$$

$$2\,T_2 = T_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\,T_1 \qquad (9)$$

a) la aceleración que adquiere cada uno de los bloques

Para obtener la aceleración de cada uno de los bloques, simplemente se resuelve el sistema de ecuaciones integrado por la relación cinemática, 6, y las ecuaciones de movimiento de los dos bloques, A y B, y de la polea C, 7, 8 y 9.

Primero, se sustituye 6 y 9 en 8:

$$24.53 - \frac{1}{2}\,T_1 = 2.5\,(-2\,a_A)$$

$$24.53 - \frac{1}{2}\,T_1 = -5\,a_A$$

La expresión anterior se multiplica por (-2) y se suma con la ecuación 7:

$$-49.05 + T_1 = 10\,a_A$$

$$78.48 - T_1 = 8\,a_A \qquad +$$

____

$$29.43 = 18\,a_A$$

$$a_A = \frac{29.43}{18}$$

$$a_A = 1.635\,\frac{m}{s^2}$$

Por tanto, la aceleración del bloque B es:

$$a_B = -2\,a_A$$

$$a_B = -2\,(1.635)$$

$$a_B = -3.27\,\frac{m}{s^2}$$

La aceleración que adquiere cada uno de los bloques es:

$a_A = 1.635\,\frac{m}{s^2}$, hacia abajo, y $a_B = -3.27\,\frac{m}{s^2}$, hacia arriba.

b) la tensión en cada una de las cuerdas

Para obtener la tensión en cada una de las cuerdas, simplemente se sustituyen el valor de una de las aceleraciones obtenidas, por ejemplo a_A, en las ecuaciones de movimiento, en este caso la 7:

$$78.48 - T_1 = 8\,(1.635)$$

$$T_1 = 78.78 - 13.08$$

$$T_1 = 65.7\text{ N}$$

Y se sustituye este último resultado en la expresión 9:

$$T_2 = \frac{1}{2}\,(65.7)$$

$$T_2 = 32.85\text{ N}$$

La tensión en cada una de las cuerdas es:

$T_1 = 65.7$ N y $T_2 = 32.85$ N.

c) la rapidez del bloque B, una vez que A haya bajado 0.5 m

Para resolver este inciso, primero se puede obtener la rapidez de A, con base en la definición alternativa de aceleración en función de la rapidez y la posición:

$$a_A = v_A\,\frac{d\,v_A}{d\,y_A}$$

Entonces:

$$v_A\,\frac{d\,v_A}{d\,y_A} = 1.635$$

$$v_A\,d\,v_A = 1.635\,d\,y_A$$

Se integran ambos miembros, considerando las condiciones iniciales $y_{A0} = 0$ y $v_{A0} = 0$:

$$\int_0^{v_A} v_A\,d\,v_A = \int_0^{y_A} 1.635\,d\,y_A$$

$$\frac{1}{2}\,v_A^2\Big]_0^{v_A} = 1.635\,y_A\Big]_0^{y_A}$$

$$\frac{1}{2}\,v_A^2 - \frac{1}{2}\,(0)^2 = 1.635\,y_A - 1.635\,(0)$$

$$\frac{1}{2}\,v_A^2 = 1.635\,y_A$$

$$v_A^2 = 3.27\,y_A$$

$$v_A = \sqrt{3.27\,y_A}$$

Se sustituye la posición final del bloque A, $y_{Af} = 0.5$ m:

$$v_A = \sqrt{3.27\,(0.5)}$$

$$v_A = \sqrt{1.635}$$

$$v_A = 1.279\,\frac{m}{2}$$

Finalmente, con base en la relación cinemática de rapideces, ecuación 5:

$$v_B = -2\,v_A$$

$$v_B = -2\,(1.279)$$

$$v_B = -2.557\,\frac{m}{s}$$

La rapidez del bloque B, una vez que A haya bajado 0.5 m es:

$v_B = -2.557\,\frac{m}{s}$, hacia arriba.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 8;
mB = 2.5;
mC = 0;
g = 9.81;
yAf = 0.5;
WA = mA g
WB = mB g
```

Longitudes de la cuerdas, L_1, y L_2:

```
ec1 = L1 == yA + C1 + yC
ec2 = L2 == (3 - yC - k) + C2 + (yB - yC)
```

Obtención de la relación cinemática de rapideces:

```
ec3 = 0 == vA + 0 + vC
ec4 = 0 == 0 - vC - 0 + 0 + vB - vC
resp4 = Solve[{ec3, ec4}, {vA, vC}]
vAsol = vA /. resp4[[1]]
ec5 = vA == vAsol
```

Relación cinemática de aceleraciones:

```
ec6 = aA == vAsol /. vB → aB
```

Obtención de las ecuaciones de movimiento de los bloques y de la polea C:

```
ec7 = WA - T1 == mA aA
ec8 = WB - T2 == mB aB
ec9 = 2 T2 - T1 == mC aC
```

a) la aceleración que adquiere cada uno de los bloques

```
resp9 = Solve[{ec6, ec7, ec8, ec9}]
aAsol = aA /. resp9[[1]]
aBsol = aB /. resp9[[1]]
```

b) la tensión en cada una de las cuerdas

```
T1sol = T1 /. resp9[[1]]
T2sol = T2 /. resp9[[1]]
```

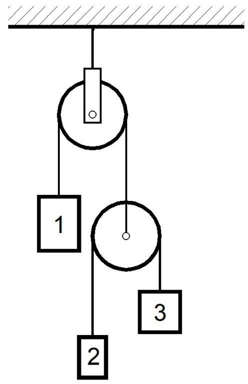
c) la rapidez del bloque B, una vez que A haya bajado 0.5 m

$$ec10 = \int_0^{vA} vA\, dvA == \int_0^{yA} aAsol\, dyA$$

```
resp10 = Solve[ec10, vA]
vAsol = vA /. resp10[[2]]
vAf = vAsol /. yA → yAf
resp5 = Solve[ec5, vB]
vBsol = vB /. resp5[[1]]
vBf = vBsol /. vA → vAf
```

Ejercicio 40

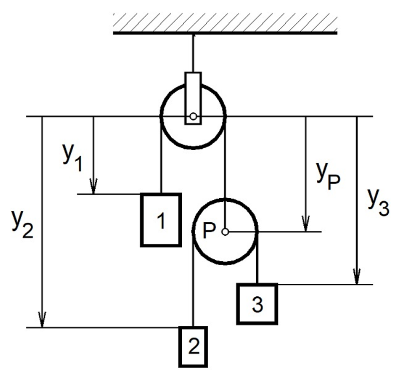
Determine la aceleración de cada uno de los bloques así como la tensiones en las cuerdas, del sistema de poleas y bloques que se muestra en la figura.



Las masas de los bloques son $m_1 = 25$ kg, $m_2 = 10$ kg y $m_3 = 15$ kg, y considere que las poleas tienen masa y fricción despreciables, así como las cuerdas son flexibles, inextensibles y también de masa despreciable.

Para la resolución de problemas relacionados con cuerpos conectados, es necesario establecer la relación cinemática del movimiento de ambos cuerpos, en los que se relacionen las velocidades, por un lado, y las aceleraciones, por otro.
Cuando el problema implica poleas y cuerdas, una manera relativamente sencilla de obtener la mencionada relación cinemática es con la obtención de la longitud de la cuerda, o cuerdas, a partir de la posición de los cuerpos, con respecto al centro de una polea fija.

Para el caso de este problema, se establece la posición de cada uno de los bloques, y_1, y_2 e y_3, con respecto al centro de la única polea que se tiene:



La longitud de la cuerda de la izquierda, L_1, que es constante, es igual a la suma de y_1, más la longitud de la semicircunferecia, C_1, de la parte superior de la polea fija y que también es constante, más y_P:

$$L_1 = y_1 + C_1 + y_P$$

La longitud de la cuerda de la polea móvil, L_2, también constante, es igual a la suma de $(y_2 - y_P)$, más la longitud de la semicircunferecia, C_2, de la parte superior de la polea móvil y que también es constante, más $(y_3 - y_P)$:

$$L_2 = (y_2 - y_P) + C_2 + (y_3 - y_P).$$

Se deriva las expresiones anteriores con respecto al tiempo:

$0 = v_1 + 0 + v_P$

$0 = v_2 - v_P + 0 + v_3 - v_P$

De donde:

$v_P = -v_1$

y por consiguiente:

$v_2 + v_1 + v_3 + v_1 = 0$

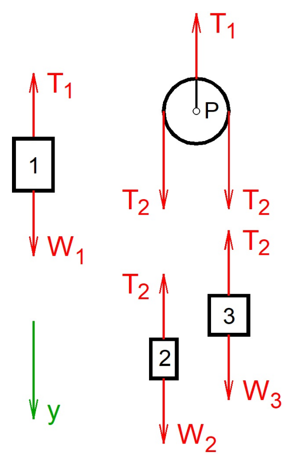
$2\, v_1 = -v_2 - v_3$

$v_1 = -\frac{1}{2}\,(v_2 + v_3)$

Se deriva la expresión anterior con respecto al tiempo para obtener la relación cinemática de aceleraciones:

$a_1 = -\frac{1}{2}\,(a_2 + a_3)$

Posteriormente, se trazan los diagramas de cuerpo libre de cada uno de los bloques, incluyendo a la polea móvil:



Para los problemas de cuerpos conectados que implican cuerdas y poleas, el sentido de los ejes de referencia debe ser siempre del centro de la polea fija, que sirve como referencia, a cada uno de los cuerpos; en este caso coincide que los ejes son verticales, de arriba hacia abajo.

Con base en la segunda ley de Newton, se establecen las ecuaciones de movimiento de cada uno de los cuerpos:

$W_1 - T_1 = m_1\, a_1$

$W_2 - T_2 = m_2\, a_2$

$W_3 - T_2 = m_3\, a_3$

$2\, T_2 - T_1 = m_P\, a_P$

Luego de sustituir los valores de peso de los bloques, y dado que la polea móvil se considera que tiene masa despreciable, se obtiene:

$25\,(9.81) - T_1 = 25\, a_1$ (1)

$10\,(9.81) - T_2 = 10\, a_2$ (2)

$15\,(9.81) - T_2 = 15\, a_3$ (3)

$2\, T_2 - T_1 = (0)\, a_P$

$2\, T_2 - T_1 = 0$ (4)

Dada la relación cinemática:

$$a_1 = -\frac{1}{2}\,(a_2 + a_3)$$

La expresión 1 queda:

$$245.3 - T_1 = (25)\left[-\frac{1}{2}\,(a_2 + a_3)\right]$$

$$245.3 - T_1 = -12.5\,a_2 \;-\; 12.5\,a_3 \qquad (5)$$

De la expresión 4 se despeja T_1 y se le sustituye en la expresión anterior:

$$T_1 = 2\,T_2$$

$$245.3 - 2\,T_2 = -12.5\,a_2 \;-\; 12.5\,a_3 \qquad (6)$$

Se despejan a_2 y a_3 de las ecuaciones 2 y 3:

$$10\,a_2 = 10\,(9.81) - T_2$$

$$a_2 = \frac{10\,(9.81)}{10} - \frac{1}{10}\,T_2$$

$$a_2 = 9.81 - \frac{1}{10}\,T_2 \qquad (7)$$

$$15\,a_3 = 15\,(9.81) - T_2$$

$$a_3 = \frac{15\,(9.81)}{15} - \frac{1}{15}\,T_2$$

$$a_3 = 9.81 - \frac{1}{15}\,T_2 \qquad (8)$$

Se sustituyen 7 y 8 en 6 para determinar T_2:

$$245.3 - 2\,T_2 = -12.5\left(9.81 \;-\; \frac{1}{10}\,T_2\right) \;-\; 12.5\left(9.81 \;-\; \frac{1}{15}\,T_2\right)$$

$$245.3 - 2\,T_2 = -122.6 \;+\; 1.25\,T_2 \;-\; 122.6 \;+\; 0.8333\,T_2$$

$$1.25\,T_2 \;+\; 0.8333\,T_2 \;+\; 2\,T_2 = 245.3 + 122.6 + 122.6$$

$$4.083\,T_2 = 490.5$$

$$T_2 = \frac{490.5}{4.083}$$

$$T_2 = 120.1\text{ N}$$

y por tanto:

$$T_1 = 2\,(120.1)$$

$$T_1 = 240.2\text{ N}$$

Se sustituye este último resultado en las ecuaciones 7 y 8 para obtener las aceleraciones a_2 y a_3:

$$a_2 = 9.81 - \frac{1}{10}\,(120.1)$$

$$a_2 = 9.81 - 12.01$$

$$a_2 = -2.202\,\frac{m}{s^2}$$

$$a_3 = 9.81 - \frac{1}{15}\,(120.1)$$

$$a_3 = 9.81 - 8.008$$

$$a_3 = 1.802\,\frac{m}{s^2}$$

Finalmente, se sustituyen estas dos aceleraciones en la relación cinemática de aceleraciones:

$a_1 = -\frac{1}{2}(a_2 + a_3)$

$a_1 = -\frac{1}{2}(-2.202 + 1.802)$

$a_1 = -\frac{1}{2}(-0.4)$

$a_1 = 0.2\ \frac{m}{s^2}$

Las aceleraciones de cada uno de los bloques son:

$a_1 = 0.2\ \frac{m}{s^2}$ (hacia abajo)

$a_2 = -2.202\ \frac{m}{s^2}$ (hacia arriba)

$a_3 = 1.802\ \frac{m}{s^2}$ (hacia abajo)

y las tensiones de cada una de las cuerdas son:

$T_1 = 240.2$ N

$T_2 = 120.1$ N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m1 = 25;
m2 = 10;
m3 = 15;
g = 9.81;
```

Relación cinemática:

```
L1 == y1 + C1 + yP
L2 == y2 - yP + C2 + y3 - yP
ec1 = 0 == v1 + vP
ec2 = 0 == v2 - vP + v3 - vP
resp2 = Solve[{ec1, ec2}, {vP, v1}]
v1Ec = v1 /. resp2[[1]]
ec3 = 0 == a1 + aP
ec4 = 0 == a2 + a3 - 2 aP
resp4 = Solve[{ec3, ec4}, {aP, a1}]
a1Ec = a1 /. resp4[[1]]
```

Ecuaciones de movimiento:

```
ec5 = m1 g - T1 == m1 a1
ec6 = m2 g - T2 == m2 a2
ec7 = m3 g - T2 == m3 a3
ec8 = 2 T2 - T1 == 0
```

Obtención solución ecuaciones de movimiento

```
resp8 = Solve[{(ec5 /. a1 → a1Ec), ec6, ec7, ec8}]
a2sol = a2 /. resp8[[1]]
a3sol = a3 /. resp8[[1]]
T1sol = T1 /. resp8[[1]]
T2sol = T2 /. resp8[[1]]
a1sol = a1Ec /. {a2 → a2sol, a3 → a3sol}
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Academia de Dinámica
Febrero de 2023

Yukihiro Minami Koyama