Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Cuaderno de ejercicios resueltos
Cinemática y Dinámica

Autor: Yukihiro Minami Koyama

Cinética curvilínea de la partícula

Academia de Dinámica
División de Ciencias Básicas

Ejercicio 16

Determine las expresiones generales de la velocidad y la posición de un tiro parabólico como vectores, considerando una razpidez inicial v_0, un ángulo de tiro θ y una posición inicial $\overline{r_0} = \{x_0, y_0\}$.

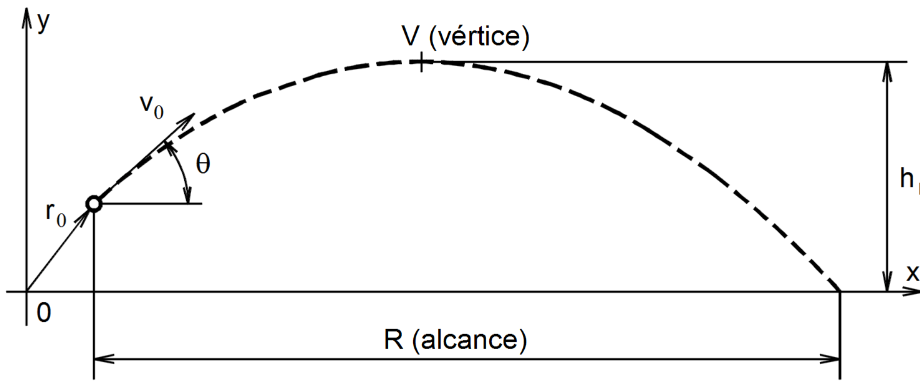
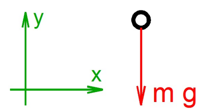


Diagrama de cuerpo libre del cuerpo luego de que fue lanzado:



La representación vectorial del peso es:

$\overline{W} = \{0, \text{-m g}\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{W} = \text{m}\ \{a_x, a_y\}$

$\{0, \text{-m g}\} = \text{m}\ \{a_x, a_y\}$

A partir de esta última expresión, se pueden obtener dos ecuaciones escalares:

$a_x = 0$

$\text{-m g} = \text{m}\ a_y$

$a_y = \text{-g}$

Dado que se conoce la aceleración, se puede plantear la ecuación diferencial para calcular la velocidad:

$\overline{a} = \{0, \text{-g}\}$

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, \text{-g}\} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, \text{-g}\}\ d\text{t} = d\overline{v}$

Las condiciones iniciales son las siguientes:

$t_0 = 0\ \text{s}$

$\overline{v_0} = \{\text{magv}_0\ \text{Cos}[\theta], \text{magv}_0\ \text{Sin}[\theta]\}$

Se emplean estos valores para resolver la ecuación diferencial anterior:

$\{0, -g\}\, d t = d \overline{v}$

$\int_0^t \{0, -g\}\, d t = \int_{\overline{v_0}}^{\overline{v}} d \overline{v}$

$\{0, -g\}\, t\,]_0^t = \overline{v}\,]_{\overline{v_0}}^{\overline{v}}$

$\{0, -g\}\, t - \{0, -g\}\,(0) = \overline{v} - \overline{v_0}$

$\overline{v} = \{0, -g\, t\} + \{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta], \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\}$

$\overline{v} = \{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta], -g\, t + \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\}$

Posteriormente, se plantea y resuelve la ecuación diferencial de la posición del cuerpo:

$\overline{v} = \frac{d \overline{r}}{d t}$

$\overline{v}\, d t = d \overline{r}$

$\{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta], -g\, t + \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\}\, d t = d \overline{r}$

$\int_0^t \{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta], -g t + \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\}\, d t = \int_{\overline{r_0}}^{\overline{r}} d \overline{r}$

Dado que la posición inicial es:

$\overline{r_0} = \{x_0, y_0\}$

Al resolver la ecuación anterior queda:

$\left\{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta]\, t, -\frac{1}{2} g t^2 + \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\, t\right\}]_0^t = \overline{r}\,]_{\overline{r_0}}^{\overline{r}}$

$\left\{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta]\, t, -\frac{1}{2} g t^2 + \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\, t\right\} - 0 = \overline{r} - \overline{r_0}$

$\overline{r} = \left\{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta]\, t, -\frac{1}{2} g t^2 + \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\, t\right\} + \{x_0, y_0\}$

$\overline{r} = \{\text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta]\, t + x_0, -\frac{1}{2} g t^2 + \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]\, t + y_0\}$

Para simplificar las expresiones obtenidas, si se escribe la velocidad inicial como:

$\overline{v_0} = \{v_{0,x},\ v_{0,y}\}$

donde:

$v_{0,x} = \text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta]$

$v_{0,y} = \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]$

Las expresiones de la velocidad y la posición de un tiro parabólico quedan como sigue:

$\overline{v} = \{v_{0,x}, -g\, t + v_{o,y}\}$

$\overline{r} = \{v_{o,x}\, t + x_0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{o,y}\, t + y_0\}$

Las expresiones del vector de velocidad y del vector de posición de un tiro parabólico con una velocidad inicial con magnitud magv_0 y ángulo de tiro θ, así como una posición inicial $\overline{r_0} = \{x_0, y_0\}$ son, respectivamente:

$\overline{v} = \{v_{0,x}, -g\, t + v_{o,y}\}$

$\overline{r} = \{v_{o,x}\, t + x_0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{o,y}\, t + y_0\}$

donde:

$v_{0,x} = \text{magv}_0 \operatorname{Cos}[\theta]$ y $v_{0,y} = \text{magv}_0 \operatorname{Sin}[\theta]$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Definición de vectores:

```
vecR = {x, y};
vecV = {vx, vy};
vecA = {ax, ay};
r0 = {x0, y0};
v0 = magv0 {Cos[θ], Sin[θ]};
```

Segunda Ley de Newton:

```
F = {0, -m g}
ec1 = F == m vecA
resp1 = Solve[ec1, vecA]
vecASol = vecA /. resp1[[1]]
```

Dado que vecASol = $\frac{dv}{dt}$, entonces vecASol dt = dv:

$$ec2 = \int_0^t vecASol\, dt == \int_{v0}^{vecV} dv$$

```
resp2 = Solve[ec2, vecV]
vecVSol = vecV /. resp2[[1]]
```

Dado que vecVSol = $\frac{dr}{dt}$, entonces vecVSol dt = dr:

$$ec3 = \int_0^t vecVSol\, dt == \int_{r0}^{vecR} dr$$

```
resp3 = Solve[ec3, vecR]
vecRSol = vecR /. resp3[[1]]
```

Ejercicio 17

Determine la ecuación de la trayectoria, así como las coordenadas del vértice del tiro parabólico, V, cuyos parámetros se muestran en la figura. Considere que el origen del marco de referencia se coloca justo en el punto de lanzamiento del cuerpo.

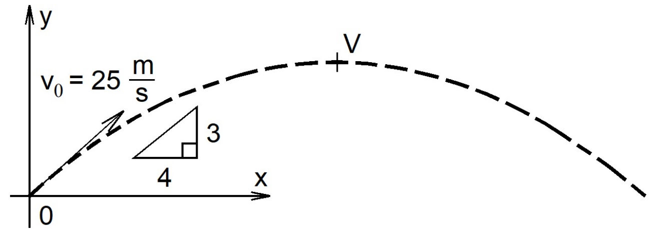
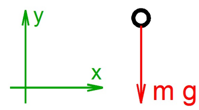


Diagrama de cuerpo libre del cuerpo luego de que fue lanzado:



$\overline{W} = \{0, -m\,g\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{W} = m\,\overline{a}$

$\{0, -m\,g\} = m\,\overline{a}$

$m\,\overline{a} = \{0, -m\,g\}$

$\overline{a} = \{0, -g\}$

Con base en la definición de aceleración:

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, -g\} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, -g\}\, dt = d\overline{v}$

Posteriormente, se integran ambos miembros, considerando como límite inferior de la integración las condiciones iniciales, en este caso, para $t_0 = 0$ s:

$\overline{v_0} = 25\left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

$\overline{v_0} = \{20, 15\}$

$\int_0^t \{0, -g\}\, dt = \int_{\{20, 15\}}^{\overline{v}} d\overline{v}$

$\{0, -g\}\, t\,]_0^t = \overline{v}\,]_{\{20, 15\}}^{\overline{v}}$

$\{0, -g\}\, t - \{0, -g\}\,(0) = \overline{v} - \{20, 15\}$

$\overline{v} - \{20, 15\} = \{0, -g\}\, t$

$\overline{v} = \{0, -g\}\, t + \{20, 15\}$

$\overline{v} = \{20, -g\,t + 15\}$

Luego, se obtiene el vector de posición con base en la definición de velocidad:

$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$

$\{20, -g\,t + 15\} = \frac{d\overline{r}}{dt}$

$\{20, -g\,t + 15\}\, dt = d\overline{r}$

La posición inicial, en este caso, es $\overline{r_0} = \{0, 0\}$:

$$\int_0^t \{20, -g\,t + 15\}\,dt = \int_{\{0,0\}}^{\bar{r}} d\bar{r}$$

$$\{20\,t, -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t\}\,]_0^t = \bar{r}\,]_{\{0,0\}}^{\bar{r}}$$

$$\{20\,t, -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t\} - \{20\,(0), -\tfrac{1}{2}\,g\,(0)^2 + 15\,(0)\} = \bar{r} - \{0, 0\}$$

$$\bar{r} = \{20\,t, -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t\}$$

Para obtener la ecuación de la trayectoria del tiro parabólico, se requieren las expresiones de x, y en función del tiempo. Estas expresiones se obtienen del vector de posición obtenido:

$$x = 20\,t$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t$$

$$20\,t = x$$

$$t = \frac{x}{20}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{20}\right)^2 + 15\left(\frac{x}{20}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{400} + \frac{3}{4}\,x$$

$$y = -0.01226\,x^2 + 0.75\,x$$

La ecuación de la trayectoria de este tiro parabólico es:
$y = -0.01226\,x^2 + 0.75\,x.$

Para obtener el vértice de la trayectoria, se iguala a cero la componente vertical, en y, de la velocidad, de donde se obtiene el tiempo crítico:

$$-g\,t_{crit} + 15 = 0$$

$$g\,t_{crit} = 15$$

$$t_{crit} = \frac{15}{9.81}$$

$$t_{crit} = 1.529\text{ s}$$

Se sustituye dicho tiempo crítico, t_{crit}, en la expresión de y:

$$y = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t$$

$$y_{max} = -\tfrac{1}{2}\,g\,(1.529)^2 + 15\,(1.529)$$

$$y_{max} = -11.47 + 22.94$$

$$y_{max} = 11.47\text{ m}$$

Para obtener su abscisa, se sustituye dicho tiempo crítico en la expresión de x:

$$x_{max} = 20\,t$$

$$x_{max} = 20\,(1.529)$$

$$x_{max} = 30.58\text{ m}$$

Por tanto, las coordenadas del vértice de la trayectoria son:

V(30.58, 11.47) m

Las coordenadas del vértice son:
V(30.58, 11.47) m.

Se le denomina alcance, R, a la distancia horizontal que existe entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del cuerpo.
Para determinarlo, se calcula el instante en el que la componente vertical del vector de posición del cuerpo es nulo, es decir, cuando “regresa” al piso, $y_2 = 0$:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + 15 \text{ t}$$
$$0 = -\frac{1}{2} g t_2^2 + 15 t_2$$
$$\frac{1}{2} \text{ g } t_2^2 = 15 t_2$$
$$\frac{1}{2} \text{ g } t_2 = 15$$
$$t_2 = \frac{15 (2)}{9.81}$$
$$t_2 = \frac{30}{9.81}$$
$$t_2 = 3.058$$

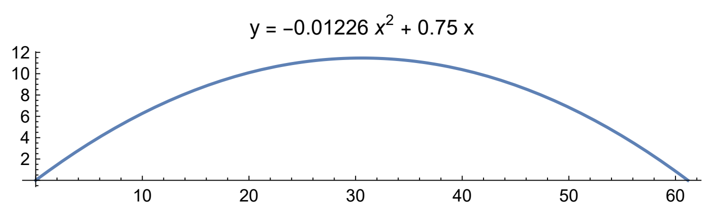
Se sustituye dicho tiempo en la ecuación de la componente horizontal de la posición:

$$x = 20 \text{ t}$$
$$x_2 = 20 t_2$$
$$x_2 = 20 (3.058)$$
$$x_2 = 61.16 \text{ m}$$
$$R = x_2 - x_0$$
$$R = 61.16 - 0$$
$$R = 61.16 \text{ m}$$

El alcance del tiro parabólico es:
R = 61.16 m.

Gráfica de la trayectoria:

```
y = -0.0122625 x^2 + 0.75 x;
Plot[y, {x, 0, 61.162}, AspectRatio → Automatic, PlotLabel → "y = -0.01226 x^2 + 0.75 x"]
```



Para resolver problemas de tiro parabólico, por lo regular únicamente se requieren las expresiones de los vectores de velocidad y de posición de dicho movimiento, que son los siguientes:

$$\bar{v} = \{v_{0,x}, -\text{g t} + v_{0,y}\}$$

donde:

$$v_{0,x} = v_0 \text{ Cos}[\theta]$$
$$v_{0,y} = v_0 \text{ Sin}[\theta]$$

Para la posición:

$$\bar{r} = \{v_{0,x}\, t + x_0, -\frac{1}{2} \text{ g } t^2 + v_{0,y} \text{ t} + y_0\}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
v0 = 25;
vr0 = {0, 0};
g = 9.81;
vv0 = v0 {4/5, 3/5}
```

Vectores:

```
vR = {x, y};
vV = {vx, vy};
vA = {ax, ay};
```

```
ec1 = {0, -m g} == m vA
resp1 = Solve[ec1, vA]
```

Vector aceleración:

```
vAsol = vA /. resp1[[1]]
```

Dado que vAsol = $\frac{dv}{dt}$, entonces vAsol dt = dv:

$$ec2 = \int_0^t vAsol\, dt == \int_{vv0}^{vV} dv$$

```
resp2 = Solve[ec2, vV]
```

Vector velocidad:

```
vVsol = vV /. resp2[[1]]
```

Dado que vVsol = $\frac{dr}{dt}$, entonces vVsol dt = dr:

$$ec3 = \int_0^t vVsol\, dt == \int_{vr0}^{vR} dr$$

```
resp3 = Solve[ec3, vR]
```

Vector de posición:

```
vRsol = vR /. resp3[[1]]
```

Para determinar la ecuación de la trayectoria, se iguala el vector de posición obtenido al vector r{x, y}:

```
ec4 = {x, y} == vRsol
```

Se resuelve para t e y:

```
resp4 = Solve[ec4, {y, t}]
ySol = y /. resp4⟦1⟧ // Simplify
```

Las coordenadas del vértice se pueden determinar encontrando la altura máxima (h_{max}), para lo cual se determina el instante en que la componente vertical de la velocidad del cuerpo es cero:

```
ec5 = vVsol⟦2⟧ == 0
resp5 = Solve[ec5, t]
t1sol = t /. resp5⟦1⟧
```

Se sustituye el valor de tiempo obtenido, t1Sol, en la expresión del vector de posición:

```
vR = vRsol /. t → t1sol
```

Cálculo del alcance, R:

```
ec6 = vRsol⟦2⟧ == 0
resp6 = Solve[ec6, t]
t2sol = t /. resp6⟦2⟧
```

Se sustituye el valor de tiempo obtenido, t2Sol, en la expresión del vector de posición:

```
vRmax = vRsol /. t → t2sol // Simplify
```

El alcance será la componente horizontal de este vector:

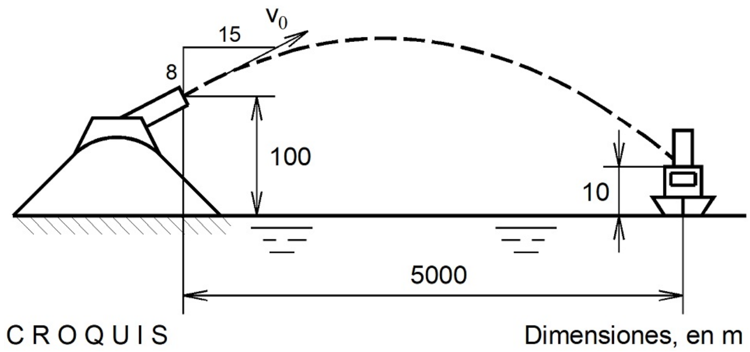
```
RmaxSol = vRmax⟦1⟧ - vr0
```

Gráfica de la trayectoria del tiro parabólico:

```
Plot[ySol, {x, 0, RmaxSol}, AspectRatio → Automatic,
 PlotLabel → "y = -0.01226 x^2 + 0.75 x"]
```

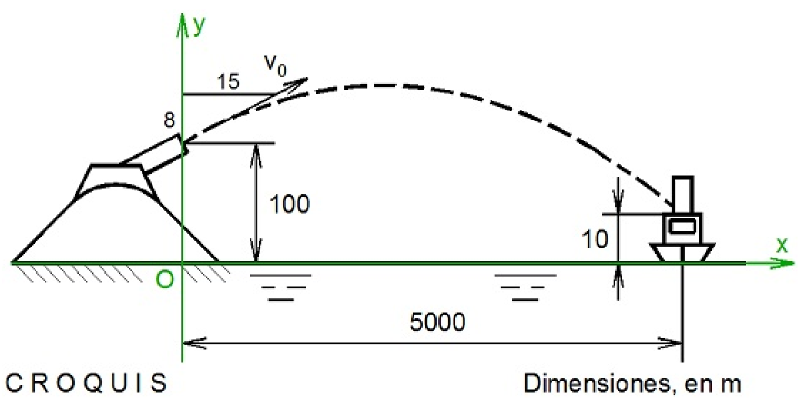
Ejercicio 18

Un cañón militar está ubicado en lo alto de una colina. Para atacar a un barco le lanza un proyectil con un ángulo de tiro con pendiente , tal como se muestra en la figura.



Si la boca de dicho cañón se encuentra a 100 m de altura sobre el nivel del mar, determine la rapidez inicial, v_0, que debe imprimirse al proyectil para dar en el blanco. Desprecie la resistencia del aire.
Asimismo, obtenga el vector de la velocidad del proyectil cuando impacta con el barco.

Para resolver este problema, se obtienen las ecuaciones de la posición del proyectil.
El sistema coordenado de referencia se establece de manera que el eje x coincida con el nivel del mar y que el eje y pase por la boca del cañón.



Dado que la hipotenusa del triángulo de la velocidad inicial es:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{225 + 64}$$

$$\text{hip} = \sqrt{289}$$

$$\text{hip} = 17$$

Por tanto, las condiciones iniciales son las siguientes:

$$\overline{r_0} = \{0, 100\}$$

$$\overline{v_0} = v_0 \left\{\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right\}$$

$$\overline{v_0} = \left\{\frac{15}{17} v_0, \ \frac{8}{17} v_0\right\}$$

La expresión vectorial que establece la posición del proyectil es, entonces:

$$\overline{r} = \{\frac{15}{17}\, v_0\, \text{t}, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + \frac{8}{17}\, v_0\, t + 100\}$$

Dado que la ecuación anterior debe satisfacer a las coordenadas del blanco, que son:

$$\overline{r_f} = \{5000, 10\}$$

Se puede establecer la siguiente ecuación vectorial:

$$\overline{r_f} = \{\frac{15}{17}\, v_0\, t_f, -\frac{1}{2}\, g\, t_f^2 + \frac{8}{17}\, v_0\, t_f + 100\}$$

es decir:

$$\{5000, 10\} = \{\frac{15}{17}\, v_0\, t_f, -\frac{1}{2}\, g\, t_f^2 + \frac{8}{17}\, v_0\, t_f + 100\}$$

Por tanto:

$$5000 = \frac{15}{17}\, v_0\, t_f \qquad (1)$$

$$10 = -\frac{1}{2}\, g\, t_f^2 + \frac{8}{17}\, v_0\, t_f + 100 \qquad (2)$$

Se despeja t_f de 1:

$$\frac{15}{17}\, v_0\, t_f = 5000$$

$$t_f = \frac{5000\,(17)}{15\, v_0}$$

$$t_f = \frac{5666.7}{v_0} \qquad (3)$$

Se sustituye en 2

$$10 = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{5666.7}{v_0}\right)^2 + \frac{8}{17}\, v_0 \left(\frac{5666.7}{v_0}\right) + 100$$

$$10 = -\frac{1}{2}\,(9.81)\left(\frac{32.11\times 10^6}{v_0^2}\right) + 2666.7 + 100$$

$$\frac{157.5\times 10^6}{v_0^2} = 2766.7 - 10$$

$$157.5\times 10^6 = 2756.7\, v_0^2$$

$$v_0^2 = \frac{157.5\times 10^6}{2756.7}$$

$$v_0^2 = \sqrt{57\,136}$$

$$v_0 = 239.0\, \frac{m}{s}$$

La rapidez inicial que debe imprimirse al proyectil para dar en el blanco es:

$$v_0 = 239.0\, \frac{m}{s}.$$

Para obtener el vector de la velocidad del proyectil cuando impacta en el blanco, solo se requiere sustituir la rapidez inicial obtenida y el tiempo que tarda en llegar a dicho blanco en la ecuación vectorial de la velocidad del proyectil:

$$\overline{v} = \left\{\frac{15}{17}\, v_0, \text{-g t} + \frac{8}{17}\, v_0\right\}$$

Por consiguiente:

$$\overline{v_f} = \left\{\frac{15}{17}\, v_0, \text{-g}\, t_f + \frac{8}{17}\, v_0\right\}$$

El tiempo final se puede obtener de la ecuación 3:

$$t_f = \frac{5666.7}{v_0}$$

$$t_f = \frac{5666.7}{239.0}$$

$$t_f = 23.71\ \text{s}$$

De donde:

$\overline{v_f} = \{\frac{15}{17}\ (239.0), -(9.81)\ (23.71) + \frac{8}{17}\ (239.0)\}$

$\overline{v_f} = \{210.9, -232.6 + 112.5\}$

$\overline{v_f} = \{210.9, -120.1\}\ \frac{m}{s}$

El vector de la velocidad del proyectil cuando impacta en el blanco es:

$\overline{v_f} = \{210.9, -120.1\}\ \frac{m}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
vr0 = {0, 100};
g = 9.81;
Δx = 15;
Δy = 8;
hip = Sqrt[Δx^2 + Δy^2]
vv0 = v0 {Δx/hip, Δy/hip}
vrf = {5000, 10}
```

Vector de posición del proyectil:

```
vR = {0, -1/2 g t^2} + vv0 t + vr0
```

Ecuación de la posición final del proyectil y su solución:

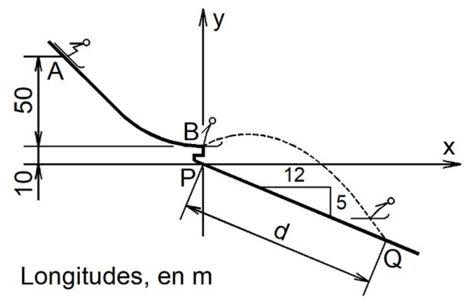
```
ec1 = vrf == vR
resp1 = Solve[ec1]
v0sol = v0 /. resp1[[2]]
tf = t /. resp1[[2]]
```

Vector velocidad del proyectil cuando impacta en el blanco:

```
vV = vv0 + {0, -g t}
vvf = vV /. {v0 → v0sol, t → tf}
```

Ejercicio 19

En los Juegos Olímpicos de invierno Beijing 2022, un competidor de la prueba de salto de esquí trampolín largo individual masculino, inició su descenso desde el punto A del reposo y se impulsó justo en el punto B, tal como se muestra en la figura.
Si se desprecia la resistencia del aire, determine la distancia d a la que aterrizó el esquiador en el punto Q, si la velocidad en el punto de despegue fue $\overline{v_B} = \{30, 4\}\ \frac{m}{s}$.



Este problema se puede resolver con la obtención del punto de intersección Q de la trayectoria del equiador y la ecuación de la rampa de aterrizaje.

La trayectoria del equiador es la ecuación cartesiana que se obtiene a partir del vector de posición del esquiador, con base en las condiciones iniciales, que son:

$$\overline{r_B} = \{0, 10\}\ \text{m}$$
$$\overline{v_B} = \{30, 4\}\ \frac{m}{s}$$

De donde:

$$\overline{r} = \{30\ \text{t}, -\tfrac{1}{2}\, g\, t^2 + 4\, t + 10\}$$

Dado que:

$$\overline{r} = \{\text{x}, \text{y}\}$$
$$\{\text{x}, \text{y}\} = \{30\ \text{t}, -\tfrac{1}{2}\, g\, t^2 + 4\, t + 10\}$$

Entonces, se pueden establecer las siguientes ecuaciones paramétricas de la trayectoria del equiador:

$$\text{x} = 30\ \text{t} \qquad (1)$$
$$\text{y} = -\tfrac{1}{2}\, g\, t^2 + 4\, t + 10 \qquad (2)$$

De 1 se despeja t:

$$30\ \text{t} = \text{x}$$
$$\text{t} = \frac{x}{30}$$

Se sustituye t en 2:

$$\text{y} = -\tfrac{1}{2}\ (9.81)\left(\frac{x}{30}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{30}\right) + 10$$
$$\text{y} = -4.905\left(\frac{x^2}{900}\right) + 0.1333\, x + 10$$
$$\text{y} = -0.00545\, x^2 + 0.1333\, x + 10 \qquad (3)$$

que es la ecuación de la trayectoria del esquiador.

La rampa de aterrizaje es una recta cuya pendiente es:

$\Delta y = -5$

$\Delta x = 12$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m = -\frac{5}{12}$

Por consiguiente, la ecuación de la rampa de aterrizaje es:

$$y = -\frac{5}{12}\, x \qquad (4)$$

Entonces, el punto Q en donde aterriza el esquiador es la intersección de las ecuaciones 3 y 4:

$-0.00545\, x^2 + 0.1333\, x + 10 = -\frac{5}{12}\, x$

$0.00545\, x^2 - 0.1333\, x - 0.4167\, x - 10 = 0$

$0.00545\, x^2 - 0.55\, x - 10 = 0$

Se normaliza la ecuación luego de dividir todos los términos por 0.00545:

$\frac{0.00545}{0.00545}\, x^2 - \frac{0.55}{0.00545}\, x - \frac{10}{0.00545} = \frac{0}{0.00545}$

$x^2 - 100.9 - 1835 = 0$

Se aplica la fórmula del “chicharronero” simplificado:

$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

$x_{1,2} = -\frac{(-100.9)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100.9}{2}\right)^2 + 1835}$

$x_{1,2} = 50.45 \pm \sqrt{2546 + 1835}$

$x_{1,2} = 50.45 \pm \sqrt{4381}$

$x_{1,2} = 50.45 \pm 66.19$

Se toma la raíz positiva:

$x_1 = 50.45 + 66.19$

$x_1 = 116.6$ m

Se sustituye el valor obtenido en 4, para obtener la ordenada de Q:

$y_1 = -\frac{5}{12}\,(116.6)$

$y_1 = -48.60$

$y_1 = -48.60$ m

Por tanto, la distancia d a la que aterriza el esquiador es la distancia entre el punto P(0, 0) y el punto Q(116.6, -48.60):

$d = |\,\overline{PQ}\,|$

$\overline{PQ} = \overline{Q} - \overline{P}$

$\overline{PQ} = \{116.6, -48.60\} - \{0, 0\}$

$\overline{PQ} = \{116.6 - 48.60\}$

La magnitud del vector anterior es la distancia buscada:

$|\,\overline{PQ}\,| = \sqrt{116.6^2 + (-48.60)^2}$

$|\,\overline{PQ}\,| = \sqrt{13\,605 + 2362}$

$|\,\overline{PQ}\,| = \sqrt{15\,967}$

$|\,\overline{PQ}\,| = 126.4$ m

Por tanto, la distancia es:

d = 126.4 m

La distancia d a la que aterrizó el esquiador en el punto Q es:

d = 126.4 m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
vr0 = {0, 10};
vv0 = {30, 4};
g = 9.81;
P = {0, 0};
```

Vector de posición del proyectil:

```
vR = {0, -1/2 g t^2} + vv0 t + vr0
```

Ecuación de la rampa de aterrizaje:

```
Δx = 12;
Δy = -5;
mG = Δy/Δx
ec1 = y == mG x
```

Obtención del punto de intersección Q:

```
ec2 = {x, y} == vR
resp2 = Solve[{ec1, ec2}]
xSol = x /. resp2[[2]]
ySol = y /. resp2[[2]]
```

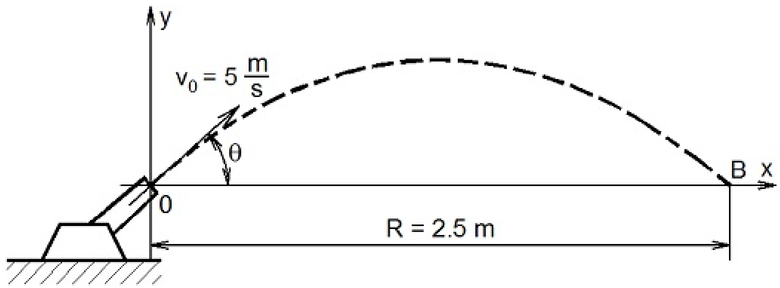
Distancia d a la que aterriza el esquiador en el punto Q:

```
Q = {xSol, ySol}
PQ = Q - P
d = Norm [PQ]
```

Ejercicio 20

En la figura se muestra la colocación de un cañón del que sale un proyectil con una masa de 0.2 kg y una rapidez de 5 $\frac{m}{s}$.

Si el proyectil tiene un alcance R = 2.5 m, determine el ángulo de tiro θ necesario para que se cumpla y obtenga la altura máxima que alcanza.



Las expresiones de las coordenadas de posición del proyectil son:

$$x = v_0 \text{ t Cos } [\theta]$$
$$y = v_0 \text{ t Sin } [\theta] - \frac{1}{2} g\, t^2$$

Luego de sustituir los valores conocidos, se obtiene:

$$x = 5 \text{ t Cos } [\theta]$$
$$y = 5 \text{ t Sin } [\theta] - 4.905\, t^2$$

De la primera ecuación se despeja t y se sustituye en la segunda:

$$5 \text{ t Cos } [\theta] = x$$
$$t = \frac{x}{5 \text{ Cos } [\theta]}$$
$$y = 5 \left(\frac{x}{5 \text{ Cos } [\theta]}\right) \text{Sin } [\theta] - 4.905 \left(\frac{x}{5 \text{ Cos } [\theta]}\right)^2$$
$$y = x\, \frac{\text{Sin } [\theta]}{\text{Cos } [\theta]} - 4.905 \left(\frac{x^2}{25 \text{ Cos}^2 [\theta]}\right)$$

Dado que se desea que el proyectil pase por el punto B(R, 0), es decir, $x_B = 2.5$ para $y_B = 0$:

$$0 = 2.5\, \frac{\text{Sin } [\theta]}{\text{Cos } [\theta]} - 0.1962 \left(\frac{(2.5)^2}{\text{Cos}^2 [\theta]}\right)$$
$$2.5\, \frac{\text{Sin } [\theta]}{\text{Cos } [\theta]} = 0.1962 \left(\frac{(2.5)^2}{\text{Cos}^2 [\theta]}\right)$$
$$\frac{\text{Sin } [\theta]}{\text{Cos } [\theta]} \text{ Cos}^2 [\theta] = 0.1962\, \frac{(2.5)^2}{2.5}$$
$$\frac{\text{Sin } [\theta]}{\text{Cos } [\theta]} \text{ Cos}^2 [\theta] = 0.1962\, (2.5)$$
$$\text{Sin } [\theta] \text{ Cos } [\theta] = 0.4905$$

Ya que:

$$\text{Sin } [2\theta] = 2 \text{ Sin } [\theta] \text{ Cos } [\theta]$$

Entonces:

$$2 \text{ Sin } [\theta] \text{ Cos } [\theta] = \text{Sin } [2\theta]$$
$$\text{Sin } [\theta] \text{ Cos } [\theta] = \frac{1}{2} \text{ Sin } [2\theta]$$

De donde:

$\frac{1}{2}$ Sin $[2\theta] = 0.4905$

Sin $[2\theta] = 2\ (0.4905)$

Sin $[2\theta] = 0.981$

Se aplica la función inversa del seno de un ángulo, arco seno, a ambos miembros de la ecuación:

ArcSin {Sin $[2\theta]$} = ArcSin $[0.981]$

$2\theta = 78.81°$

$\theta = \frac{78.81°}{2}$

$\theta = 39.41°$

El ángulo θ necesario para que el proyectil tenga un alcance R = 2.5 m es:

$\theta = 39.41°$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos

```
m = 0.2;
v0 = 5;
R = 2.5;
g = 9.81;
```

Expresiones posición del proyectil:

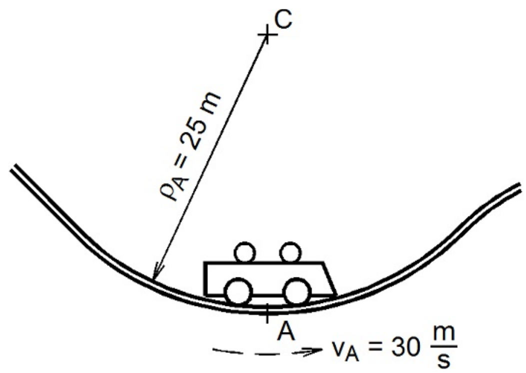
```
x = v0 t Cos[θ]
y = v0 t Sin[θ] - 1/2 g t^2
```

Resolución ecuaciones posición final del proyectil:

```
ec1 = x == R
ec2 = y == 0
resp2 = Solve[{ec1, ec2}]
θsol = θ /. resp2[[3]]
θdeg = θsol/°
```

Ejercicio 21

El carro de una montaña rusa tiene una rapidez $v_A = 30\ \frac{m}{s}$ cuando se encuentra en la parte más baja de su recorrido, punto A, en donde el radio de curvatura es $\rho_A = 25$ m, tal como se muestra en la figura.



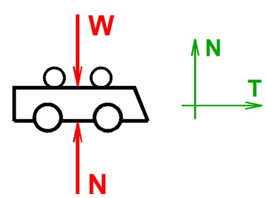
Si la masa del carro con todo y pasajeros es de 200 kg, determine en dicha posición:

a) la aceleración del carro;

b) la fuerza normal que ejerce el riel sobre el carro.

a) la aceleración del carro

Para determinar la aceleración del carro, primero se traza su diagrama de cuerpo libre, en la posición de interés, cuando se encuentra en el punto A:



Para la representación vectorial de las fuerzas involucradas, se establece que la primera componente es la tangencial y la segunda componente la normal:

$$\overline{N} = \{0, \text{N}\}$$
$$\overline{W} = \{0, -\text{m g}\}$$

Luego, se aplica la segunda ley de Newton:

$$\overline{N} + \overline{W} = \text{m}\ \{a_T,\ a_N\}$$
$$\{0, \text{N}\} + \{0, -200\ (9.81)\} = 200\ \{a_{T,A},\ a_{N,A}\}$$
$$\{0, \text{N} - 1962\} = 200\ \{a_{T,A},\ a_{N,A}\}$$

De donde:

$$0 = 200\ a_{T,A}$$
$$a_{T,A} = 0$$
$$\text{N} - 1962 = 200\ a_{N,A}$$

La aceleración normal en el punto A es:

$$a_{N,A} = \frac{v_A^2}{\rho_A}$$

$$a_{N,A} = \frac{(30)^2}{25}$$

$$a_{N,A} = \frac{900}{25}$$

$$a_{N,A} = 36\ \frac{m}{s^2}$$

Por consiguiente:

$$\overline{a_A} = \{a_{T,A},\ a_{N,A}\}$$

$$\overline{a_A} = \{0, 36\}\ \frac{m}{s^2}$$

En el punto A, la aceleración solo tiene componente normal:

$$\overline{a_A} = \{0, 36\}\ \frac{m}{s^2}$$

b) la fuerza normal que ejerce el riel sobre el carro

Para determinar la fuerza normal que ejerce el riel sobre el carro, se despeja de la segunda ecuación escalar de movimiento anterior:

$$N_A - 1962 = 200\ a_{N,A}$$

$$N_A = 200\ (36) + 1962$$

$$N_A = 7200 + 1962$$

$$N_A = 9162\ \text{N}$$

La fuerza normal que ejerce el riel sobre el carro es:

$$N_A = 9162\ \text{N}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
vA = 30;
ρA = 25;
m = 200;
g = 9.81;
```

a) la aceleración del carro

Representación vectorial de las fuerzas involucradas:

```
vNA = {0, NA}
vW = {0, -m g}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vNA + vW == m {aTA, aNA}
resp1 = Solve[ec1, {aTA, NA}]
aTAsol = aTA /. resp1⟦1⟧
NAsol = NA /. resp1⟦1⟧
```

Cálculo de la aceleración del carro:

$$aNA = \frac{vA^2}{\rho A}$$

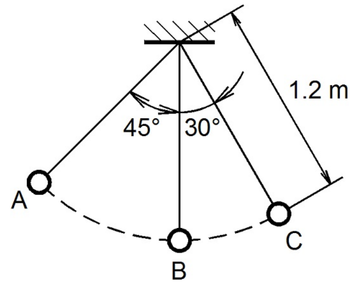
```
aA = {aTAsol, aNA}
```

b) la fuerza normal que ejerce el riel sobre el carro

```
NAresp = NAsol
```

Ejercicio 22

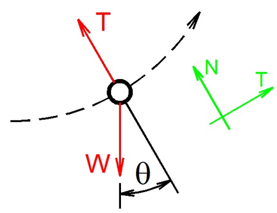
La péndola de un péndulo simple que tiene una masa de 0.2 kg, se suelta del reposo desde la posición A mostrada en la figura.
Determine en los puntos B y C:



a) la rapidez de la péndola;
b) la magnitud de la tensión en la cuerda; y
c) la aceleración de la péndola.

a) la rapidez de la péndola

Para determinar la rapidez de la péndola, ante todo se dibuja su diagrama de cuerpo libre en una posición intermedia, considerando que se mueve hacia la derecha.
Se considera que el ángulo θ se mide con respecto a la vertical hacia abajo a partir del punto donde la cuerda está amarrada al techo. Los ángulos medidos en sentido antihorario son positivos y, por consiguiente, si se miden en sentido horario, son negativos.
Para evitar problemas con los signos, la posición angular de la péndola debe ser tal que su ángulo sea positivo con respecto a la referencia establecida, en este caso a la derecha de la vertical:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan, considerando que la primera componente es la tangencial y la segunda componente la normal:

$\overline{T}$ = {0, T}
$\overline{W}$ = m g {-Sin [θ], -Cos [θ]}
$\overline{W}$ = 0.2 (9.81) {-Sin [θ], -Cos [θ]}
$\overline{W}$ = 1.962 {-Sin [θ], -Cos [θ]}
$\overline{W}$ = {-1.962 Sin [θ], -1.962 Cos [θ]}

Se aplica la segunda ley de Newton:

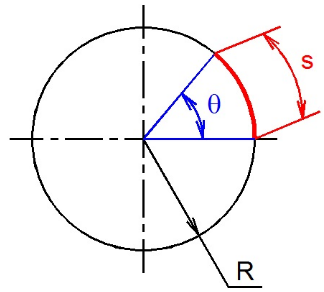
$\overline{T}$ + $\overline{W}$ = m {a_T, a_N}
{0, T} + {-1.962 Sin [θ], -1.962 Cos [θ]} = 0.2 {a_T, a_N}
{-1.962 Sin [θ], T - 1.962 Cos [θ]} = 0.2 {a_T, a_N}

De donde se pueden establecer dos ecuaciones escalares:

$-1.962 \text{ Sin}[\theta] = 0.2\, a_T$

$T - 1.962 \text{ Cos}[\theta] = 0.2\, a_N$

En este caso el movimiento de la péndola es circular, por lo que puede establecerse la aceleración tangencial, a_T, con base en la expresión para el cálculo de la longitud de arco de circunferencia, s, de radio R, con respecto al ángulo que lo subtiende, θ:



La longitud de arco es:

$s = R\,\theta$

La derivada con respecto al tiempo de la longitud de arco, s, es la rapidez, v:

$v = \frac{ds}{dt}$

Dado que R es constante:

$v = R\,\frac{d\theta}{dt}$

A la derivada del ángulo, θ, con respecto al tiempo se le conoce como rapidez angular, ω:

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Entonces:

$v = R\,\omega$

A la derivada de la rapidez, v, con respecto al tiempo es la aceleración tangencial, a_T:

$a_T = \frac{dv}{dt}$

$a_T = R\,\frac{d\omega}{dt}$

La derivada de la rapidez angular, ω, con respecto al tiempo se le denomina aceleración angular, α:

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Por consiguiente:

$a_T = R\,\alpha$

Recordando la definición alternativa de la aceleración lineal:

$a = v\,\frac{dv}{dx}$

De manera similar, la aceleración angular puede definirse con base en la rapidez angular, ω, y la posición angular, θ:

$\alpha = \omega\,\frac{d\omega}{d\theta}$

Por tanto, la ecuación de movimiento que corresponde a la aceleración tangencial:

$-1.962 \text{ Sin}[\theta] = 0.2\, a_T$

$0.2\, a_T = -1.962 \text{ Sin}[\theta]$

$a_T = -\frac{1.962}{0.2} \text{ Sin}[\theta]$

$a_T = -9.81 \text{ Sin}[\theta]$

Sustituyendo la definición de aceleración tangencial:

$R\,\alpha = -9.81\,\text{Sin}[\theta]$

Y la definición alternativa de aceleración angular:

$1.2\,\omega\,\frac{d\omega}{d\theta} = -9.81\,\text{Sin}[\theta]$

Se separan variables:

$1.2\,\omega\,d\omega = -9.81\,\text{Sin}[\theta]\,d\theta$

Se integran ambos miembros, con base en las condiciones iniciales, para $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\omega = 0$:

$\int_0^{\omega} 1.2\,\omega\,d\omega = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\theta} -9.81\,\text{Sin}[\theta]\,d\theta$

$\frac{1}{2}\,1.2\,\omega^2\,\Big]_0^{\omega} = 9.81\,\text{Cos}[\theta]\,\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\theta}$

$0.6\,\omega^2 - 0.6\,(0)^2 = 9.81\,\text{Cos}[\theta] - \{9.81\,\text{Cos}\left[-\frac{\pi}{4}\right]\}$

$0.6\,\omega^2 = 9.81\,\text{Cos}[\theta] - 9.81\,(0.7071)$

$0.6\,\omega^2 = 9.81\,\text{Cos}[\theta] - 6.937$

$\omega^2 = \frac{9.81}{0.6}\,\text{Cos}[\theta] - \frac{6.937}{0.6}$

$\omega = \sqrt{16.35\,\text{Cos}[\theta] - 11.56}$

En el punto B, $\theta = 0$, por tanto:

$\omega_B = \sqrt{16.35\,\text{Cos}[0] - 11.56}$

$\omega_B = \sqrt{16.35\,(1) - 11.56}$

$\omega_B = \sqrt{4.79}$

$\omega_B = 2.189\,\frac{\text{rad}}{s}$

Por tanto:

$v_B = R\,\omega_B$

$v_B = 1.2\,(2.189)$

$v_B = 2.626\,\frac{m}{s}$

Para el punto C, $\theta = 30°$, por lo que:

$\omega_C = \sqrt{16.35\,\text{Cos}[30°] - 11.56}$

$\omega_C = \sqrt{16.35\,(0.866) - 11.56}$

$\omega_C = \sqrt{14.16 - 11.56}$

$\omega_C = \sqrt{2.60}$

$\omega_C = 1.612\,\frac{\text{rad}}{s}$

Entonces:

$v_C = 1.2\,(1.612)$

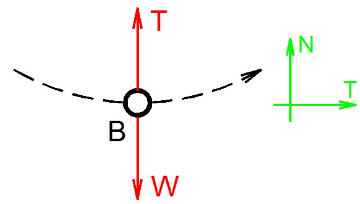
$v_C = 1.935\,\frac{m}{s}$

La rapidez de la partícula en los puntos B y C son, respectivamente:

$v_B = 2.626\,\frac{m}{s}$ y $v_C = 1.935\,\frac{m}{s}$.

b) la magnitud de la tensión en la cuerda

Para determinar la tensión en la cuerda, se requiere dibujar el diagrama de cuerpo libre de la péndola en cada una de las posiciones en las que se solicita.
En el punto B, el diagrama de cuerpo libre es:



Con base en el diagrama de cuerpo libre anterior, la representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre la partícula en la posición B es:

$\overline{T_B} = \{0, T_B\}$

$\overline{W_B} = \{0, \text{-m g}\}$

$\overline{W_B} = \{0, -0.2\ (9.81)\}$

$\overline{W_B} = \{0, -1.962\}$

Con base en la segunda ley de Newton, se puede establecer para la posición B la siguiente expresión:

$\overline{T_B} + \overline{W_B} = \text{m}\ \overline{a_B}$

$\{0, T_B\} + \{0, -1.962\} = \text{m}\ \{a_{T,B},\ a_{N,B}\}$

$\{0, T_B - 1.962\} = 0.2\ \{a_{T,B},\ a_{N,B}\}$

$0 = 0.2\ a_{T,B}$

$a_{T,B} = 0$

$T_B - 1.962 = 0.2\ a_{N,B}$

Dado que:

$a_{N,B} = \frac{v_B^2}{R}$

$a_{N,B} = \frac{(2.626)^2}{1.2}$

$a_{N,B} = \frac{6.896}{1.2}$

$a_{N,B} = 5.747\ \frac{m}{s^2}$

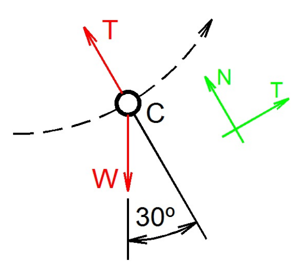
De donde la tensión en la cuerda es:

$T_B - 1.962 = 0.2\ (5.747)$

$T_B = 1.149 + 1.962$

$T_B = 3.111\ \text{N}$

En el punto C, el diagrama de cuerpo libre es:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre la péndola en C es:

$\overline{T_C} = \{0, T_C\}$

$\overline{W_C} = 1.962\ \{\text{-Sin}\ [30°], \text{-Cos}\ [30°]\}$

$\overline{W_C} = 1.962\ \{-0.5, -0.866)\}$

$\overline{W_C} = \{-0.981, -1.699\}$

Se aplica la segunda ley de Newton para la posición C:

$\overline{T_C} + \overline{W_C} = \text{m}\ \overline{a_C}$

$\{0, T_C\} + \{-0.981, -1.699\} = 0.2\left\{a_{T,C},\ a_{N,C}\right\}$

$\{-0.981, T_C - 1.699\} = 0.2\left\{a_{T,C},\ a_{N,C}\right\}$

$-0.981 = 0.2\ a_{T,C}$

$T_C - 1.699 = 0.2\ a_{N,C}$

Dado que:

$a_{N,C} = \frac{v_C^2}{R}$

$a_{N,C} = \frac{(1.935)^2}{1.2}$

$a_{N,C} = \frac{3.742}{1.2}$

$a_{N,C} = 3.118\ \frac{m}{s^2}$

Por tanto la tensión en la cuerda es:

$T_C - 1.699 = 0.2\ (3.118)$

$T_C = 0.6236 + 1.699$

$T_C = 2.323\ \text{N}$

La magnitud de la fuerza de tensión en la cuerda en las posiciones B y C es:

$T_B = 3.111\ \text{N}$ y $T_C = 2.323\ \text{N}$.

c) la aceleración de la péndola

En el inciso anterior se tienen las expresiones para el cálculo de la aceleración tangencial, así como los valores de la aceleración normal de la péndola en las posiciones establecidas.

Para la posición B se tiene que:

$a_{T,B} = 0$

$a_{N,B} = 5.747\ \frac{m}{s^2}$

Entonces, la aceleración total de la péndola en la posición B es:

$\overline{a_B} = \{a_{T,B},\ a_{N,B}\}$

$\overline{a_B} = \{0, 5.747\}\ \frac{m}{s^2}$

Con respecto a la posición C:

$-0.981 = 0.2\ a_{T,C}$

$0.2\ a_{T,C} = -0.981$

$a_{T,C} = -\frac{0.981}{0.2}$

$a_{T,C} = -4.905\ \frac{m}{s^2}$

Por otra parte se obtuvo que:

$a_{N,C} = 3.118\ \frac{m}{s^2}$

De donde la aceleración total de la péndola en C es:

$\overline{a_C} = \{-4.905, 3.118\}\ \frac{m}{s^2}$

La aceleración de la péndola en las posiciones B y C es:

$\overline{a_B} = \{0, 5.747\}\ \frac{m}{s^2}$ y $\overline{a_C} = \{-4.905, 3.118\}\ \frac{m}{s^2}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
m = 0.2;
g = 9.81;
R = 1.2;
θA = -45 °;
θB = 0;
θC = 30 °;
```

a) la rapidez de la péndola

Representación vectorial de las fuerzas y aplicación de la segunda ley de Newton:

```
vT = {0, T}
vW = m g {-Sin[θ], -Cos[θ]}
ec1 = vT + vW == m {aT, aN}
resp1 = Solve[ec1, {aT, T}]
aTsol = aT /. resp1[[1]]
Tsol = T /. resp1[[1]]
```

Definición alternativa de aceleración angular y solución de la ecuación diferencial:

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

```
ec2 = R α == aTsol
ec3 = R ω dω == aTsol dθ
```

$$ec4 = \int_0^{\omega} R\,\omega\,d\omega == \int_{\theta A}^{\theta} aTsol\,d\theta$$

```
resp4 = Solve[ec4, ω]
ωSol = ω /. resp4[[2]]
```

Cálculo de la rapidez de la péndola en los puntos B y C:

```
ωB = ωSol /. θ → θB
vB = R ωB
ωC = ωSol /. θ → θC
vC = R ωC
```

b) la magnitud de la tensión en la cuerda

En la posición B:

$$aNB = \frac{vB^2}{R}$$

```
TB = Tsol /. {θ → θB, aN → aNB}
```

En la posición C:

$$aNC = \frac{vC^2}{R}$$

```
TC = Tsol /. {θ → θC, aN → aNC}
```

c) la aceleración de la péndola

En la posición B:

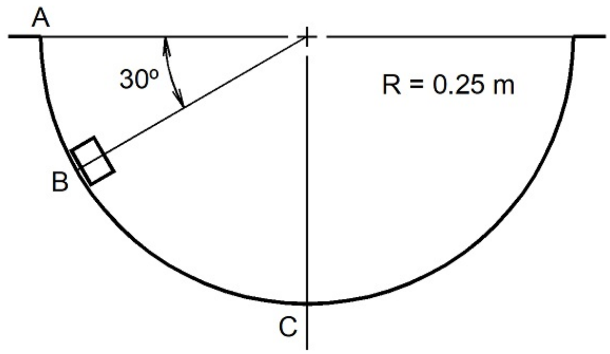
```
aTB = aTsol /. θ → θB
aB = {aTB, aNB}
```

En la posición C:

```
aTC = aTsol /. θ → θC
aC = {aTC, aNC}
```

Ejercicio 23

La partícula de la figura, que tiene un peso de W = 12 N, se mueve en un plano vertical sobre la superficie lisa mostrada.

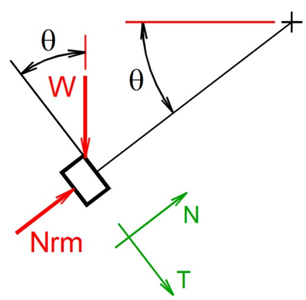


Si dicha partícula se suelta en A, determine:

a) su aceleración (vector) al pasar por los puntos B y C;

b) la magnitud de la fuerza que ejerce la superficie sobre la partícula en los puntos B y C.

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la partìcula, en una posiciòn intermedia, en térmi nos de un àngulo variable θ:



Luego, se obtiene la representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre la partícula, considerando que la primera componente es la tangencial y la segunda la normal:

$\overline{N}$ = {0, Nrm}

$\overline{W}$ = W {Cos [θ], -Sin [θ]}

$\overline{W}$ = {W Cos [θ], -W Sin [θ]}

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{N}$ + $\overline{W}$ = m {a_T, a_N}

{0, Nrm} + {W Cos [θ], -W Sin [θ]} = $\frac{W}{g}$ {a_T, a_N}

{W Cos [θ], Nrm - W Sin [θ]} = $\frac{W}{g}$ {a_T, a_N}

De donde se establecen las siguientes ecuaciones escalares:

$W \operatorname{Cos}[\theta] = \frac{W}{g}\, a_T$

$\frac{1}{g}\, a_T = \operatorname{Cos}[\theta]$

$a_T = g \operatorname{Cos}[\theta]$

$Nrm - W \operatorname{Sin}[\theta] = \frac{W}{g}\, a_N$

$\frac{W}{g}\, a_N = Nrm - W \operatorname{Sin}[\theta]$

$a_N = \frac{g}{W}\, Nrm - g \operatorname{Sin}[\theta]$

a) su aceleración (vector) al pasar por los puntos B y C

Para obtener la aceleración tangencial de la partícula, sólo se requiere sustituir el valor del ángulo θ en la expresión obtenida previamente.
Sin embargo, para el cálculo de la aceleración normal, dado que no se conoce la magnitud de la normal, se requiere determinarlo por medio de su definición:

$a_N = \omega^2 R$

Para obtener la rapidez de la partícula en los puntos considerados, se requiere resolver la ecuación diferencial de la ecuación de la aceleración tangencial. Dado que:

$a_T = \alpha R$

y

$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

Entonces:

$R\, \omega \frac{d\omega}{d\theta} = g \operatorname{Cos}[\theta]$

De donde:

$R\, \omega\, d\omega = g \operatorname{Cos}[\theta]\, d\theta$

Las condiciones iniciales del movimiento de la partícula son:

$\theta = 0,\ \omega = 0$

Ya que en la posición del punto A, para el cual $\theta = 0$, se suelta desde el reposo.
Por consiguiente:

$\int_0^{\omega} R\, \omega\, d\omega = \int_0^{\theta} g \operatorname{Cos}[\theta]\, d\theta$

$\frac{1}{2} R\, \omega^2 \Big]_0^{\omega} = g \operatorname{Sin}[\theta] \Big]_0^{\theta}$

$\frac{1}{2} R\, \omega^2 - \frac{1}{2} R\, (0)^2 = g \operatorname{Sin}[\theta] - g \operatorname{Sin}[0]$

$\frac{1}{2} R\, \omega^2 = g \operatorname{Sin}[\theta]$

Por tanto:

$\omega^2 = \frac{2g}{R} \operatorname{Sin}[\theta]$

Aceleración en el punto B

Para el punto B, donde $\theta_B = 30°$, de donde la aceleración tangencial de la partícula es:

$a_{T,B} = g \operatorname{Cos}[\theta_B]$

Con base en los valores proporcionados:

$a_{T,B} = 9.81\ \text{Cos}[30°]$

$a_{T,B} = 9.81\ (0.8660)$

$a_{T,B} = 8.495\ \frac{m}{s^2}$

Para calcular su aceleración normal, primero se obtiene el valor de la rapidez angular al cuadrado:

$\omega_B^2 = \frac{2\,g}{R}\ \text{Sin}[\theta_B]$

luego de sustituir los valores conocidos:

$\omega_B^2 = \frac{2\,(9.81)}{0.25}\ \text{Sin}[30°]$

$\omega_B^2 = \frac{19.62}{0.25}\ (0.5)$

$\omega_B^2 = 39.24$

Luego, se sustituye este resultado en la expresión de la aceleración normal:

$a_{N,B} = \omega_B^2\ \text{R}$

$a_{N,B} = (39.24)\ (0.25)$

$a_{N,B} = 9.81\ \frac{m}{s^2}$

Entonces, la aceleración de la partícula en el punto B es:

$\overline{a_B} = \{8.495, 9.81\}\ \frac{m}{s^2}$

Cuya magnitud es:

$|\ \overline{a_B}\ | = \sqrt{(8.495)^2 + (9.81)^2}$

$|\ \overline{a_B}\ | = \sqrt{72.17 + 96.24}$

$|\ \overline{a_B}\ | = \sqrt{168.4}$

$|\ \overline{a_B}\ | = 12.98\ \frac{m}{s^2}$

En el punto C, dado que $\theta_C = 90°$:

$a_{T,C} = \text{g Cos}[90\ °]$

$a_{T,C} = 9.81\ (0)$

$a_{T,C} = 0$

Y la aceleración normal es:

$\omega_C^2 = \frac{2\,g}{R}\ \text{Sin}[\theta_C]$

$\omega_C^2 = \frac{19.62}{0.25}\ \text{Sin}[90°]$

$\omega_C^2 = 78.48\ (1)$

De donde:

$a_{N,C} = \omega_C^2\ \text{R}$

$a_{N,C} = 78.48\ (0.25)$

$a_{N,C} = 19.62\ \frac{m}{s^2}$

La aceleración de la partícula en el punto C es:

$\overline{a_C} = \{0, 19.62\}\ \frac{m}{s^2}$

Cuya magnitud es:

$|\overline{a_C}| = 19.62\ \frac{m}{s^2}$

La aceleración (vector) de la partícula en los puntos B y C es:

$\overline{a_B} = \{8.495, 9.81\}\ \frac{m}{s^2}$ y $\overline{a_C} = \{0, 19.62\}\ \frac{m}{s^2}$.

b) la magnitud de la fuerza que ejerce la superficie sobre la partícula en los puntos B y C

En el diagrama de cuerpo libre de la partícula se puede verificar que la única fuerza que ejerce la superficie sobre la partícula es la fuerza normal, $\overline{N}$.

Su magnitud se puede obtener a partir de la expresión para la aceleración normal:

$a_N = \frac{g}{W}\ \mathrm{Nrm} - \mathrm{g\ Sin}[\theta]$

$\frac{g}{W}\ \mathrm{Nrm} = a_N + \mathrm{g\ Sin}[\theta]$

$\mathrm{Nrm} = \frac{W}{g}\ a_N + \mathrm{W\ Sin}[\theta]$

Para el punto B, donde $\theta_B = 30°$:

$\mathrm{Nrm}_B = \frac{W}{g}\ a_{N,B} + \mathrm{W\ Sin}[\theta_B]$

$\mathrm{Nrm}_B = \frac{12}{9.81}\ (9.81) + 12\ \mathrm{Sin}[30°]$

$\mathrm{Nrm}_B = 12 + 12\ (0.5)$

$\mathrm{Nrm}_B = 12 + 6$

$\mathrm{Nrm}_B = 18\ \mathrm{N}$

Para el punto C, donde $\theta_B = 90°$:

$\mathrm{Nrm}_C = \frac{W}{g}\ a_{N,C} + \mathrm{W\ Sin}[\theta_C]$

$\mathrm{Nrm}_C = \frac{12}{9.81}\ (19.62) + 12\ \mathrm{Sin}[90°]$

$\mathrm{Nrm}_C = 24 + 12\ (1)$

$\mathrm{Nrm}_C = 36\ \mathrm{N}$

La magnitud de la fuerza normal en los puntos B y C es:

$\mathrm{Nrm}_B = 18\ \mathrm{N}$ y $\mathrm{Nrm}_C = 36\ \mathrm{N}$.

Resolución del problema con funciones de Mahematica

Datos:

```
W = 12;
g = 9.81;
R = 0.25;
θB = 30 °;
θC = 90 °;
m = W/g
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre la partícula:

```
vW = W {Cos[θ], -Sin[θ]}
vN = {0, Nrm}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton

```
ec1 = vW + vN == m {aT, aN}
resp1 = Solve[ec1, {aT, Nrm}]
aTsol = aT /. resp1[[1]]
Nsol = Nrm /. resp1[[1]]
```

a) su aceleración (vector) al pasar por los puntos B y C

$$aN = \omega^2 R$$

$$ec2 = aTsol == R\,\alpha$$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$ec3 = \int_0^{\omega} R\,\omega\, d\omega == \int_0^{\theta} aTsol\, d\theta$$

```
resp3 = Solve[ec3, ω]
ωSol = ω /. resp3[[2]]
```

En el punto B donde $\theta_B = 30°$:

```
aTB = aTsol /. θ → θB
aNB = (aN /. {ω → (ωSol /. θ → θB), θ → θB})
vaB = {aTB, aNB}
aB = Norm[vaB]
```

En el punto C donde $\theta_C = 90°$:

```
aTC = aTsol /. θ → θC
aNC = (aN /. {ω → (ωSol /. θ → θC), θ → θC})
vaC = {aTC, aNC}
aC = Norm[vaC]
```

b) la magnitud de la fuerza que ejerce la superficie sobre la partícula en los puntos B y C

```
NrmB = Nsol /. {ω → (ωSol /. θ → θB), θ → θB}
NrmC = Nsol /. {ω → (ωSol /. θ → θC), θ → θC}
```

Ejercicio 24

Un cuerpo de masa m = 2.4 kg descansa sobre una barra plana horizontal rugosa, tal como se muestra en la figura 1. La barra comienza a girar en el plano vertical alrededor de O con una aceleración constante de $\ddot{s} = 2\ \frac{m}{s^2}$ y se observa que la masa se empieza a deslizar respecto a la barra cuando está a $\theta = 15°$ abajo de la horizontal.
¿Cuál es el coeficiente de fricción estática, μ_s, entre la masa y la barra?

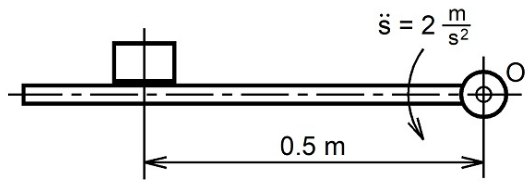
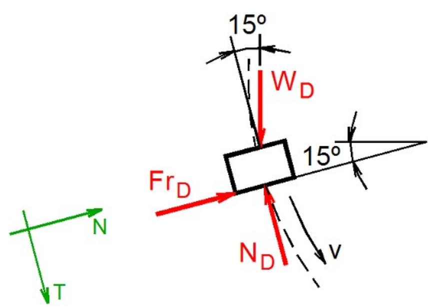


Figura 1 Cuerpo sobre una barra plana horizontal rugosa.

Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la masa en la posición D en la que la masa se empieza a deslizar, para $\theta = 15°$:



A continuación se obtiene la representación vectorial de las fuerzas que actúan en la masa, considerando que la primera componente es la tangencial y la segunda la componente normal:

$\overline{Fr_D} = \{0, Fr_D\}$

$\overline{N_D} = \{-N_D, 0\}$

$\overline{W_D} = m\ g\ \{Cos\ [15°], -Sin\ [15°]\}$

$\overline{W_D} = 2.4\ (9.81)\ \{0.9659, -0.2588\}$

$\overline{W_D} = \{22.74, -6.094\}$

Conviene hacer notar que la fuerza de fricción es hacia el centro de curvatura de la trayectoria, ya que la masa tiende a moverse hacia abajo a la izquierda, tanto por su componente normal del peso como por su tendencia a salirse de la trayectoria.
Asimismo, en este caso resulta que la fuerza de fricción tiene dirección normal, y la fuerza normal dirección tangencial a la trayectoria.
Es necesario conocer la rapidez de la masa en el punto en el que empieza a deslizarse, para determinar la fuerza de fricción, que está en función de la aceleración normal, que a su vez depende de dicha rapidez.
Por consiguiente, se aplica la segunda ley de Newton a esta masa:

$\overline{Fr_D} + \overline{N_D} + \overline{W_D} = m\ \{a_{T,D}, a_{N,D}\}$

$\{0, Fr_D\} + \{-N_D, 0\} + \{22.74, -6.094\} = 2.4\ \{a_{T,D}, a_{N,D}\}$

$\{22.74 - N_D, Fr_D - 6.094\} = 2.4\ \{a_{T,D}, a_{N,D}\}$

De la ecuación vectorial anterior se obtienen las siguientes expresiones escalares:

$$22.74 - N_D = 2.4\, a_{T,D}$$

$$Fr_D - 6.094 = 2.4\, a_{N,D}$$

A partir de la primera se puede obtener la magnitud de la fuerza normal:

$$N_D = 22.74 - 2.4\, a_{T,D}$$

La aceleración tangencial es constante e igual a:

$$a_{T,D} = \ddot{s}$$

$$a_{T,D} = 2\, \frac{m}{s^2}$$

Por tanto:

$$N_D = 22.74 - 2.4\,(2)$$

$$N_D = 22.74 - 4.8$$

$$N_D = 17.94\text{ N}$$

Para determinar el valor de la aceleración normal, $a_{N,D}$, se puede obtener la rapidez de la masa con base en la aceleración tangencial:

$$a_{T,D} = \alpha\, \text{R}$$

Donde:

$$a_{T,D} = 2\, \frac{m}{s^2}$$

$$\text{R} = 0.5\text{ m}$$

Por lo que:

$$0.5\,\alpha = 2$$

$$\alpha = \frac{2}{0.5}$$

$$\alpha = 4$$

Como $\alpha = \omega\, \frac{d\omega}{d\theta}$

$$\omega\, \frac{d\omega}{d\theta} = 4$$

$$\omega\, d\omega = 4\, d\theta$$

Dado que para $\theta_0 = 0$, $v_0 = 0$:

$$v_0 = \omega_0\, \text{R}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}$$

$$\omega_0 = \frac{0}{0.5}$$

$$\omega_0 = 0\, \frac{\text{rad}}{s}$$

Entonces:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} 4\, d\theta$$

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,\Big]_0^{\omega} = 4\,\theta\,\Big]_0^{\theta}$$

$$\frac{1}{2}\,\omega^2 - \left[\frac{1}{2}\,(0)^2\right] = 4\,\theta - [4\,(0)]$$

$$\frac{1}{2}\,\omega^2 = 4\,\theta$$

En el punto D, $\theta_D = 15°$, que es equivalente a:

$$\theta_D = 15° \times \frac{\pi}{180°}$$

$$\theta_D = \frac{\pi}{12}$$

$$\omega_D^2 = 4\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\omega_D^2 = 1.047$$

Entonces, la aceleración normal en dicha posición es:

$$a_{N,D} = \omega_D^2\ \mathrm{R}$$

$$a_{N,D} = 1.047\ (0.5)$$

$$a_{N,D} = 0.5236\ \frac{m}{s^2}$$

Dado que se puede considerar que en dicho punto la masa está a punto de deslizarse con respecto a la barra, la fuerza de fricción es la estática límite o máxima, por consiguiente:

$$\mathrm{Fr}_D = \mu_s\ N_D$$

$$\mathrm{Fr}_D = 17.94\ \mu_s$$

Se sustituye esta expresión en la de la aceleración normal:

$$17.94\ \mu_s - 6.094 = 2.4\ a_{N,D}$$

De donde:

$$17.94\ \mu_s - 6.094 = 2.4\ a_{N,D}$$

$$17.94\ \mu_s = 2.4\ (0.5236) + 6.094$$

$$17.94\ \mu_s = 1.257 + 6.094$$

$$\mu_s = \frac{7.351}{17.94}$$

$$\mu_s = 0.4097$$

El coeficiente de fricción estática entre la masa y la barra es:

$\mu_s = 0.4097$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 2.4;
g = 9.81
aT = 2;
θD = 15 °;
R = 0.5;
θ0 = 0;
v0 = 0;
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en la masa en el punto D:

```
vFrD = {0, FrD}
vND = {-ND, 0}
vWD = m g {Cos[θD], -Sin[θD]}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vFrD + vND + vWD == m {aTD, aND}
aTD = aT;
resp1 = Solve[ec1, {FrD, ND}]
FrDsol = FrD /. resp1[[1]]
NDsol = ND /. resp1[[1]]
```

Cálculo de la aceleración normal:

```
ec2 = α R == aT
resp2 = Solve[ec2]
αSol = α /. resp2[[1]]
```

$$\omega 0 = \frac{v0}{R};$$

$$ec3 = \int_{\omega 0}^{\omega} \omega \, d\omega == \int_{\theta 0}^{\theta} \alpha Sol \, d\theta$$

```
resp3 = Solve[ec3, ω]
ωSol = ω /. resp3[[2]]
```

$$\theta Drad = \theta D \times \frac{\pi}{180\,°}$$

```
ωD = ωSol /. θ → θDrad
```

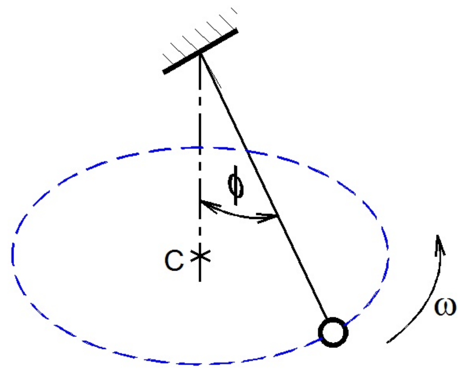
$$aND = \omega D^2 \, R$$

Cálculo del coeficiente de fricción estática:

```
ec4 = FrDsol == μs NDsol
resp4 = Solve[ec4]
μsSol = μs /. resp4[[1]]
```

Ejercicio 25

Una esfera de 2.5 N de peso que está amarrada a una cuerda de 0.8 m de longitud, se mueve con una trayectoria circular horizontal, tal como se muestra en la figura.



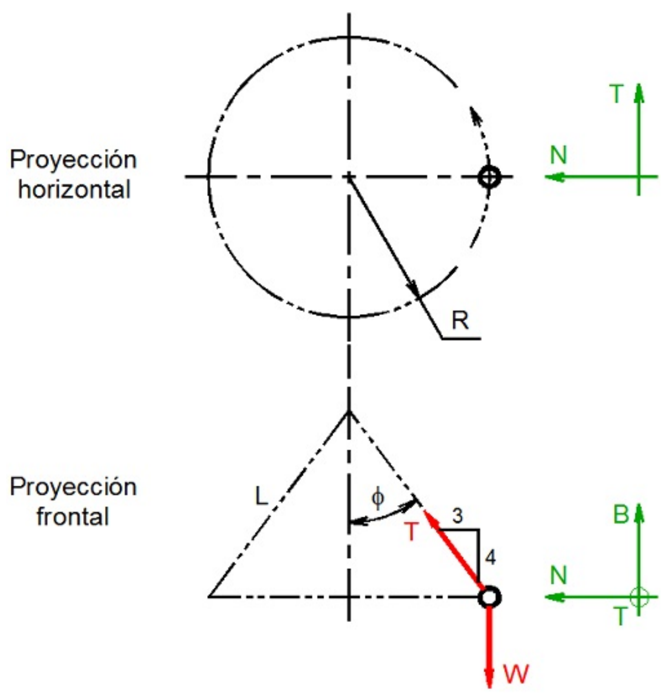
Si el ángulo ϕ que forma la cuerda con la vertical tiene una pendiente $\frac{4}{3}$, determine:

a) la tensión en la cuerda; y

b) la rapidez que debe tener la esfera.

Al conjunto de la cuerda y la esfera con movimiento circular horizontal se le conoce como péndulo cónico, debido a que la superficie generada por la cuerda con su movimiento corresponde a un cono circular recto.

Para comprender correctamente el movimiento y las fuerzas que actúan sobre la esfera, es conveniente dibujar el diagrama de cuerpo libre con base en sus proyecciones horizontal y frontal, tal como se muestra en seguida:



Conviene hacer énfasis en que el movimiento de la esfera es circular y ocurre en el plano horizontal, que corresponde a la base del cono y en el que los ejes de referencia son tangente-normal.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera se pueden visualizar en la proyección frontal, en el que los ejes de referencia son normal-binormal. En esta proyección, el eje tangente estaría apuntando hacia dentro del plano. Si dicho eje se ilustrara con una flecha, se vería su cola.

Para la representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre la esfera, la primera componente es la tangente, la segunda la normal y la tercera componente la binormal. Los vectores son:

$$\overline{W} = \{0, 0, -W\}$$

$$\overline{T} = T\left\{0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$$\overline{W} + \overline{T} = m\,\{a_T,\ a_N,\ 0\}$$

Aquí conviene hacer notar que el movimiento es horizontal, por lo que no existe movimiento en el eje binormal. Debido a ello, la aceleración binormal de la esfera es cero.

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\{0, 0, -2.5\} + \{0, \tfrac{3}{5}\,T,\ \tfrac{4}{5}\,T\} = \frac{2.5}{9.81}\,\{a_T,\ a_N,\ 0\}$$

$$\{0, \tfrac{3}{5}\,T, \tfrac{4}{5}\,T - 2.5\} = 0.2548\,\{a_T,\ a_N,\ 0\}$$

De la expresión anterior, se pueden obtener tres ecuaciones escalares:

$$0 = 0.2548\,a_T$$

$$\frac{3}{5}\,T = 0.2548\,a_N$$

$$\frac{4}{5}\,T - 2.5 = 0$$

a) la tensión en la cuerda

De la tercera ecuación, simplemente se despeja la magnitud de la tensión en la cuerda:

$$\frac{4}{5}\,T = 2.5$$

$$T = \frac{2.5\,(5)}{4}$$

$$T = 3.125\ \text{N}$$

La magnitud de la tensión en la cuerda es:

$$T = 3.125\ \text{N}.$$

b) la rapidez que debe tener la esfera

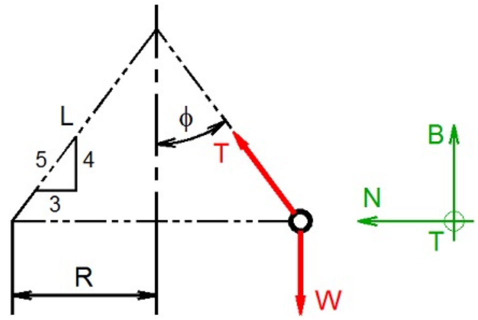
La rapidez de la esfera se puede obtener a partir de la segunda ecuación:

$$\frac{3}{5}\,T = 0.2548\,a_N$$

Dado que la aceleración normal es:

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

Para obtener el radio de la trayectoria, R, se analiza la proyección frontal del diagrama anterior:



El radio de la trayectoria se puede obtener con base en la longitud de la cuerda, L, y el teorema de la proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes:

$$\frac{R}{L} = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{R} = \frac{3}{5}\,\mathrm{L}$$

Por tanto:

$$\mathrm{R} = \frac{3}{5}\,(0.8)$$

$$\mathrm{R} = 0.48\ \mathrm{m}$$

Se sustituye el valor obtenido en el de la aceleración normal:

$$a_N = \frac{v^2}{0.48}$$

Y esta expresión, a su vez, se sustituye en la ecuación de movimiento, componente normal:

$$\frac{3}{5}\,T = 0.2548\,\frac{v^2}{0.48}$$

$$\frac{3}{5}\,(3.125) = 0.5309\,v^2$$

$$0.5309\,v^2 = 1.875$$

De donde se despeja la rapidez:

$$v^2 = \frac{1.875}{0.5319}$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{3.532}$$

$$\mathrm{v} = 1.879\,\frac{m}{s}$$

La rapidez que debe tener la esfera es:

$$\mathrm{v} = 1.879\,\frac{m}{s}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
W = 2.5;
L = 0.8;
g = 9.81;
m = W/g
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre la esfera:

```
vW = {0, 0, -W}
vT = T {0, 3/5, 4/5}
```

Ecuaciones de movimiento con base en la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vW + vT == m {aT, aN, 0}
resp1 = Solve[ec1]
```

a) la tensión en la cuerda

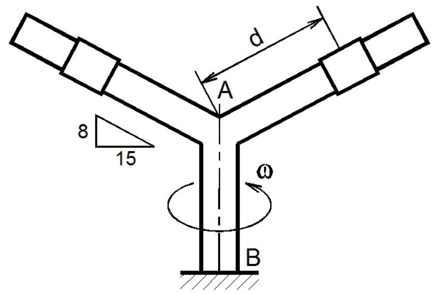
```
Tsol = T /. resp1[[1]]
```

b) la rapidez que debe tener la esfera

```
aNsol = aN /. resp1[[1]]
ec2 = R/L == 3/5
resp2 = Solve[ec2]
Rsol = R /. resp2[[1]]
aN = v^2/Rsol
ec3 = aN == aNsol
resp3 = Solve[ec3]
vSol = v /. resp3[[2]]
```

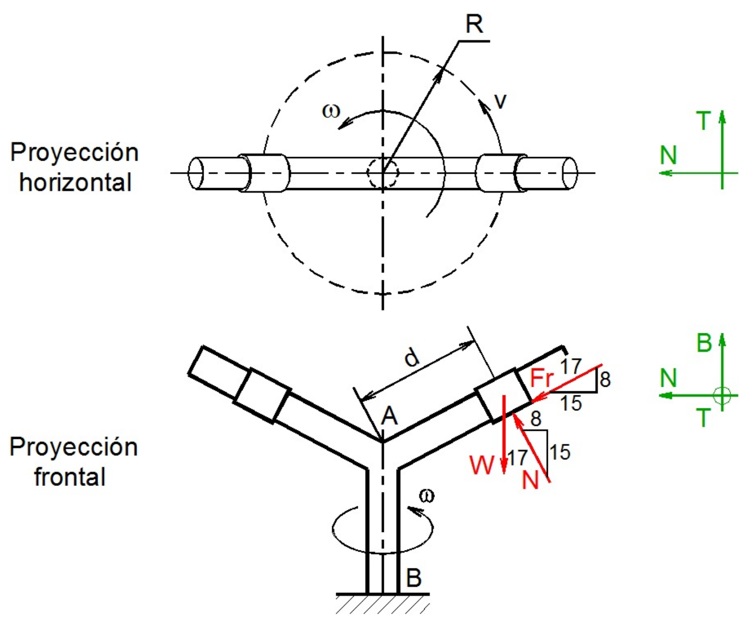
Ejercicio 26

Se tiene un cuerpo formado por barras rugosas en forma de “Y” y dos collarines de 4 N de peso cada uno, colocados en sus brazos simétricos, tal como se muestra en la figura.



Si el cuerpo puede girar en torno a su eje vertical AB, determine la distancia d, medida desde el punto A, a la que se ubicarían los collarines, si la rapidez angular del cuerpo es $\omega = 5\ \frac{\text{rad}}{s}$ y están a punto de subir, y el coeficiente de fricción entre los collarines y las barras es $\mu_s = 0.2$.
Considere que el tamaño de los collarines es despreciable.

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de uno de los collarines.
Para comprender la geometría del movimiento de los collarines, que tienen trayectorias circulares en un plano horizontal, se dibujan sus proyecciones.



Con base en el triángulo de pendiente de las barras del cuerpo, se puede calcular su hipotenusa:

$\Delta x = 15$

$\Delta y = 8$

$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$\text{hip} = \sqrt{15^2 + 8^2}$

$\text{hip} = \sqrt{225 + 64}$

$\text{hip} = \sqrt{289}$

$\text{hip} = 17$

En el diagrama anterior, se puede verificar que la fuerza de fricción es hacia abajo debido a que se considera que los collarines están a punto de subir.

La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el collarín, considerando que la primera componente es la tangencial, la segunda la normal y la tercera la binormal, es:

$\overline{W} = \{0, 0, \text{-W}\}$

$\overline{N} = \text{N}\,\{0, \frac{8}{17}, \frac{15}{17}\}$

$\overline{\text{Fr}} = \text{Fr}\,\{0, \frac{15}{17}, -\frac{8}{17}\}$

Se obtiene la ecuación de movimiento con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{W} + \overline{N} + \overline{\text{Fr}} = \text{m}\,\{a_T, a_N, 0\}$

La aceleración binormal es nula ya que el movimiento circular de los collarines es horizontal, es decir, en el plano tangente-normal.

$\{0, 0, \text{-}4\} + \{0, \frac{8}{17} N, \frac{15}{17} N\} + \{0, \frac{15}{17}\text{Fr}, -\frac{8}{17}\text{Fr}\} = \frac{4}{9.81}\{a_T, a_N, 0\}$

$\{0, \frac{8}{17} N + \frac{15}{17}\text{Fr}, \frac{15}{17} N - \frac{8}{17}\text{Fr} - 4\} = 0.4077\,\{a_T, a_N, 0\}$

De la ecuación anterior se obtienen tres expresiones escalares:

$0 = 0.4077\, a_T$

$\frac{8}{17} N + \frac{15}{17}\text{Fr} = 0.4077\, a_N$

$\frac{15}{17} N - \frac{8}{17}\text{Fr} - 4 = 0$

Con base en el enunciado del problema, dado que los collarines están a punto de subir, la magnitud de la fuerza de fricción es la estática límite, por consiguiente:

$\text{Fr} = \mu_s\,\text{N}$

$\text{Fr} = 0.2\,\text{N}$

Se sustituye esta expresión en la tercera ecuación anterior:

$\frac{15}{17} N - \frac{8}{17}(0.2\, N) - 4 = 0$

$0.8824\,\text{N} - 0.0941\,\text{N} = 4$

$0.7882\,\text{N} = 4$

$\text{N} = \frac{4}{0.7882}$

$\text{N} = 5.075\,\text{N}$

Con base en el valor de la magnitud de la fuerza normal y la ecuación de la aceleración normal:

$\frac{8}{17} N + \frac{15}{17}\text{Fr} = 0.4077\, a_N$

$\frac{8}{17}(5.075) + \frac{15}{17}(0.2)(5.075) = 0.4077\, a_N$

$2.388 + 0.8955 = 0.4077\, a_N$

$0.4077\, a_N = 3.284$

$a_N = \frac{3.284}{0.4077}$

$a_N = 8.053\,\frac{m}{s^2}$

Dado que la aceleración normal del collarín está en función de su rapidez:

$a_N = \frac{v^2}{R}$

La rapidez del collarín se puede calcular con base en su rapidez angular ω:

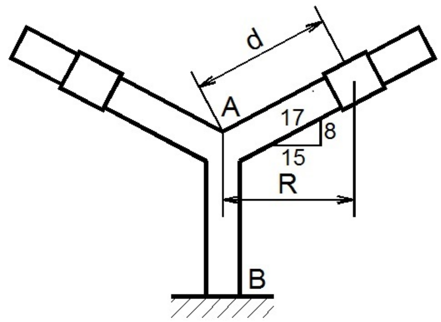
$\text{v} = \text{R}\,\omega$

Por consiguiente:

$a_N = \frac{(R\,\omega)^2}{R}$

$a_N = \mathrm{R}\,\omega^2$

El radio de la trayectoria se puede determinar en función de d y con base en el teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes, con base en la proyección frontal anterior:



Se puede observar que:

$\frac{R}{d} = \frac{15}{17}$

$\mathrm{R} = \frac{15}{17}\,\mathrm{d}$

Sustituyendo la expresión anterior y la rapidez angular $\omega = 5\ \frac{\mathrm{rad}}{s}$ en la aceleración normal:

$8.053 = \frac{15}{17}\,\mathrm{d}\,(5)^2$

$\frac{15}{17}\,(25)\,\mathrm{d} = 8.053$

$22.06\,\mathrm{d} = 8.053$

$\mathrm{d} = \frac{8.053}{22.06}$

$\mathrm{d} = 0.3651\ \mathrm{m}$

La distancia d a la que se ubicarían los collarines con respecto al punto A es:

d = 0.3651 m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
W = 4;
g = 9.81;
ω = 5;
μs = 0.2;
Δx = 15;
Δy = 8;
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el collarín:

```
hip = √(Δx² + Δy²)
vW = {0, 0, -W}
vN = N {0, Δy/hip, Δx/hip}
vFr = Fr {0, Δx/hip, -Δy/hip}
```

Ecuación de movimiento con base en la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vW + vN + vFr == W/g {aT, aN, 0}
Fr = μs N
resp1 = Solve[ec1, {aT, aN, N}]
aNsol = aN /. resp1[[1]]
Nsol = N /. resp1[[1]]
```

Cálculo del radio de la trayectoria en función de d:

```
ec2 = R/d == 15/17
resp2 = Solve[ec2, R]
Rsol = R /. resp2[[1]]
```

Obtención de la distancia d:

```
aN = v²/R
v = R ω
ec3 = aNsol == aN /. R → Rsol
resp3 = Solve[ec3]
dSol = d /. resp3[[1]]
```

Ejercicio 27

Un pequeño cuerpo de 0.5 kg se encuentra en reposo en la parte superior de una superficie cilíndrica lisa, como se puede observar en la figura 2. Al empujarlo ligeramente hacia la izquierda de su posición de equilibrio, el cuerpo empieza a bajar.
Determine la posición angular θ_f, en la que dicha partícula se despega de la superficie circular mencionada, para la cual la fuerza normal es nula. Conviene emplear la expresión de la aceleración tangencial $a_T = \alpha$ R, donde la aceleración angular $\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$.

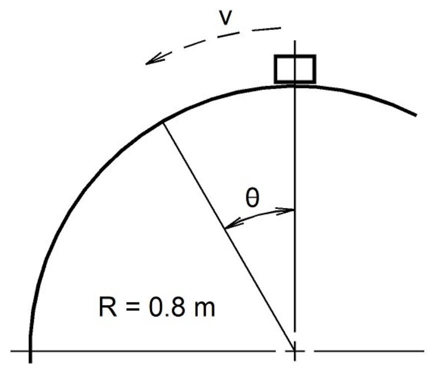
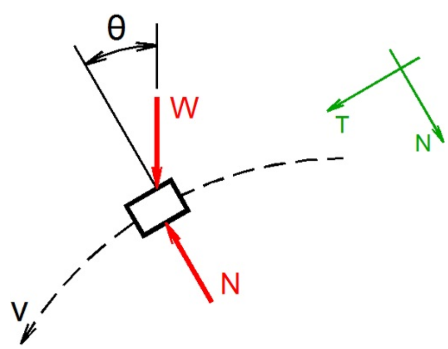


Figura 2 Cuerpo sobre la parte superior de una superficie cilíndrica.

Para resolver el problema, primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del cuerpo: en una posición intermedia de su movimiento:



La representación vectorial de las fuerzas aplicadas al cuerpo, en la cual la primera componente es la tangencial y la segunda la componente normal es:

$\overline{N}$ = {0, -N}
$\overline{W}$ = m g {Sin [θ], Cos[θ]}
$\overline{W}$ = 0.5 (9.81) {Sin [θ], Cos[θ]}
$\overline{W}$ = {4.905 Sin [θ], 4.905 Cos[θ]}

Por consiguiente, luego de aplicar la segunda ley de Newotn, la ecuación de movimiento queda:

$\overline{N} + \overline{W}$ = m {a_T, a_N}
{0, -N} + {4.905 Sin [θ], 4.905 Cos[θ]} = 0.5 {a_T, a_N}

De la ecuación anterior se establecen las siguientes expresiones escalares:

4.905 Sin [θ] = 0.5 a_T (1)
4.905 Cos [θ] - N = 0.5 a_N (2)

De 1 se despeja la aceleración tangencial:

$0.5\ a_T = 4.905 \text{ Sin}[\theta]$

$a_T = \frac{4.905}{0.5} \text{ Sin}[\theta]$

$a_T = 9.81 \text{ Sin}[\theta]$

Dado que:

$a_T = \text{R}\ \alpha$

$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

$\text{R}\ \omega \frac{d\omega}{d\theta} = 9.81 \text{ Sin}[\theta]$

$\text{R}\ \omega\ d\omega = 9.81 \text{ Sin}[\theta]\ d\theta$

Se integran ambos miembros, considerando que las condiciones iniciales son, para $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = 0$:

$\int_0^{\omega} \text{R}\ \omega\ d\omega = \int_0^{\theta} 9.81 \text{ Sin}[\theta]\ d\theta$

$\frac{1}{2} \text{R}\ \omega^2 \Big]_0^{\omega} = -9.81 \text{ Cos}[\theta] \Big]_0^{\theta}$

$\frac{1}{2} 0.8\ \omega^2 - \frac{1}{2} 0.8\ (0)^2 = -9.81 \text{ Cos}[\theta] - \{-9.81 \text{ Cos}[0]\}$

$0.4\ \omega^2 = -9.81 \text{ Cos}[\theta] - [-9.81\ (1)]$

$0.4\ \omega^2 = -9.81 \text{ Cos}[\theta] + 9.81$

$\omega^2 = \frac{9.81}{0.4} - \frac{9.81}{0.4} \text{ Cos}[\theta]$

$\omega^2 = 24.53 - 24.53 \text{ Cos}[\theta]$ (3)

Como la aceleración normal es:

$a_N = \frac{v^2}{R}$

$a_N = \text{R}\ \omega^2$

Entonces:

$a_N = 0.8\ \{24.53 - 24.53 \text{ Cos}[\theta]\}$

$a_N = 19.62 - 19.62 \text{ Cos}[\theta]$ (4)

Se sustituye 4 en 2:

$4.905 \text{ Cos}[\theta] - \text{N} = 0.5\ \{19.62 - 19.62 \text{ Cos}[\theta]\}$

$4.905 \text{ Cos}[\theta] - \text{N} = 9.81 - 9.81 \text{ Cos}[\theta]$

$4.905 \text{ Cos}[\theta] - \text{N} - 9.81 + 9.81 \text{ Cos}[\theta] = 0$

$14.72 \text{ Cos}[\theta] - \text{N} - 9.81 = 0$

Como se desea determinar el ángulo θ_f para el cual el bloque se despega de la rampa circular y para esta situación la normal vale cero:

$14.72 \text{ Cos}[\theta_f] - 0 - 9.81 = 0$

$14.72 \text{ Cos}[\theta_f] = 9.81$

$\text{Cos}[\theta_f] = \frac{9.81}{14.72}$

$\text{Cos}[\theta_f] = 0.6667$

Se aplica la función inversa del coseno, Cos [ ], que es el arco coseno, ArcCos [ ], a ambos miembros:

$\text{ArcCos}\{\text{Cos}[\theta_f]\} = \text{ArcCos}[0.6667]$

De donde:

$\theta_f = 48.19°$

Posición angular θ_f en la que la partícula se despega de la superficie circular:

$\theta_f = 48.19°$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.5;
g = 9.81;
θ0 = 0;
ω0 = 0;
R = 0.8;
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el collarín:

```
vN = {0, -N}
vW = m g {Sin[θ], Cos[θ]}
```

Ecuación de movimiento con base en la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vN + vW == m {aT, aN}
resp1 = Solve[ec1, {aT, aN}]
aTsol = aT /. resp1[[1]]
aNsol = aN /. resp1[[1]]
```

Obtención de la rapidez angular ω:

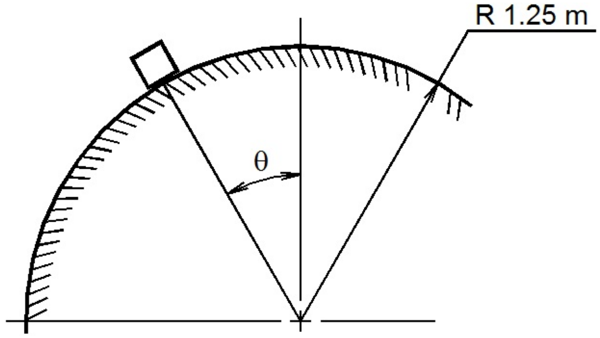
```
ec2 = ∫_ω0^ω R ω ⅆω == ∫_θ0^θ aTsol ⅆθ
resp2 = Solve[ec2, ω]
ωSol = ω /. resp2[[2]]
```

Obtención del ángulo θ_f:

```
aNf = R ωSol^2
ec3 = (aNsol /. N → 0) == aNf
resp3 = FindRoot[ec3, {θ, 1}]
θf = θ /. resp3
θfDeg = θf / °
```

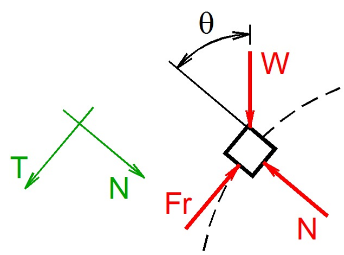
Ejercicio 28

El bloque de la figura que tiene una masa de 0.4 kg, se moverá describiendo una trayectoria alojada en un plano vertical, después de soltarla sobre la superficie rugosa mostrada.



Si se le suelta cuando $\theta = 15^{\circ}$ desde el reposo, y la magnitud de la fuerza de fricción cinética, siempre tangente a la trayectoria, está dada por la expresión Fr = 0.25 W Cos [θ], donde Fr está en N y W es el peso de la partícula, determine la posición angular en la que dicha partícula se despega de la superficie circular mencionada, para la cual la fuerza normal es nula.

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque en una posición intermedia de su movimiento:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan, considerando que la primera componente es la tangente y la segunda la normal, es la siguiente:

$\overline{\mathrm{Fr}} = \{-\mathrm{Fr}, 0\}$

$\overline{N} = \{0, -\mathrm{N}\}$

$\overline{W} = \mathrm{W}\,\{\mathrm{Sin}\,[\theta], \mathrm{Cos}\,[\theta]\}$

$\overline{W} = 0.4\,(9.81)\,\{\mathrm{Sin}\,[\theta], \mathrm{Cos}\,[\theta]\}$

$\overline{w} = 3.924\,\{\mathrm{Sin}\,[\theta], \mathrm{Cos}\,[\theta]\}$

$\overline{W} = \{3.924\,\mathrm{Sin}\,[\theta], 3.924\,\mathrm{Cos}\,[\theta]\}$

Se establece la ecuación de movimiento del bloque con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{\mathrm{Fr}} + \overline{N} + \overline{W} = \mathrm{m}\,\{a_T, a_N\}$

$\{-\mathrm{Fr}, 0\} + \{0, -\mathrm{N}\} + \{3.924\,\mathrm{Sin}\,[\theta], 3.924\,\mathrm{Cos}\,[\theta]\} = 0.4\,\{a_T, a_N\}$

De la ecuación anterior se establecen las siguientes expresiones escalares:

$3.924\,\mathrm{Sin}\,[\theta] - \mathrm{Fr} = 0.4\,a_T$ (1)

$3.924\,\mathrm{Cos}\,[\theta] - \mathrm{N} = 0.4\,a_N$ (2)

Dado que la magnitud de la fuerza de fricción es:

$Fr = 0.25\ W\ Cos\ [\theta]$

la primera expresión queda:

$3.924\ Sin\ [\theta] - 0.25\ (3.924)\ Cos\ [\theta] = 0.4\ a_T$

$0.4\ a_T = 3.924\ Sin\ [\theta] - 0.981\ Cos\ [\theta]$

De donde:

$a_T = \frac{3.924}{0.4}\ Sin\ [\theta] - \frac{0.981}{0.4}\ Cos\ [\theta]$

$a_N = 9.81\ Sin\ [\theta] - 2.453\ Cos\ [\theta]$

Dado que:

$a_T = R\ \alpha$

$\alpha = \omega\ \frac{d\omega}{d\theta}$

$R\ \omega\ \frac{d\omega}{d\theta} = 9.81\ Sin\ [\theta] - 2.453\ Cos\ [\theta]$

$R\ \omega\ d\omega = \{9.81\ Sin\ [\theta] - 2.453\ Cos\ [\theta]\}\ d\theta$

Se integran ambos miembros, considerando que las condiciones iniciales son, para $\theta_0 = 15°$, $\omega_0 = 0$:

$\int_0^{\omega} R\ \omega\ d\omega = \int_{15°}^{\theta} \{9.81\ Sin\ [\theta] - 2.453\ Cos\ [\theta]\}\ d\theta$

$\frac{1}{2}\ R\ \omega^2\ ]_0^{\omega} = \{-9.81\ Cos\ [\theta] - 2.453\ Sin\ [\theta]\}\ ]_{15°}^{\theta}$

$\frac{1}{2}\ 1.25\ \omega^2 - \frac{1}{2}\ R\ (0)^2 = -9.81\ Cos\ [\theta] - 2.453\ Sin\ [\theta] - \{-9.81\ Cos\ [15°] - 2.453\ Sin\ [15°]\}$

$0.625\ \omega^2 = -9.81\ Cos\ [\theta] - 2.453\ Sin\ [\theta] - [-9.81\ (0.9659) - 2.453\ (0.2588)]$

$0.625\ \omega^2 = -9.81\ Cos\ [\theta] - 2.453\ Sin\ [\theta] - (-9.478\ - 0.6348)$

$0.625\ \omega^2 = -9.81\ Cos\ [\theta] - 2.453\ Sin\ [\theta] + 10.11$

$\omega^2 = \frac{10.11}{0.625} - \frac{9.81}{0.625}\ Cos\ [\theta] - \frac{2.453}{0.625}\ Sin\ [\theta]$

$\omega^2 = 16.18 - 15.70\ Cos\ [\theta] - 3.924\ Sin\ [\theta]$ (3)

Por otra parte, dado que la aceleración normal es:

$a_N = \frac{v^2}{R}$

$a_N = R\ \omega^2$

Entonces, para este problema:

$a_N = 1.25\ \{16.18 - 15.70\ Cos\ [\theta] - 3.924\ Sin\ [\theta]\}$

$a_N = 20.23 - 19.62\ Cos\ [\theta] - 4.905\ Sin\ [\theta]$ (4)

Se sustituye 4 en 2:

$3.924\ Cos\ [\theta] - N = 0.4\ \{20.23 - 19.62\ Cos\ [\theta] - 4.905\ Sin\ [\theta]\}$

Como se desea determinar el ángulo θ_d para el cual el bloque se despega de la rampa circular y para esta situación la normal vale cero:

$3.924\ Cos\ [\theta_d] - 0 = 8.088 - 7.848\ Cos\ [\theta_d] - 1.962\ Sin\ [\theta_d]\}$

$3.924\ Cos\ [\theta_d] + 7.848\ Cos\ [\theta_d] + 1.962\ Sin\ [\theta_d] = 8.088$

$11.77\ Cos\ [\theta_d] + 1.962\ Sin\ [\theta_d] = 8.088$ (5)

Con base en la identidad:

$Sin^2\ [\theta_d] + Cos^2\ [\theta_d] = 1$

$Cos^2\ [\theta_d] = 1 - Sin^2\ [\theta_d]$

$Cos\ [\theta_d] = \sqrt{1 - Sin^2\ [\theta_d]}$ (6)

Por consiguiente, se sustituye 6 en 5:

$$11.77\ \sqrt{1-\text{Sin}^2[\theta_d]}\ +1.962\ \text{Sin}[\theta_d]=8.088$$

$$11.77\ \sqrt{1-\text{Sin}^2[\theta_d]}\ =8.088-1.962\ \text{Sin}[\theta_d]$$

Se elevan al cuadrado ambos miembros:

$$\left[11.77\ \sqrt{1-\text{Sin}^2[\theta_d]}\right]^2=\{8.088\ -\ 1.962\ \text{Sin}[\theta_d]\}^2$$

$$11.77^2\left(1\ -\ \text{Sin}^2[\theta_d]\right)=8.088^2-2\ (8.088)\ (1.962)\ \text{Sin}[\theta_d]+1.962^2\ \text{Sin}^2[\theta_d]$$

$$138.5\left(1\ -\ \text{Sin}^2[\theta_d]\right)=65.42-31.74\ \text{Sin}[\theta_d]+3.849\ \text{Sin}^2[\theta_d]$$

$$138.5-138.5\ \text{Sin}^2[\theta_d]-65.42+31.74\ \text{Sin}[\theta_d]-3.849\ \text{Sin}^2[\theta_d]=0$$

$$-142.4\ \text{Sin}^2[\theta_d]+31.74\ \text{Sin}[\theta_d]+73.08=0$$

Se normaliza la ecuación cuadrática, es decir, se dividen ambos miembros por (-142.4):

$$\frac{-142.4}{(-142.4)}\ \text{Sin}^2[\theta_d]+\frac{31.74}{(-142.4)}\ \text{Sin}[\theta_d]+\frac{73.08}{(-142.4)}=\frac{0}{(-142.4)}$$

$$\text{Sin}^2[\theta_d]-0.2229\ \text{Sin}[\theta_d]-0.5132=0$$

Se aplica la fórmula simplificada del "chicharronero":

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

$$\text{Sin}[\theta_d]_{1,2}=-\frac{(-0.2229)}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-0.2229}{2}\right)^2+0.5132}$$

$$\text{Sin}[\theta_d]_{1,2}=0.1114\pm\sqrt{(0.1114)^2+0.5132}$$

$$\text{Sin}[\theta_d]_{1,2}=0.1114\pm\sqrt{0.01242+0.5132}$$

$$\text{Sin}[\theta_d]_{1,2}=0.1114\pm\sqrt{0.5256}$$

Se considera únicamente la raíz positiva:

$$\text{Sin}[\theta_d]=0.1114+0.7250$$

$$\text{Sin}[\theta_d]=0.8364$$

Se aplica la función ArcSin a ambos miembros:

$$\text{ArcSin}\{\text{Sin}[\theta_d]\}=\text{ArcSin}[0.8364]$$

$$\theta_d=56.76°$$

La posición angular en la que el bloque se despega de la superficie circular es:

$\theta_d=56.76°$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.4;
g = 9.81;
R = 1.25;
θ0 = 15 °;
ω0 = 0;
W = m g
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el collarín:

```
vFr = {-Fr, 0}
vN = {0, -N}
vW = W {Sin[θ], Cos[θ]}
```

Ecuación de movimiento con base en la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vFr + vN + vW == m {aT, aN}
Fr = 0.25 W Cos[θ]
resp1 = Solve[ec1, {aT, aN}]
aTsol = aT /. resp1[[1]]
aNsol = aN /. resp1[[1]]
```

Obtención de la rapidez angular ω:

```
ec2 = ∫_{ω0}^{ω} R ω dω == ∫_{θ0}^{θ} aTsol dθ
resp2 = Solve[ec2, ω]
ωSol = ω /. resp2[[2]]
```

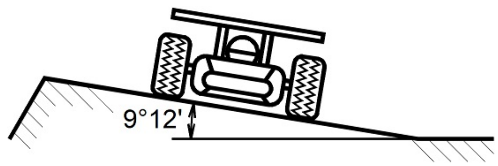
Obtención del ángulo θ_d:

```
aNd = R ωSol^2
ec3 = (aNsol /. N → 0) == aNd
resp3 = FindRoot[ec3, {θ, 1}]
θd = θ /. resp3
θdDeg = θd/°
```

Ejercicio 29

La pista de una de las carreras de autos más famosa del mundo, la Indy 500, está compuesta por cuatro curvas de $\frac{1}{4}$ mi cada una, dos rectas largas de $\frac{5}{8}$ mi, y dos rectas cortas de $\frac{1}{8}$ mi, de manera que conforman un óvalo rectangular casi perfecto con una longitud de $2\,\frac{1}{2}$ mi.

Se sabe que las curvas tienen un ángulo de peralte máximo de 9° 12’, tal como se muestra en la figura.



Considerando que este ángulo fuera constante y que el auto tiene una masa de 800 kg, determine el coeficiente de fricción estática mínima, μ_s, que debe tener la pista con las ruedas de los autos, si se sabe que la rapidez máxima que pueden alcanzar los autos en ellas es de 180 mph.

Dado que el valor del ángulo de peralte máximo se proporciona en grados y minutos, para simplificar los cálculos conviene expresarlos en grados y décimas de grado.

Para esto, simplemente los minutos se dividen por 60 y se suman a los grados:

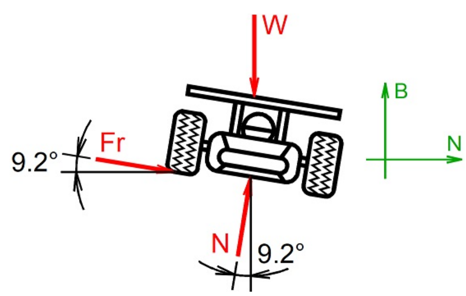
$9°12' = \left(9 + \frac{12}{60}\right)°$

$9°12' = (9 + 0.2)°$

$9°12' = 9.2°$

Para resolver este problema, es necesario dibujar diagrama de cuerpo libre del auto visto de frente, cuando se encuentra en la parte peraltada de la curva.

Suponiendo que el auto se mueve con rapidez constante, su diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



En el diagrama anterior es importante hacer notar que la curva es horizontal, por lo que el centro de curvatura se encuentra a la derecha sobre el mismo plano horizontal y los ejes tangente y normal están contenidos en este plano, de donde el eje normal es horizontal hacia la derecha.

El eje tangente es hacia delante, que en el diagrama anterior “sale” fuera de la hoja hacia delante, por lo que el eje perpendicular al eje normal es el binormal.

Además, dada la gran rapidez con la que el auto toma la curva, la aceleración normal es sumamente grande por lo que el auto tiende a “salirse” hacia afuera. Por esta razón, la fuerza de fricción es la única que evita que el auto se deslice hacia afuera, por lo cual su sentido es hacia dentro de la curva.

En este caso, las componentes de los vectores que representan las fuerzas tienen como primera componente la tangencial, como segunda la normal y como tercera componente la binormal.

La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el auto es, entonces:

$\overline{W}$ = {0, 0, -m g}

$\overline{W}$ = {0, 0, -800 (9.81)}

$\overline{W}$ = {0, 0, -7848}

$\overline{Fr}$ = Fr {0, Cos [9.2°], -Sin [9.2°]}

$\overline{Fr}$ = {0, 0.9871 Fr, -0.1599 Fr}

$\overline{N}$ = N {0, Sin [9.2°], Cos [9.2°]}

$\overline{N}$ = {0, 0.1599 N, 0.9871 N}

La ecuación vectorial de movimento, con base en la segunda ley de Newton, es la siguiente:

$\overline{W} + \overline{Fr} + \overline{N}$ = m {a_T, a_N, a_B}

{0, 0, -7848} + {0, 0.9871 Fr, -0.1599 Fr} + {0, 0.1599 N, 0.9871 N} = 800 {a_T, a_N, a_B}

{0, 0.9871 Fr + 0.1599 N, 0.9871 N - 7848 - 0.1599 Fr} = 800 {a_T, a_N, 0}

De la ecuación anterior se pueden establecer las siguientes expresiones escalares:

0 = 800 a_T

0.9871 Fr + 0.1599 N = 800 a_N

0.9871 N - 7848 - 0.1599 Fr = 0

De la primera ecuación se obtiene:

$a_T = 0$

lo cual es consistente con el hecho de considerar que la rapidez del auto es constante. Conviene recordar que la aceleración tangencial se puede definir como:

$a_T = \frac{dv}{dt}$

Dado que se desea obtener el coeficiente de fricción estática mínima para el cual el auto permanezca en la curva, se requiere considerar la fuerza de fricción como la límite o máxima:

Fr = μ_s N

Se sustituye la expresión anterior en la ecuación de la componente normal:

0.9871 μ_s N + 0.1599 N = m a_N

0.9871 μ_s N + 0.1599 N = 800 a_N

Dado que la aceleración normal es:

$a_N = \frac{v^2}{R}$

Y la rapidez constante a la que se pretende que el auto pueda tomar la pista es:

v = 180 mph

$v = 180 \frac{\text{mi}}{h} \times \frac{1609.3\, m}{1\text{ mi}} \times \frac{1\, h}{3600\, s}$

$v = 80.47 \frac{m}{s}$

El radio de la curva puede obtenerse con base en que su longitud es de $\frac{1}{4}$ mi, es decir:

$s = 0.25\text{ mi} \times \frac{1609.3\, m}{1\text{ mi}}$

s = 402.3 m

Dado que cada curva es un cuarto de circunferencia, es decir, está subtendido por un ángulo de 90°, equivalente a $\frac{\pi}{2}$ rad:

$$s = R\,\theta$$
$$R = \frac{s}{\theta}$$
$$R = \frac{402.3}{\frac{\pi}{2}}$$
$$R = \frac{402.3}{1.5708}$$
$$R = 256.1 \text{ m}$$

Por tanto, la aceleración normal es:

$$a_N = \frac{(80.47)^2}{256.1}$$
$$a_N = \frac{6475}{256.1}$$
$$a_N = 25.28\ \frac{m}{s^2}$$

De donde:

$$0.9871\ \mu_s\ N + 0.1599\ N = 800\ (25.28)$$
$$0.9871\ \mu_s\ N + 0.1599\ N = 20{,}224 \qquad (1)$$

Luego, se sustituye la magnitud de la fuerza de fricción en la ecuación de la componente binormal:

$$0.9871\ N - 7848 - 0.1599\ Fr = 0$$
$$0.9871\ N - 7848 - 0.1599\ \mu_s\ N = 0$$
$$0.9871\ N - 0.1599\ \mu_s\ N = 7848 \qquad (2)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones formado por las expresiones 1 y 2, se multiplica la primera ecuación por 0.1599, la segunda ecuación por 0.9871 y se suman miembro a miembro:

$$0.9871\ (0.1599)\ \mu_s\ N + 0.1599\ (0.1599)\ N = 20{,}224\ (0.1599) \qquad (3)$$
$$0.9871\ (0.9871)\ N - 0.1599\ (0.9871)\ \mu_s\ N = 7848\ (0.9871) \qquad (4)$$
$$0.1578\ \mu_s\ N + 0.02556\ N = 3233$$
$$-0.1578\ \mu_s\ N + 0.9744\ N = 7747 \qquad +$$

____

$$N = 10{,}980 \qquad (5)$$

Finalmente, se sutituye 5 en 2:

$$0.9871\ (10{,}980) - 0.1599\ \mu_s\ (10{,}980) = 7848$$
$$1756\ \mu_s = 10{,}839 - 7848$$
$$1756\ \mu_s = 2991$$
$$\mu_s = \frac{2991}{1756}$$
$$\mu_s = 1.704$$

El coeficiente de fricción estática mínima que debe tener la pista de manera que el auto puede recorrer una curva con un ángulo de peralte de 9.2° a 180 mph es:

$$\mu_s = 1.704.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
θdeg = 9;
θmin = 12;
sxmin = 60;
m = 800;
g = 9.81;
smi = 1/4;
mxmi = 1609.344;
vmph = 180;
sxh = 3600;
θc = π/2;
```

Cálculo del ángulo en grados y décimas:

```
θ = (θdeg + θmin/sxmin) °
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el auto:

```
vW = {0, 0, -m g}
vFr = Fr {0, Cos[θ], -Sin[θ]}
vN = N {0, Sin[θ], Cos[θ]}
```

Ecuación de movimiento con base en la segunda ley de Newton:

```
Fr = μs N
ec1 = vW + vFr + vN == m {aT, aN, 0}
```

Cálculo de la rapidez del auto y el radio de la curva:

```
v = vmph mxmi/sxh
ec2 = smi mxmi == R θc
resp2 = Solve[ec2]
Rsol = R /. resp2〚1〛
```

Obtención de la aceleración normal:

```
aN = v^2/Rsol
```

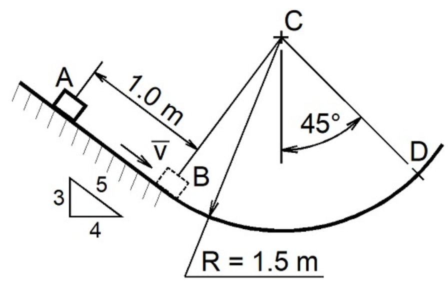
Cálculo del coeficiente de fricción estática mínima:

```
resp1 = Solve[ec1, {aT, N, μs}]
μsSol = μs /. resp1[[1]]
Nsol = N /. resp1[[1]]
aTsol = aT /. resp1[[1]]
```

Ejercicio 30

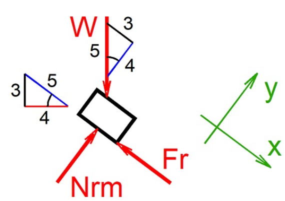
Un bloque de 0.5 kg inicia su movimiento descendente en el punto A sobre un plano inclinado rugoso con μ_k = 0.25. Al llegar al punto B continúa su movimiento sobre una trayectoria circular lisa con el radio dado.
Calcule:

a) las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal justo después de pasar por el punto B;
b) la rapidez en el punto D; y
c) la fuerza normal en dicha posición.



a) las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal justo después de pasar por el punto B

Primero, se obtiene la rapidez del bloque justo en el punto B.
Dado que el diagrama de cuerpo libre del bloque durante su movimiento sobre el plano inclinado es el siguiente:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el bloque es:

$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-Fr}, 0\}$

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$

$\overline{W} = \text{m g}\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$

Con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{\text{Fr}} + \overline{N} + \overline{W} = \text{m}\,\{a_x,\ 0\}$

$\{\text{-Fr}, 0\} + \{0, \text{Nrm}\} + \left\{\frac{3}{5}\,m\,g,\ -\frac{4}{5}\,m\,g\right\} = \text{m}\,\{a_x,\ 0\}$

$\left\{\frac{3}{5}\,m\,g - \text{Fr},\ \text{Nrm} - \frac{4}{5}\,m\,g\right\} = \text{m}\,\{a_x,\ 0\}$

de donde se obtienen dos expresiones escalares:

$\frac{3}{5}\,m\,g - \text{Fr} = \text{m}\,a_x$

$\text{m}\,a_x = \frac{3}{5}\,m\,g - \text{Fr}$

y:

$\text{Nrm} - \frac{4}{5}\,m\,g = 0$

$\text{Nrm} = 0.8\,m\,g$

Entonces:

$Fr = \mu_k$ Nrm

Fr = (0.25) (0.8) m g

Fr = 0.2 m g

Luego de sustituir este último valor en la expresión de la aceleración se obtiene:

$m\, a_x = \frac{3}{5}\, m\, g - 0.2\, m\, g$

de donde:

$a_x = 0.6\, g - 0.2\, g$

$a_x = 0.4\, g$

$a_x = (0.4)\,(9.81)$

$a_x = 3.924\ \frac{m}{s^2}$

Se iguala la aceleración a su definición en función de la posición:

$a_x = v_x\, \frac{d v_x}{d x}$

$v_x\, \frac{d v_x}{d x} = 3.924$

$v_x\, d v_x = 3.924\, d x$

Dado que las condiciones iniciales son, para $x_A = 0$, $v_{xA} = 0$:

$\int_0^{v_x} v_x\, d v_x = \int_0^x 3.924\, d x$

$\frac{1}{2}\, v_x^2 \Big]_0^{v_x} = 3.924\, x \Big]_0^x$

$\frac{1}{2}\, v_x^2 - \frac{1}{2}\, (0)^2 = 3.924\, x - 3.924\, (0)$

$\frac{1}{2}\, v_x^2 = 3.924\, x$

$v_x^2 = (2)\,(3.924)\, x$

$v_x = \sqrt{7.848\, x}$

Para $x_B = 1$:

$v_{xB} = \sqrt{(7.848)\,(1)}$

$v_{xB} = 2.801\ \frac{m}{s}$

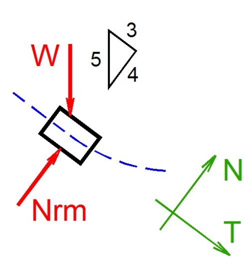
Conocida la rapidez del bloque en el punto B, dado que dicho valor es el mismo cuando inicia la trayectoria circular, es posible calcular su aceleración normal:

$a_{NB} = \frac{v_{xB}^2}{R}$

$a_{NB} = \frac{7.848}{1.5}$

$a_{NB} = 5.232\ \frac{m}{s^2}$

Para obtener la aceleración tangencial del bloque justo cuando inicia su trayectoria circular, se traza el diagrama de cuerpo libre en dicho punto:



Cuando el bloque se encuentra en la trayectoria circular, la fuerza de fricción ya no actúa debido a que dicha superficie es lisa.

Al aplicar en esta posición la segunda ley de Newton, se tiene que:

$\overline{N} + \overline{W} = \text{m}\,\{a_{\text{TB}},\ a_{\text{NB}}\}$

Debido a que la representación vectorial en el punto B de las fuerzas que actúan en el bloque, considerando que la primera componente es la tangencial y la segunda la normal, resulta ser la misma que la que tiene en el plano inclinado:

$\{0, \text{Nrm}\} + \left\{\frac{3}{5}\, m\, g,\ -\frac{4}{5}\, m\, g\right\} = \text{m}\,\{a_{\text{TB}},\ a_{\text{NB}}\}$

$\left\{\frac{3}{5}\, m\, g,\ \text{Nrm} - \frac{4}{5}\, m\, g\right\} = \text{m}\,\{a_{\text{TB}},\ a_{\text{NB}}\}$

De donde:

$\frac{3}{5}\, m\, g = \text{m}\, a_{\text{TB}}$

$a_{\text{TB}} = \frac{3}{5}\, g$

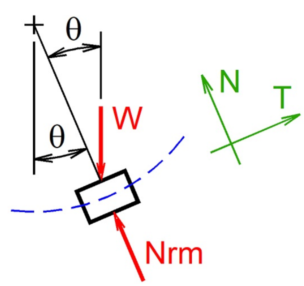
$a_{\text{TB}} = 5.886\ \frac{m}{s^2}$

Las aceleraciones tangencial y normal del bloque en el punto B son:

$a_{\text{TB}} = 5.886\ \frac{m}{s^2}$, y $a_{\text{NB}} = 5.232\ \frac{m}{s^2}$.

b) la rapidez en el punto D

Para calcular la rapidez del bloque en el punto D, es necesario trazar su diagrama de cuerpo libre en una posición intermedia de su movimiento sobre la trayectoria circular:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque, es:

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$

$\overline{W} = \text{m g}\,\{\text{-Sin}\,[\theta], \text{-Cos}\,[\theta]\}$

$\overline{W} = (0.5)\,(9.81)\,\{\text{-Sin}\,[\theta], \text{-Cos}\,[\theta]\}$

$\overline{W} = \{-4.905\ \text{Sin}\,[\theta], -4.905\ \text{Cos}\,[\theta]\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{N} + \overline{W} = \text{m}\,\{a_T, a_N\}$

$\{0, \text{Nrm}\} + \{-4.905\ \text{Sin}\,[\theta], -4.905\ \text{Cos}\,[\theta]\} = 0.5\,\{a_T, a_N\}$

$\{-4.905\ \text{Sin}\,[\theta], \text{Nrm} - 4.905\ \text{Cos}\,[\theta]\} = 0.5\,\{a_T, a_N\}$

De donde se obtiene la expresión:

$-4.905\ \text{Sin}\,[\theta] = 0.5\ a_T$

$0.5\ a_T = -4.905\ \text{Sin}\,[\theta]$

Dado que la aceleración tangencial es:

$a_T = \alpha\,\text{R}$

Y a su vez:

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$a_T = R\,\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

Por consiguiente:

$$(0.5)\,(1.5)\,\omega \frac{d\omega}{d\theta} = -4.905\ \text{Sin}\,[\theta]$$

$$0.75\,\omega\, d\omega = -4.905\ \text{Sin}\,[\theta]\, d\theta \qquad (1)$$

Las condiciones iniciales son, para $\theta_B = -\text{ArcSin}\left[\frac{3}{5}\right]$, $v_{xB} = 2.801\ \frac{m}{s}$:

$$\theta_B = -36.87°$$

a partir de la rapidez lineal en B se puede calcular la rapidez angular en el mismo punto:

$$v_{xB} = \omega_B\, R$$

$$\omega_B\, R = v_{xB}$$

$$\omega_B = \frac{v_{xB}}{R}$$

$$\omega_B = \frac{2.801}{1.5}$$

$$\omega_B = 1.868\ \frac{\text{rad}}{s}$$

Se integran ambos miembros de la expresión 1:

$$\int_{1.868}^{\omega} 0.75\,\omega\, d\omega = \int_{-36.87°}^{\theta} -4.905\ \text{Sin}\,[\theta]\, d\theta$$

$$\frac{0.75}{2}\ \omega^2\,\Big]_{1.868}^{\omega} = 4.905\ \text{Cos}\,[\theta]\,\Big]_{-36.87°}^{\theta}$$

$$0.375\ \omega^2 - 0.375\ (1.868)^2 = 4.905\ \text{Cos}\,[\theta] - 4.905\ \text{Cos}\,[-36.87°]$$

$$0.375\ \omega^2 - 0.375\ (3.488) = 4.905\ \text{Cos}\,[\theta] - (4.905)\ (0.8)$$

$$0.375\ \omega^2 - 1.308 = 4.905\ \text{Cos}\,[\theta] - 3.924$$

$$0.375\ \omega^2 = 4.905\ \text{Cos}\,[\theta] - 3.924 + 1.308$$

$$\omega^2 = \frac{4.905}{0.375}\ \text{Cos}\,[\theta] - \frac{2.616}{0.375}$$

$$\omega^2 = 13..08\ \text{Cos}\,[\theta] - 6.976$$

Entonces, para $\theta_D = 45°$:

$$\omega_D^2 = 13.08\ \text{Cos}\,[45°] - 6.976$$

$$\omega_D^2 = 13.08\ (0.7071) - 6.976$$

$$\omega_D^2 = 9.249 - 6.976$$

$$\omega_D^2 = 2.273$$

$$\omega_D = \sqrt{2.273}$$

$$\omega_D = 1.508\ \frac{\text{rad}}{s}$$

Por tanto, la rapidez lineal en D es:

$$v_D = \omega_D\, R$$

$$v_D = (1.508)\ (1.5)$$

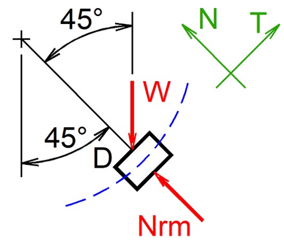
$$v_D = 2.261\ \frac{m}{s}$$

La rapidez en el punto D es:

$$v_D = 2.261\ \frac{m}{s}.$$

c) la fuerza normal en dicha posición

Para el cálculo de la fuerza normal en D, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque en dicha posición:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el bloque es:

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}_D\}$

$\overline{W} = \text{m g} \{\text{-Sin}[45°], \text{-Cos}[45°]\}$

$\overline{W} = 4.905 \{-0.7071, -0.7071\}$

$\overline{W} = \{-3.468, -3.468\}$ N

Por consiguiente, al aplicar la segunda ley de Newton, se obtiene:

$\overline{N} + \overline{W} = 0.5 \{a_{\text{TD}}, a_{\text{ND}}\}$

$\{0, \text{Nrm}_D\} + \{-3.468, -3.468\} = \{0.5\, a_{\text{TD}},\ 0.5\, a_{\text{ND}}\}$

$\{-3.468, \text{Nrm}_D - 3.468\} = \{0.5\, a_{\text{TD}},\ 0.5\, a_{\text{ND}}\}$

De donde:

$\text{Nrm}_D - 3.468 = 0.5\, a_{\text{ND}}$

$\text{Nrm}_D = 0.5\, a_{\text{ND}} + 3.468$ (2)

Dado que:

$a_{\text{ND}} = \omega_D^2 \text{ R}$

$a_{\text{ND}} = (2.273)(1.5)$

$a_{\text{ND}} = 3.410 \frac{m}{s^2}$

Luego de sustituir este valor en la expresión 2:

$\text{Nrm}_D = (0.5)(3.410) + 3.468$

$\text{Nrm}_D = 1.705 + 3.468$

$\text{Nrm}_D = 5.173$ N

La fuerza normal en el punto D es:

$\text{Nrm}_D = 5.173$ N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.5;
g = 9.81;
μk = 0.25;
xA = 0;
vxA = 0;
xB = 1;
R = 1.5;
θD = 45 °;
W = m g
```

a) las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal justo después de pasar por el punto B

Representación vectorial de las fuerzas aplicadas a bloque en el plano inclinado:

```
vN = {0, Nrm}
vW = W {3/5, -4/5}
vFr = {-Fr, 0}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton y obtención de la aceleración del bloque:

```
ec1 = vN + vW + vFr == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, Nrm}]
axSol = ax /. resp1[[1]]
Nsol = Nrm /. resp1[[1]]
Fr = μk Nsol
```

Obtención de la rapidez del bloque en el punto B:

$$ec2 = ax == vx \frac{dvx}{dx}$$

$$ec3 = \int_{vxA}^{vx} vx\, dvx == \int_{xA}^{x} axSol\, dx$$

```
resp3 = Solve[ec3, vx]
vxSol = vx /. resp3[[2]]
vxB = vxSol /. x → xB
```

Cálculo de las aceleraciones tangencial y normal en B:

```
aNBsol = vxB^2/R
ec4 = vN + vW == m {aTB, aNB}
resp4 = Solve[ec4, {aTB, aNB}]
aTBsol = aTB /. resp4[[1]]
```

b) la rapidez en el punto D

Representación vectorial de las fuerzas aplicadas a bloque en la trayectoria circular:

```
vN = {0, Nrm}
vW = W {-Sin[θ], -Cos[θ]}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton y obtención de las aceleraciones tangencial y normal:

```
ec5 = vN + vW == m {aT, aN}
resp5 = Solve[ec5, {aT, aN}]
aTsol = aT /. resp5[[1]]
aNsol = aN /. resp5[[1]]
```

Condiciones iniciales del movimiento en la trayectoria circular:

$$\theta B = -\mathrm{ArcSin}\left[\frac{3}{5}\right]$$

$$\omega B = \frac{vxB}{R}$$

Cálculo de la función de rapidez del bloque en la trayectoria circular:

$$ec6 = R\,\omega\,\frac{d\omega}{d\theta} == aTsol$$

$$ec7 = \int_{\omega B}^{\omega} R\,\omega\, d\omega == \int_{\theta B}^{\theta} aTsol\, d\theta$$

```
resp7 = Solve[ec7, ω]
ωSol = ω /. resp7[[2]]
```

Obtención de la rapidez lineal del bloque en el punto D

```
ωD = ωSol /. θ → θD
vD = ωD R
```

c) la fuerza normal en dicha posición

Representación vectorial de las fuerzas aplicadas a bloque en D:

```
vND = {0, NrmD}
vW = W {-Sin[θD], -Cos[θD]}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton y obtención de la aceleración normal en D:

```
ec8 = vND + vW == m {aTD, aND}
resp8 = Solve[ec8, {aTD, aND}]
aNDsol = aND /. resp8[[1]]
ec9 = aNDsol == ωD^2 R
resp9 = Solve[ec9]
NrmDsol = NrmD /. resp9[[1]]
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Academia de Dinámica
Febrero de 2023

Yukihiro Minami Koyama