Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Cuaderno de ejercicios resueltos
Cinemática y Dinámica

Autor: Yukihiro Minami Koyama

Trabajo y energía de la partícula, parte 1

Academia de Dinámica
División de Ciencias Básicas

Ejercicio 41

Deduzca, a partir de la segunda ley de Newton, la expresión para obtener la diferencial de trabajo que desarrolla una fuerza, así como la ecuación del trabajo y la energía.
Posteriormente, obtenga las expresiones para determinar el trabajo generado por las siguientes fuerzas, de una posición 1 a otra posición 2:

a) fuerza constante
b) fuerza de fricción cinética
c) fuerza normal
d) peso
e) fuerza restauradora lineal, generada por un resorte ideal.

Deducción de la expresión para obtener la diferencial de trabajo que desarrolla una fuerza

A partir de la segunda ley de Newton:

$$\overline{F} = \text{m}\,\overline{a}$$

Se posmultiplica escalarmente a ambos miembros el vector $d\overline{r}$:

$$\overline{F}\cdot d\overline{r} = \text{m}\,\overline{a}\cdot d\overline{r}$$

Considerando que la aceleración tiene componentes tangencial y normal, y que el vector $d\overline{r}$ es:

$$d\overline{r} = \{d\text{s}, 0\}$$

$$\overline{F}\cdot d\overline{r} = \text{m}\,\{a_T,\ a_N\}\cdot\{d\text{s}, 0\}$$

$$\overline{F}\cdot d\overline{r} = \text{m}\,a_T\,d\text{s}$$

Por otro lado, la aceleración tangencial es igual a:

$$a_T = \text{v}\,\frac{d\text{v}}{d\text{s}}$$

Se obtiene que:

$$\overline{F}\cdot d\overline{r} = \text{m}\,\text{v}\,\frac{d\text{v}}{d\text{s}}\,d\text{s}$$

$$\overline{F}\cdot d\overline{r} = \text{m}\,\text{v}\,d\text{v}$$

Se define como diferencial del trabajo, dU, desarrollado por la fuerza $\overline{F}$ a:

$$d\text{U} = \overline{F}\cdot d\overline{r}$$

Entonces, por definición, la diferencial del trabajo desarrollado por la fuerza $\overline{F}$ es:

$$d\text{U} = \text{m}\,\text{v}\,d\text{v}$$

Ecuación del trabajo y la energía

Si se integran ambos miembros de la última expresión, de la posición $\overline{r_1}$, para la cual la rapidez del cuerpo en estudio es v_1, a la posición $\overline{r_2}$, en donde tiene una rapidez v_2:

$$\int_{\overline{r_1}}^{\overline{r_2}} d\text{U} = \int_{v_1}^{v_2} \text{m}\,\text{v}\,d\text{v}$$

$$\text{U}\,\Big]_{\overline{r_1}}^{\overline{r_2}} = \frac{1}{2}\,\text{m}\,v^2\,\Big]_{v_1}^{v_2}$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\text{U}\,\Big]_{\overline{r_1}}^{\overline{r_2}} = U_{1\,a\,2}^{F}$$

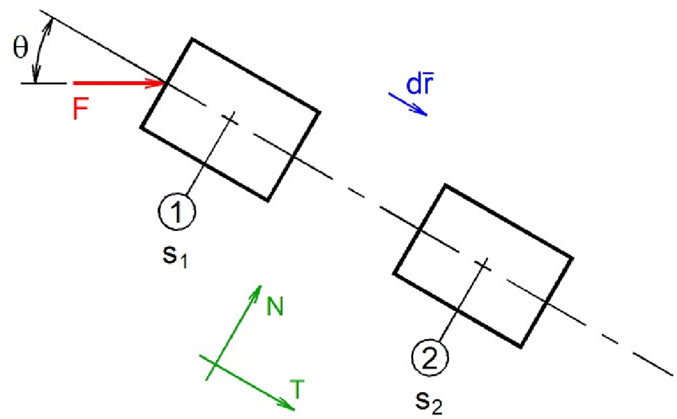
de manera que:

$$U_{1\,a\,2}^{F} = \frac{1}{2}\,\text{m}\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,\text{m}\,v_1^2$$

Esta ecuación es conocida como la del trabajo y la energía, debido a que el término $\frac{1}{2}$ m v^2 se le define como la energía cinética que tiene el cuerpo en estudio.
La ecuación anterior se puede leer como sigue:
“El trabajo desarrollado por la fuerza resultante F de todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo, de una posición 1 a otra posición 2, U_{1a2}^{F}, es igual al incremento de energía cinética que se produce en dicho cuerpo”.

a) fuerza constante

Una fuerza constante es aquella que tanto su magnitud como su dirección (sentido) no varían con respecto al tiempo. Para este tipo de fuerzas, la trayectoria debe ser rectilínea.
En el siguiente dibujo se muestra un ejemplo de este tipo de fuerza.



A partir de la definición de diferencial de trabajo:

$d\text{U} = \overline{F} \cdot d\overline{r}$

$d\text{U} = \{\text{F Cos}[\theta], \text{F Sin}[\theta]\} \cdot \{d\text{s}, 0\}$

$\int_1^2 d\text{U} = \int_{s_1}^{s_2} \text{F Cos}[\theta]\, d\text{s}$

$U_{1a2}^{F} = \text{F Cos}[\theta]\, \text{s}\,]_{s_1}^{s_2}$

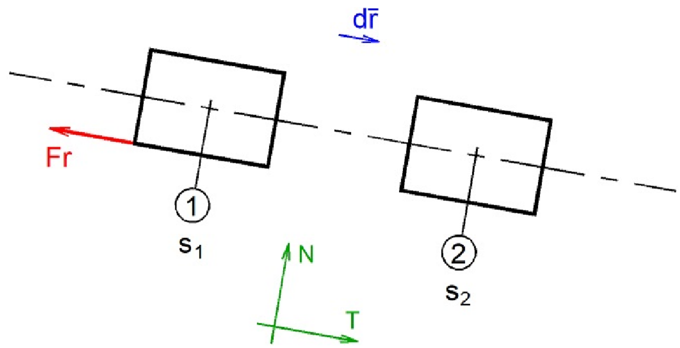
$U_{1a2}^{F} = \text{F Cos}[\theta]\,(s_2 - s_1)$

El trabajo que desarrolla una fuerza constante, de 1 a 2 es:

$U_{1a2}^{F} = \text{F Cos}[\theta]\,(s_2 - s_1)$.

b) fuerza de fricción cinética

Dado que la fuerza de fricción cinética es siempre tangencial a la trayectoria, considerando que es en contra del movimiento del cuerpo, tal como se muestra en el siguiente dibujo:



Dado que el ángulo que forma con la trayectoria es de 180°, a partir de la expresión de la fuerza constante, puede deducirse que:

$U_{1a2}^{F} = \text{F Cos}[\theta]\,(s_2 - s_1)$

$U_{1a2}^{\text{Fr}} = \text{magFr Cos}[180°]\,(s_2 - s_1)$

$U_{1a2}^{\text{Fr}} = \text{magFr}\,(\text{-}1)\,(s_2 - s_1)$

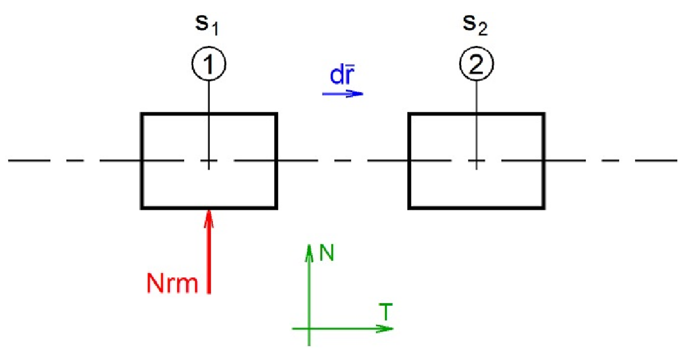
$U_{1a2}^{\text{Fr}} = \text{-magFr}\,(s_2 - s_1)$

El trabajo que desarrolla la fuerza de fricción cinética, de 1 a 2 es:

$U_{1a2}^{\text{Fr}} = -\text{magFr}\,(s_2 - s_1).$

c) fuerza normal

Por lo regular, la fuerza normal de un cuerpo sobre otro es perpendicular a la trayectoria.



Bajo las condiciones mencionadas, el trabajo que desarrolla de un punto a otro es nulo.

$U_{1a2}^{F} = \text{F Cos}[\theta]\,(s_2 - s_1)$

$U_{1a2}^{\text{Nrm}} = \text{magN Cos}[90°]\,(s_2 - s_1)$

$U_{1a2}^{\text{Nrm}} = \text{magN}\,(0)\,(s_2 - s_1)$

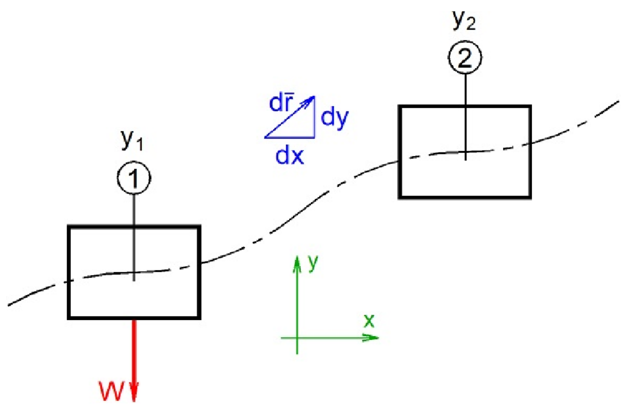
$U_{1a2}^{\text{Nrm}} = 0$

El trabajo que desarrolla la fuerza de normal, de 1 a 2, perpendicular a la trayectoria, es:

$U_{1a2}^{\text{Nrm}} = 0.$

d) peso

La fuerza conocida como peso, producida por la atracción gravitacional de la Tierra sobre el cuerpo, es siempre vertical. Entonces, independientemente de la trayectoria, el trabajo de que desarrolla el peso de una posición 1 a otra posición 2 puede deducirse a partir de la siguiente figura:



Entonces, el trabajo que desarrolla el peso, de la posición 1 a la 2 es:

$dU = \overline{W} \cdot d\overline{r}$

$dU = \{0, \text{-magW}\} \cdot \{dx, dy\}$

$dU = \text{-magW}\, dy$

$\int_1^2 dU = \int_{y_1}^{y_2} -\text{magW}\, dy$

$U_{1\,a\,2}^{W} = \text{-magW } y\,]_{y_1}^{y_2}$

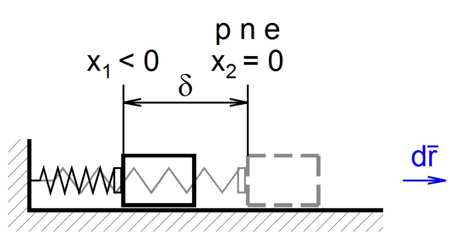
$U_{1\,a\,2}^{W} = \text{-magW}\,(y_2 - y_1)$

El trabajo que desarrolla el peso, de 1 a 2, es:

$U_{1\,a\,2}^{W} = -\text{magW}\,(y_2 - y_1).$

e) fuerza restauradora lineal (generada por un resorte ideal

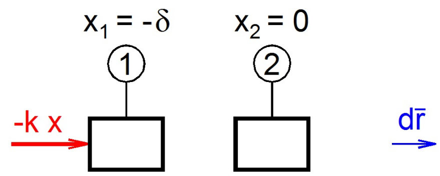
Si se considera que un resorte ideal en posición horizontal se fija en su extremo izquierdo, y a su lado derecho se coloca un cuerpo y se comprime dicho resorte una distancia δ, tal como se muestra en la figura siguiente:



Al punto natural de equilibrio del resorte se le designa con las siglas pne.

En el siguiente diagrama se ilustra la fuerza ejercida por el resorte, a la que se le denomina fuerza restauradora lineal. Se puede verificar que, si el resorte está comprimido hacia la izquierda, la fuerza que ejerce es hacia la derecha. Dado que se considera que el eje de referencia es positivo hacia la derecha, en este caso la posición x del resorte es negativa, por lo que la magntud de la fuerza del resorte es -k x, de manera que su valor sea positivo.

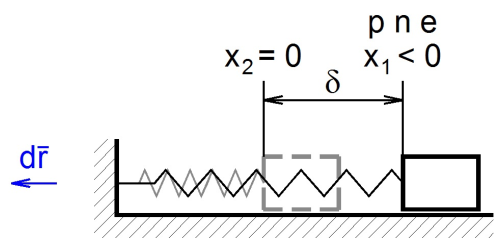
De otra manera, si el segmento dirigido está orientado a la derecha y el valor de la fuerza fuera negativo, implica que en realidad la fuerza actúa hacia la izquierda.



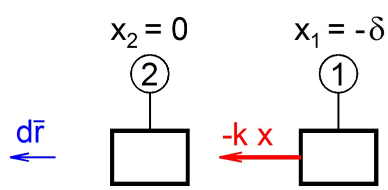
En este caso, la representación vectorial de la fuerza ejercida por el resorte es:

$\overline{F_k}$ = {-kx, 0}

La otra posibilidad es que el mismo resorte ideal en posición horizontal, fijo en su extremo izquierdo con el cuerpo también fijo al resorte del lado derecho, se le extiende una distancia δ, tal como se muestra en la figura siguiente:



Dado que la fuerza ejercida por el resorte es ahora hacia la izquierda, el cuerpo tenderá a moverse en dicho sentido, por lo que conviene que la referencia $\overline{\text{dr}}$ apunte también hacia la izquierda.
Bajo estas condiciones, el diagrama de cuerpo libre del cuerpo, incluyendo las posiciones de interés, se muestra en seguida:



Para este segundo caso, la representación vectorial de la fuerza ejercida por el resorte resulta ser la misma que el caso anterior:

$\overline{F_k}$ = {-kx, 0}

De donde, el trabajo que desarrolla la fuerza del resorte, de la posición 1 a la posición 2, considerando que esta última es la posición natural de equilibrio del resorte, es:

$$dU = \{-kx,\ 0\} \cdot d\bar{r}$$

$$dU = \{-kx,\ 0\} \cdot \{dx,\ 0\}$$

$$dU = -kx\, dx$$

$$\int_1^2 dU = \int_{x_1}^{x_2} -kx\, dx$$

$$U_{1a2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, x^2 \Big]_{x_1}^{x_2}$$

$$U_{1a2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, x_2^2 - \left(-\frac{1}{2}\, k\, x_1^2\right)$$

$$U_{1a2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, 0^2 + \frac{1}{2}\, k\, \delta^2$$

$$U_{1a2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, \delta^2$$

Esta expresión se puede generalizar, para una deformación inicial del resorte $x_1 = \delta_1$ y una deformación final $x_2 = \delta_2$, para las cuales la expresión queda:

$$U_{1\,a\,2}^{k} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$$

Finalmente, conviene mencionar que puede demostrarse que esta expresión es válida independientemente de la trayectoria que tenga el cuerpo.

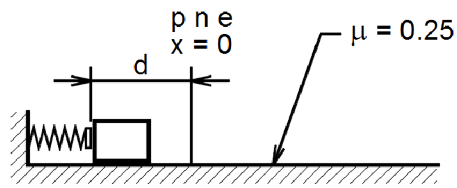
El trabajo que desarrolla la fuerza restauradora lineal es:

$$U_{1\,a\,2}^{k} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right).$$

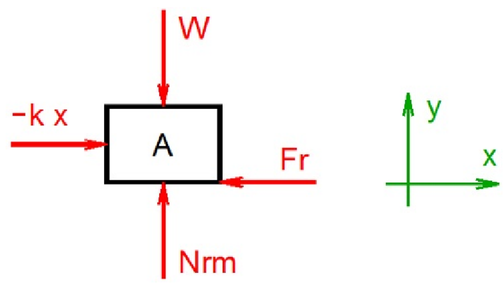
Ejercicio 42

Un cuerpo que pesa 20 N es lanzado sobre un plano horizontal por medio de un resorte cuya constante de rigidez es k = 500 $\frac{N}{m}$, tal como se muestra en la figura.

Si el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto es μ = 0.25, el resorte se deforma una longitud d = 0.30 m y se suelta desde el reposo, determine la distancia recorrida por el cuerpo medida a partir de la posición natural de equilibrio del resorte, pne.



Ante todo se dibuja el diagrama de cuerpo libre del cuerpo, mientras está en contacto con el resorte:



Dado que es posible determinar el trabajo que desarrollan todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es conveniente aplicar el método del trabajo y la energía.

Para determinar la magnitud de la fuerza de fricción, se requiere aplicar la segunda ley de Newton y, por consiguiente, se requiere obtener la representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$\overline{F_k}$ = {-k x, 0}

$\overline{\text{Fr}}$ = {-Fr, 0}

$\overline{N}$ = {0, Nrm}

$\overline{W}$ = {0, -W}

$\overline{W}$ = {0, -20} N

Entonces:

$\overline{F_k} + \overline{\text{Fr}} + \overline{N} + \overline{W}$ = m {a_x, 0}

{-k x, 0} + {-Fr, 0} + {0, Nrm} + {0, -20} = {m a_x, 0}

{-k x - Fr, Nrm - 20} = {m a_x, 0}

Se pueden establecer dos ecuaciones escalares:

-k x - Fr = m a_x

Nrm - 20 = 0

Nrm = 20 N

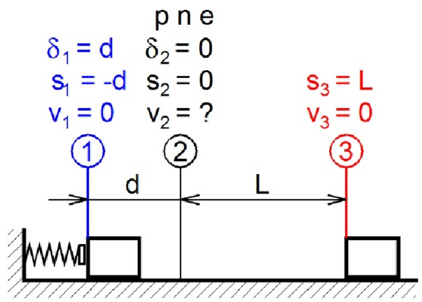
Por tanto, la magnitud de la fuerza de fricción es:

$Fr = \mu\, Nrm$

$Fr = 0.25\ (20)$

$Fr = 5\ N$

Para facilitar la aplicación del método del trabajo y la energía, se dibuja un diagrama en el que se puedan visualizar fácilmente los parámetros cineméticos del movimiento del cuerpo:



Dado que tanto el peso como la fuerza normal siempre son perpendiculares a la trayectoria, el trabajo desarrollado por estas fuerzas es cero.
Por consiguiente, sólo se requiere determinar el trabajo de la fuerza del resorte y el de la fuerza de fricción:

$U^{k}_{1\,a\,2} = -\frac{1}{2}\, k \left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$

$U^{k}_{1\,a\,2} = -\frac{1}{2}\, (500) \left((0)^2 - (0.30)^2\right)$

$U^{k}_{1\,a\,2} = (-250)\ (-0.09)$

$U^{k}_{1\,a\,2} = 22.5\ J$

$U^{Fr}_{1\,a\,3} = -Fr\ (s_3 - s_1)$

$U^{Fr}_{1\,a\,3} = -5\ [L - (-d)]$

$U^{Fr}_{1\,a\,3} = -5\ (L + 0.3)$

$U^{Fr}_{1\,a\,3} = -5\ L - 1.5$

Entonces, la expresión del trabajo y la energía desde el punto 1 hasta el punto 3 queda:

$U^{k}_{1\,a\,2} + U^{Fr}_{1\,a\,3} = \frac{1}{2}\ m\, v_3^2 - \frac{1}{2}\ m\, v_1^2$

Dado que tanto la rapidez inicial como la final son cero:

$22.5 - 5\ L - 1.5 = 0$

$5\ L = 21$

$L = \frac{21}{5}$

$L = 4.2\ m$

La distancia recorrida por el cuerpo medida desde la posición natural de equilibrio del resorte es:

$L = 4.2\ m.$

Resolución del problema con el empleo de funciones de Mathematica

Datos:

```
W = 20;
g = 9.81;
k = 500;
μ = 0.25;
d = 0.30;
m = W/g
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo

```
vFk = {-k x, 0}
vFr = {-Fr, 0}
vN = {0, Nrm}
vW = {0, -W}
```

Aplicación segunda ley de Newton y obtención de la magnitud de la fuerza de fricción

```
ec1 = vFk + vFr + vN + vW == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, Nrm}]
Nsol = Nrm /. resp1[[1]]
Fr = μ Nsol
```

Parámetros cinemáticos

```
δ1 = d;
s1 = -d;
v1 = 0;
δ2 = 0;
s2 = 0;
s3 = L
v3 = 0;
```

Cálculo del trabajo de las fuerzas del resorte y de fricción:

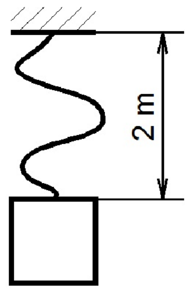
```
Uk1a2 = -1/2 k (δ2^2 - δ1^2)
UFr1a3 = -Fr (s3 - s1)
```

Método del trabajo y la energía

```
ec2 = Uk1a2 + UFr1a3 == 1/2 m v3^2 - 1/2 m v1^2
resp2 = Solve[ec2]
Lsol = L /. resp2[[1]]
```

Ejercicio 43

Un bloque de 5 kg está sujeto a un cable elástico y de masa despreciable con 5 m de longitud libre, con una constante de rigidez de $k = 100\ \frac{N}{m}$, y se suelta desde el reposo a partir de la posición mostrada en la figura.

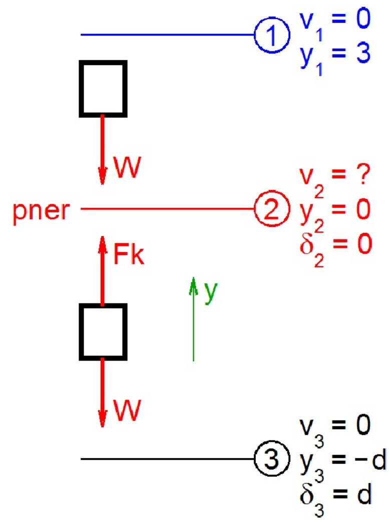


Determine la tensión máxima que debe soportar el cable.

Ante todo, es necesario establecer los intervalos de movimiento para proceder a resolver el problema.
El primer intervalo es desde el momento en que se suelta al bloque desde el reposo, hasta que el cable elástico empieza a trabajar.
El segundo intervalo es desde el momento en que dicho cable inicia su acción, hasta que el bloque alcanza por primera vez su posición más baja, que es donde dicho cable debe soportar la tensión máxima.

Para resolver este problema con la aplicación del método del trabajo y la energía, se requiere trazar el diagrama de cuerpo libre del bloque, en cada uno de los intervalos mencionados.
Además, para facilitar el cálculo del trabajo desarrollado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque, conviene establecer los parámetros de la posición del bloque con respecto a un marco de referencia y de la deformación del cable elástico.
Asimismo, para determinar la energía cinética que tiene el bloque en las posiciones de interés, se necesita conocer su rapidez.

En la siguiente figura se muestran tanto los diagramas de cuerpo libre en cada uno de los intervalos como el de los parámetros cinemáticos mencionados.



En el diagrama anterior, la posición inicial es la 1, aquélla en la que el cable elástico empieza a actuar es la 2 y la posición en la que el bloque llega al punto más bajo la 3.
Se establece que la referencia de la altura es el punto 2, por tanto:

$y_2 = 0$

Dado que el cable elástico tiene una longitud libre de 5 m y el bloque se soltó a 2 m medidos desde el techo hacia abajo, la altura inicial en el punto 1 es:

$y_1 = 5 - 2$

$y_1 = 3 \text{ m}$

Con base en el método del trabajo y la energía se puede calcular la rapidez del bloque cuando alcanza la posición natural de equilibrio del resorte, es decir, la posición 2.
Dado que la única fuerza que actúa en el primer intervalo es el peso, el trabajo que desarrolla es:

$U^{W}_{1a2} = - \text{W} (y_2 - y_1)$

Por consiguiente:

$U^{W}_{1a2} = -5\,(9.81)\,(0 - 3)$

$U^{W}_{1a2} = -49.05\,(-3)$

$U^{W}_{1a2} = 147.2 \text{ J}$

Con base en la expresión del trabajo y la energía:

$U^{W}_{1a2} = T_2 - T_1$

$U^{W}_{1a2} = \frac{1}{2}\text{ m } v_2^2 - \frac{1}{2}\text{ m } v_1^2$

$147.2 = \frac{1}{2}\,(5)\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,(5)\,(0)^2$

$2.5\, v_2^2 = 147.2$

$v_2^2 = \frac{147.2}{2.5}$

$v_2^2 = 58.86$

$v_2 = \sqrt{58.86}$

$v_2 = 7.672\ \frac{m}{s}$

Posteriormente, empleando el mismo método se puede calcular la posición más baja que alcanza el bloque, con base en los valores del trabajo desarrollado por la fuerza del cable elástico y del peso, tal como se muestra en seguida:

$$U^{k}_{2\,a\,3} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{k}\left(\delta_3^2 - \delta_2^2\right)$$

$$U^{k}_{2\,a\,3} = -\frac{1}{2}\,(100)\left[d^2 - (0)^2\right]$$

$$U^{k}_{2\,a\,3} = -50\,d^2$$

$$U^{W}_{2\,a\,3} = -\mathrm{W}\,(y_3 - y_2)$$

$$U^{W}_{2\,a\,3} = -49.05\,(-\mathrm{d} - 0)$$

$$U^{W}_{2\,a\,3} = 49.05\,\mathrm{d}$$

Entonces:

$$U^{k}_{2\,a\,3} + U^{W}_{2\,a\,3} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_3^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_2^2$$

Dado que:

$$v_2^2 = 58.86$$

$$-50\,d^2 + 49.05\,\mathrm{d} = \frac{1}{2}\,(5)\,(0) - \frac{1}{2}\,(5)\,(58.86)$$

$$-50\,d^2 + 49.05\,\mathrm{d} + 147.2 = 0$$

Se normaliza la expresión anterior dividiendo todos los términos por (-50):

$$\frac{-50}{-50}\,d^2 + \frac{49.05}{-50}\,\mathrm{d} + \frac{147.2}{-50} = \frac{0}{-50}$$

$$d^2 - 0.981\,\mathrm{d} - 2.943 = 0$$

Aplicando la fórmula simplificada del “chicharronero” :

$$d_{1,2} = -\frac{(-0.981)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.981}{2}\right)^2 + 2.943}$$

$$d_{1,2} = 0.4905 \pm \sqrt{(0.4905)^2 + 2.943}$$

$$d_{1,2} = 0.4905 \pm \sqrt{0.2406 + 2.943}$$

$$d_{1,2} = 0.4905 \pm \sqrt{3.184}$$

Se toma la raíz positiva:

$$d_1 = 0.4905 + 1.784$$

$$d_1 = 2.275\ \mathrm{m}$$

Dado que la deformación máxima del cable elástico es el valor anterior, se puede determinar la tensión máxima que debe soportar el cable con el empleo de la ley de Hooke:

$$T_{\max} = \mathrm{k}\,\delta_{\max}$$

$$T_{\max} = \mathrm{k}\,d_1$$

$$T_{\max} = 100\,(2.275)$$

$$T_{\max} = 227.5\ \mathrm{N}$$

La tensión máxima que debe soportar el cable elástico es:

$$T_{\max} = 227.5\ \mathrm{N}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 5;
L0 = 5;
h1 = 2;
k = 100;
g = 9.81;
W = m g
```

Parámetros cinemáticos del bloque:

```
y1 = L0 - h1
v1 = 0;
y2 = 0;
δ2 = 0;
y3 = -d;
δ3 = d;
v3 = 0;
```

Cálculo de la rapidez cuando alcanza la posición natural de equilibrio del cable elástico:

```
UW1a2 = -W (y2 - y1)
ec1 = UW1a2 == 1/2 m v2^2 - 1/2 m v1^2
resp1 = Solve[ec1]
v2sol = v2 /. resp1[[2]]
```

Cálculo de la posición más baja que alcanza el bloque:

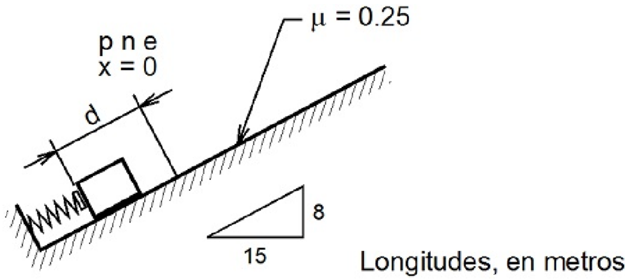
```
Uk2a3 = -1/2 k (δ3^2 - δ2^2)
UW2a3 = -W (y3 - y2)
ec2 = Uk2a3 + UW2a3 == 1/2 m v3^2 - 1/2 m v2sol^2
resp2 = Solve[ec2]
dSol = d /. resp2[[2]]
```

Determinación de la tensión máxima:

```
Tmax = k dSol
```

Ejercicio 44

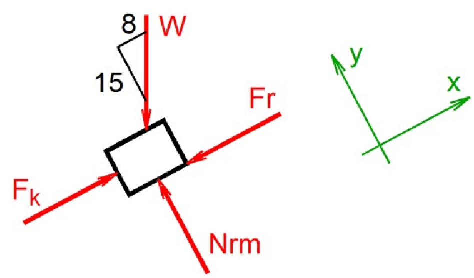
Se tiene un cuerpo con 3.4 kg de masa que es lanzado sobre un plano inclinado por medio de un resorte cuya constante de rigidez es k = 2000 $\frac{N}{m}$, tal como se muestra en la figura.



Si el coeficiente de fricción cinética entre el cuerpo y el plano es μ = 0.25, el resorte se deforma una longitud d = 0.2 m y se suelta desde el reposo, determine la distancia recorrida por el cuerpo medida a partir de la posición natural de equilibrio del resorte, pne.

El movimiento del cuerpo puede dividirse en dos partes, durante el tiempo en que el resorte lo empuja, a la que se le puede denominar disparo, y luego de que va subiendo por el plano inclinado hasta que se detiene.

Primero, se analizará durante el disparo, cuyo diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



Para aplicar el método del trabajo y la energía, es necesario conocer la magnitud de la fuerza de fricción, que puede obtenerse con base en la segunda ley de Newton.

A partir de la ecuación de movimiento puede calcularse la fuerza normal:

$\overline{F_k} = \{F_k, 0\}$

$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-Fr}, 0\}$

$\overline{W} = \text{m g}\left\{-\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right\}$

$\overline{W} = 3.4\ (9.81)\left\{-\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right\}$

$\overline{W} = \{-1.6\ (9.81), -3\ (9.81)\}$

$\overline{W} = \{-15.696, -29.43\}$ N

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$

Por tanto, la resultante es:

$\overline{R} = \overline{F_k} + \overline{\text{Fr}} + \overline{W} + \overline{N}$

$\overline{R} = \{F_k, 0\} + \{\text{-Fr}, 0\} + \{-15.696, -29.43\} + \{0, \text{Nrm}\}$

$\overline{R} = \{F_k - \text{Fr} - 15.696, -29.43 + \text{Nrm}\}$

Se sustituye en la expresión de la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \text{m}\ \{a_x,\ 0\}$

$\{F_k - \text{Fr} - 15.696, -29.43 + \text{Nrm}\} = 3.4\ \{a_x,\ 0\}$

Con base en la igualdad de las componentes en y:

-29.43 + Nrm = 0

Nrm = 29.43 N

Por consiguiente, la magnitud de la fuerza de fricción es:

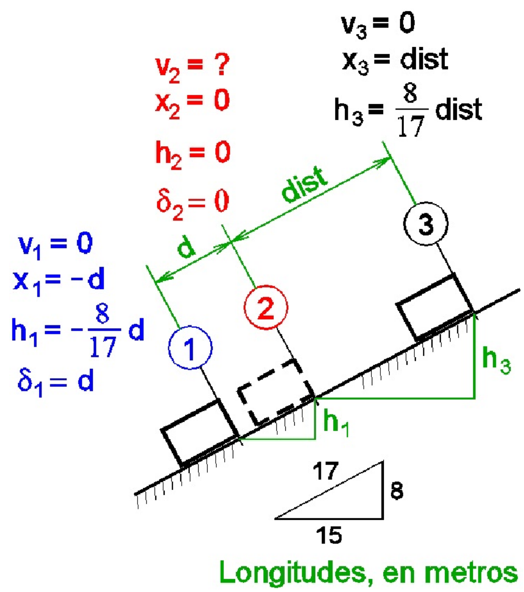
Fr = μ_k Nrm

Fr = (0.25) 29.43

Fr = 7.3575 N

Durante la segunda parte del movimiento, las fuerzas que actúan son las mismas excepto la fuerza del resorte, que ya no está en contacto con el cuerpo. Por consiguiente, la magnitud de la fuerza de fricción sigue siendo la misma, debido a que la fuerza del resorte solo tiene componente en x.

Para facilitar la aplicación del método del trabajo y la energía, se dibuja un diagrama en la que se puedan determinar con facilidad las posiciones y los parámetros del movimiento del cuerpo:



Las alturas h_1 y h_3 se pueden obtener por medio del teorema de la proporcionalidad de los triángulos semejantes. Se establece como referencia para medir las distancias y las alturas al punto 2. Por consiguiente, tanto x_1 como h_1 son negativos:

$$\frac{h_1}{d} = -\frac{8}{17}$$

$$h_1 = -\frac{8}{17}\,\text{d}$$

$$h_1 = -0.09412$$

$$\frac{h_3}{\text{dist}} = \frac{8}{17}$$

$$h_3 = \frac{8}{17}\,\text{dist}$$

Posteriormente, se obtienen los valores del trabajo de realiza cada una de las fuerzas de 1 a 3, tomando en cuenta que la fuerza del resorte solo actúa de 1 a 2:

$U^{k}_{1\,a\,2} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{k}\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$

$U^{k}_{1\,a\,2} = -\frac{1}{2}\ (2000)\left(0^2 - 0.2^2\right)$

$U^{k}_{1\,a\,2} = 1000\ (0.04)$

$U^{k}_{1\,a\,2} = 40\ \mathrm{J}$

$U^{\mathrm{Fr}}_{1\,a\,3} = \text{-magFr}\ (x_3 - x_1)$

$U^{\mathrm{Fr}}_{1\,a\,3} = -7.358\ [\mathrm{dist} - (-0.2)]$

$U^{\mathrm{Fr}}_{1\,a\,3} = -7.358\ \mathrm{dist} - 1.472$

$U^{W}_{1\,a\,3} = -\mathrm{m\ g}\ (h_3 - h_1)$

$U^{W}_{1\,a\,3} = -(3.4)\ (9.81)\ [\frac{8}{17}\ \mathrm{dist} - (-0.09412)]$

$U^{W}_{1\,a\,3} = -15.70\ \mathrm{dist} - 3.139$

$U^{\mathrm{Nrm}}_{1\,a\,3} = 0$

Dado que tanto la rapidez inicial como la final son cero, las energías cinéticas son:

$T_1 = \frac{1}{2}\ \mathrm{m}\ v_1^2$

$T_1 = \frac{1}{2}\ \mathrm{m}\ 0^2$

$T_1 = 0$

$T_3 = \frac{1}{2}\ \mathrm{m}\ v_3^2$

$T_3 = 0$

Se sustituyen los valores en la expresión de trabajo y energía:

$U^{k}_{1\,a\,2} + U^{\mathrm{Fr}}_{1\,a\,3} + U^{W}_{1\,a\,3} + U^{\mathrm{Nrm}}_{1\,a\,3} = T_3 - T_1$

$40 - 7.358\ \mathrm{dist} - 1.472 - 15.70\ \mathrm{dist} - 3.139 + 0 = 0 - 0$

$23.05\ \mathrm{dist} = 35.39$

$\mathrm{dist} = \frac{35.39}{23.05}$

$\mathrm{dist} = 1.535\ \mathrm{m}$

La distancia recorrida por el cuerpo medida desde la posición natural de equilibrio del resorte es:

$\mathrm{dist} = 1.535\ \mathrm{m}.$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 3.4;
g = 9.81;
k = 2000;
μk = 0.25;
d = 0.2;
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
vFk = {Fk, 0}
vFr = {-μ Nrm, 0}
vW = m g {-8/17, -15/17}
vN = {0, Nrm}
```

Cálculo de la resultante y sustitución en la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vFk + vFr + vW + vN == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, Nrm}]
Nsol = Nrm /. resp1⟦1⟧
```

Magnitud de la fuerza de fricción:

```
Fr = μk Nsol
```

Posiciones y parámetros del movimiento del cuerpo:

```
δ1 = d
x1 = -d;
h1 = -8/17 d;
v1 = 0;
δ2 = 0;
x2 = 0;
h2 = 0;
x3 = dist;
h3 = 8/17 dist;
v3 = 0;
```

Cálculo del trabajo realizado por cada fuerza y de las energías cinéticas:

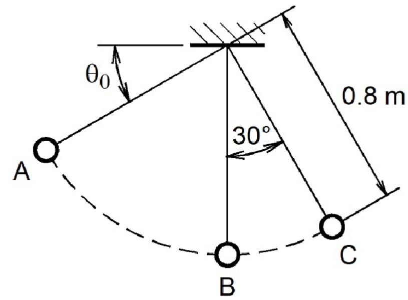
```
Uk1a2 = -1/2 k (δ2^2 - δ1^2)
UFr1a3 = -Fr (x3 - x1)
UW1a3 = -m g (h3 - h1)
UN1a3 = 0
T1 = 1/2 m v1^2
T3 = 1/2 m v3^2
```

Aplicación del método del trabajo y la energía durante todo el movimiento:

```
ec2 = Uk1a2 + UFr1a3 + UW1a3 + UN1a3 == T3 - T1
resp2 = Solve[ec2]
distSol = dist /. resp2[[1]]
```

Ejercicio 45

La péndola de un péndulo simple que tiene un peso de W = 1.2 N y se suelta desde cierta posición angular θ_0, tal como se muestra en la figura.



Determine:

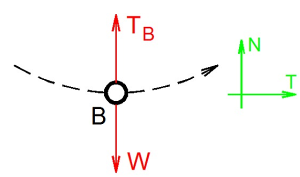
a) la rapidez que debe tener la péndola en B para que la tensión de la cuerda en esta posición tenga una magnitud de T_B = 3 N;

b) la posición angular θ_0 desde la que se soltó la péndola para cumplir con el inciso anterior;

c) la magnitud de la aceleración total de la péndola en el punto C.

a) la rapidez que debe tener la péndola en B para que la tensión de la cuerda en esta posición tenga una magnitud de T_B = 3 N

Para determinar la rapidez solicitada de la péndola, ante todo se dibuja su diagrama de cuerpo libre en dicha posición, considerando que se mueve hacia la derecha.



La representación vectorial de las fuerzas que actúan en la péndola es:

$\overline{T_B} = \{0, T_B\}$

Para este caso:

$\overline{T_B} = \{0, 3\}$

$\overline{W_B} = \{0, -W\}$

$\overline{W_B} = \{0, -1.2\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{T_B} + \overline{W_B} = m\,\{a_{B,Y}, a_{B,N}\}$

$\{0, 3\} + \{0, -1.2\} = \{m\, a_{B,T}, m\, a_{B,N}\}$

De donde se obtiene la siguiente ecuación escalar:

$3 - 1.2 = \frac{1.2}{9.81}\, a_{B,N}$

$1.8 = 0.1223\, a_{B,N}$

Dado que:

$a_{B,N} = \frac{v_B^2}{R}$

Luego de sustituir la expresión:

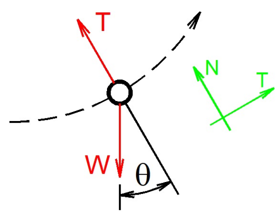
$$\frac{1.8}{0.1223} = \frac{v_B^2}{0.8}$$
$$v_B^2 = \frac{(1.8)\,(0.8)}{0.1223}$$
$$v_B^2 = 11.77$$
$$v_B = \sqrt{11.77}$$
$$v_B = 3.431\ \frac{m}{s}$$

La rapidez que debe tener la péndola en B para que la tensión de la cuerda tenga una magnitud $T_B = 3$ N es:

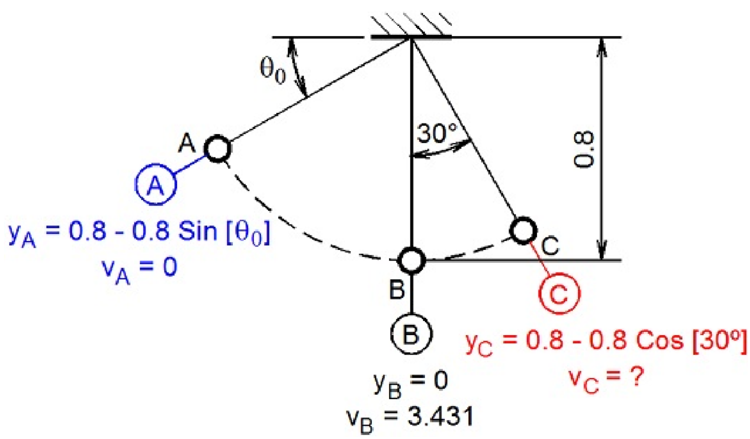
$$v_B = 3.431\ \frac{m}{s}.$$

b) la posición angular θ_0 desde la que se soltó la péndola para cumplir con el inciso anterior

El ángulo θ de referencia se mide con respecto a la horizontal hacia abajo a partir del punto donde la cuerda está amarrada al techo. Los ángulos medidos en sentido antihorario son positivos y, por consiguiente, si se miden en sentido horario, son negativos.
Para evitar problemas con los signos, la posición angular de la péndola debe ser tal que su ángulo sea positivo con respecto a la referencia establecida, en este caso a la derecha de la vertical:



Dado que las fuerzas que actúan sobre la péndola son la tensión de la cuerda y su peso, y la tensión siempre es perpendicular a su trayectoria circular, la única fuerza que desarrolla trabajo es el peso.
Se dibuja el diagrama de parámetros cinemáticos para simplificar la resolución de este inciso:



El trabajo que desarrolla el peso de A a B es:

$U^{W}_{A\,a\,B} = \text{-W}\ (y_B - y_A)$

$U^{W}_{A\,a\,B} = \text{-1.2}\ (0 - 0.8 + 0.8\ \text{Sin}\ [\theta_0])$

$U^{W}_{A\,a\,B} = 0.96 - 0.96\ \text{Sin}\ [\theta_0]$

Se establece la expresión del trabajo y la energía de A a B:

$U^{W}_{A\,a\,B} = \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_A^2$

$0.96 - 0.96\ \text{Sin}\ [\theta_0] = \frac{1}{2}\ \frac{1.2}{9.81}\ (3.431)^2 - 0$

$0.96 - (0.06116)\ (11.77) = 0.96\ \text{Sin}\ [\theta_0]$

$0.96\ \text{Sin}\ [\theta_0] = 0.96 - 0.7201$

$\text{Sin}\ [\theta_0] = \frac{0.2399}{0.96}$

$\text{Sin}\ [\theta_0] = 0.2499$

$\text{ArcSin}\ \{\text{Sin}\ [\theta_0]\} = \text{ArcSin}\ [0.2499]$

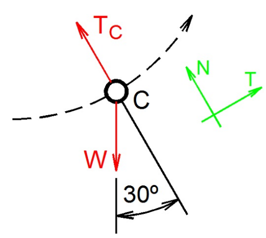
$\theta_0 = 14.47^{\circ}$

La posición angular θ_0 desde la que se soltó la péndola para que su rapidez en B sea de $v_B = 3.431\ \frac{m}{s}$ es:

$\theta_0 = 14.47^{\circ}$.

c) la magnitud de la aceleración total de la péndola en el punto C

En seguida, se muestra el diagrama de cuerpo libre de la péndola en el punto C:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre la péndola es:

$\overline{T_C} = \{0,\ T_C\}$

$\overline{W_C} = \text{W}\ \{\text{-Sin}\ [30^{\circ}],\ \text{-Cos}\ [30^{\circ}]\}$

$\overline{W_C} = 1.2\ \{-0.5,\ -0.8660\}$

$\overline{W_C} = \{-0.6,\ -1.039\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{T_C} + \overline{W_C} = \text{m}\ \{a_{C,T},\ a_{C,N}\}$

$\{0,\ T_C\} + \{-0.6,\ -1.039\} = \{0.1223\ a_{C,T},\ 0.1223\ a_{C,N}\}$

$\{-0.6,\ T_C - 1.039\} = \{0.1223\ a_{C,T},\ 0.1223\ a_{C,N}\}$

Se establecen dos ecuaciones escalares:

$-0.6 = 0.1223\ a_{C,T}$

$T_C - 1.039 = 0.1223\ a_{C,N}$

De la primera expresión se puede calcular la aceleración tangencial:

$$0.1223\, a_{C,T} = -0.6$$
$$a_{C,T} = -\frac{0.6}{0.1223}$$
$$a_{C,T} = -4.905\ \frac{m}{s^2}$$

Para calcular la aceleración normal, dado que no se conoce la magnitud de la tensión de la cuerda en el punto C, T_C, se puede emplear la expresión:

$$a_{C,N} = \frac{v_C^2}{R}$$

Para obtener la rapidez en C, se vuelve a emplear el método del trabajo y la energía, ahora de B a C:

$$U_{B\,a\,C}^{W} = -\mathrm{W}\,(y_C - y_B)$$
$$U_{B\,a\,C}^{W} = -1.2\,(0.8 - 0.8\ \mathrm{Cos}\,[30°] - 0)$$
$$U_{B\,a\,C}^{W} = -0.96 + 0.96\,(0.8660)$$
$$U_{B\,a\,C}^{W} = -0.96 + 0.8314$$
$$U_{B\,a\,C}^{W} = -0.1286\ \mathrm{J}$$

Con base en la expresión del trabajo y la energía, se obtiene que:

$$U_{B\,a\,C}^{W} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_C^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_B^2$$
$$-0.1286 = \frac{1}{2}\,(0.1223)\,v_C^2 - \frac{1}{2}\,(0.1223)\,(11.77)$$
$$0.06116\,v_C^2 = -0.1286 + (0.06116)\,(11.77)$$
$$0.06116\,v_C^2 = -0.1286 + 0.7199$$
$$v_C^2 = \frac{0.5913}{0.06116}$$
$$v_C^2 = 9.668$$

Por consiguiente, la aceleración normal es:

$$a_{C,N} = \frac{9.668}{0.8}$$
$$a_{C,N} = 12.09\ \frac{m}{s^2}$$

Entonces, la aceleración total de la péndola es:

$$\overline{a_C} = \{a_{C,T},\ a_{C,N}\}$$
$$\overline{a_C} = \{-4.905,\ 12.09\}$$

Y su magnitud es:

$$|\,\overline{a_C}\,| = \sqrt{(-4.905)^2 + (12.09)^2}$$
$$|\,\overline{a_C}\,| = \sqrt{24.06 + 146.0}$$
$$|\,\overline{a_C}\,| = \sqrt{170.1}$$
$$|\,\overline{a_C}\,| = 13.04\ \frac{m}{s^2}$$

La magnitud de la aceleración total de la péndola en la posición C es:

$$|\,\overline{a_C}\,| = 13.04\ \frac{m}{s^2}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
W = 1.2;
g = 9.81;
L = 0.8;
TB = 3;
θC = 30 °;
m = W/g
```

a) la rapidez que debe tener la péndola en B para que la tensión de la cuerda en esta posición tenga una magnitud de T_B = 3 N

Representación vectorial de las fuerzas:

```
vTB = {0, TB}
vWB = {0, -W}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vTB + vWB == m {aBT, aBN}
resp1 = Solve[ec1, {aBT, aBN}]
aBNsol = aBN /. resp1[[1]]
```

Obtención de la rapidez en el punto B

```
ec2 = aBNsol == vB^2/L
resp2 = Solve[ec2]
vBsol = vB /. resp2[[2]]
```

b) la posición angular θ_0 desde la que se soltó la péndola para cumplir con el inciso anterior

Parámetros cinemáticos

```
yA = L - L Sin[θ0]
vA = 0;
yB = 0;
yC = L - L Cos[θC]
```

Aplicación del método del trabajo y la energía

```
UWAaB = -W (yB - yA)
```

$$ec3 = UWAaB == \frac{1}{2} m\, vBsol^2 - \frac{1}{2} m\, vA^2$$

```
resp3 = FindRoot[ec3, {θ0, 1}]
θ0sol = θ0 /. resp3[[1]]
```

$$θ0deg = \frac{θ0sol}{°}$$

c) la magnitud de la aceleración total de la péndola en el punto C

Representación vectorial de las fuerzas:

```
vTC = {0, TC}
vWC = W {-Sin[θC], -Cos[θC]}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec4 = vTC + vWC == m {aCT, aCN}
resp4 = Solve[ec4, {aCT, aCN}]
aCTsol = aCT /. resp4[[1]]
```

Aplicación del método del trabajo y la energía

```
UWBaC = -W (yC - yB)
```

$$ec5 = UWBaC == \frac{1}{2} m\, vC^2 - \frac{1}{2} m\, vBsol^2$$

```
resp5 = Solve[ec5]
vCsol = vC /. resp5[[2]]
```

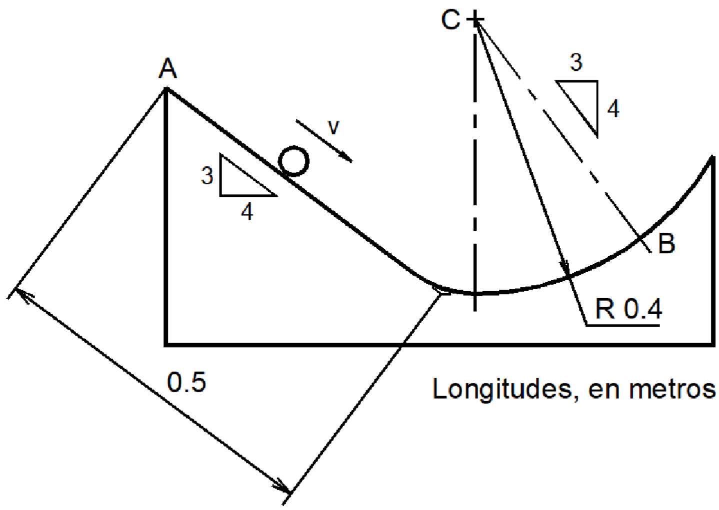
Obtención de la aceleración normal y la aceleración total en C

$$aCN = \frac{vCsol^2}{L}$$

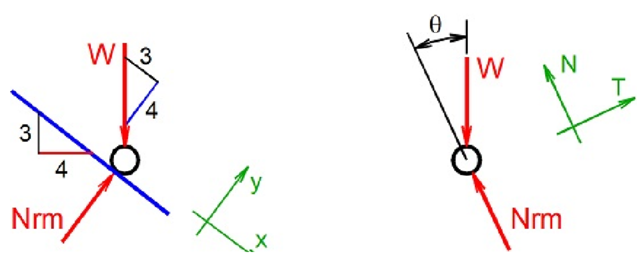
```
vaC = {aCTsol, aCN}
aC = Norm[vaC]
```

Ejercicio 46

Un balín de m = 0.1 kg de masa se suelta desde el reposo en el punto A sobre una pista formada por un tramo recto y una rampa circular, tal como se muestra en la figura.
Despreciando todo tipo de fricción que actúe sobre el balín, determine su rapidez en el punto B, así como las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal en dicho punto.
Sugerencia: para obtener la rapidez del balín, emplee el método del trabajo y la energía. Posteriormente, obtenga sus ecuaciones de movimiento en el punto B.



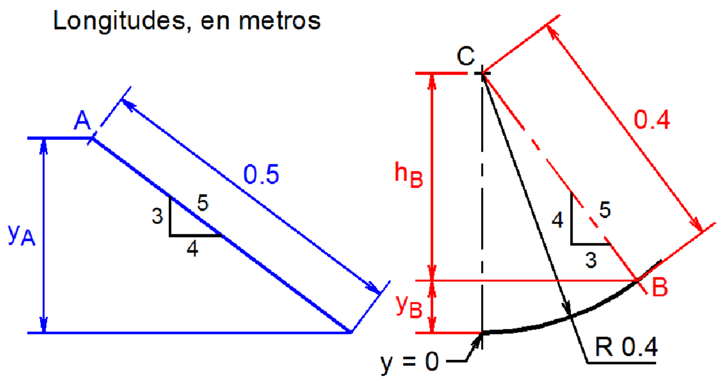
Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del balín, tanto sobre el tramo recto como sobre la rampa circular:



Como se puede observar, la única fuerza que desarrolla trabajo es el peso, ya que la fuerza normal siempre es perpendicular a la trayectoria.

La rapidez en el punto B

Conviene calcular las alturas de los puntos A y B, considerando el punto y = 0 indicado:



Para determinar las alturas de los puntos A y B, es necesario determinar las hipotenusas de los triángulos de pendiente de los ángulos que establecen sus posiciones respectivas:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{16 + 9}$$

$$\text{hip} = \sqrt{25}$$

$$\text{hip} = 5$$

Ahora, con base en el teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes, se pueden establecer la siguiente igualdad para el punto A:

$$\frac{y_A}{0.5} = \frac{3}{5}$$

$$y_A = \frac{3\,(0.5)}{5}$$

$$y_A = 0.3 \text{ m}$$

Y para el punto B:

$$\frac{h_B}{0.4} = \frac{4}{5}$$

$$h_B = \frac{4\,(0.4)}{5}$$

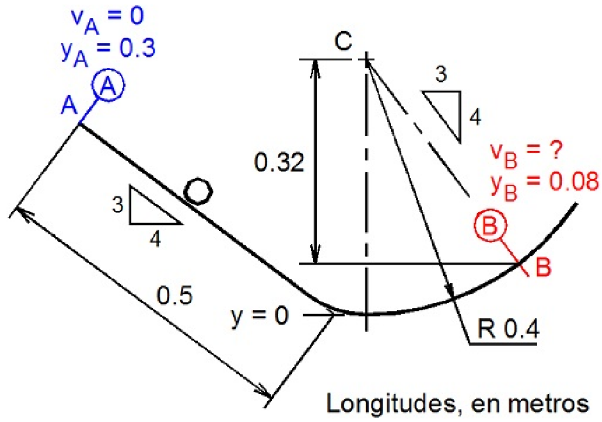
$$h_B = 0.32 \text{ m}$$

De donde:

$$y_B = 0.4 - 0.32$$

$$y_B = 0.08 \text{ m}$$

En la siguiente figura se muestra el diagrama de parámetros cinemáticos del problema:



Por consiguiente:

$U_{A\,a\,B}^{W} = \text{-W}\ (y_B - y_A)$

$U_{A\,a\,B}^{W} = \text{-0.1}\ (9.81)\ (0.08 - 0.3)$

$U_{A\,a\,B}^{W} = \text{-0.981}\ (\text{-0.22})$

$U_{A\,a\,B}^{W} = 0.2158\ \text{J}$

A partir del valor obtenido, se puede aplicar la expresión del trabajo y la energía:

$U_{A\,a\,B}^{W} = \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_A^2$

$0.2158 = \frac{1}{2}\ (0.1)\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ (0.1)\ (0)^2$

$0.05\ v_B^2 = 0.2158$

$v_B^2 = \frac{0.2158}{0.05}$

$v_B^2 = 4.316$

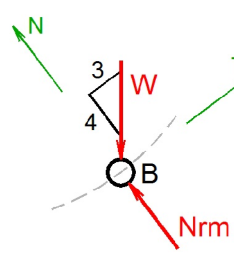
$v_B = 2.078\ \frac{m}{s}$

La rapidez del balín en el punto B es:

$v_B = 2.078\ \frac{m}{s}$.

Las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal en el punto B

Para determinar las magnitudes de las aceleraciones solicitadas, es necesario dibujar el diagrama de cuerpo libre del balín en dicho punto:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el balín es:

$\overline{W} = \text{W}\left\{-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$

$\overline{W} = 0.1\ (9.81)\ \{-0.6, -0.8\}$

$\overline{W} = 0.981\ \{-0.6, -0.8\}$

$\overline{W} = \{-0.5886, -0.7848\}\ \text{N}$

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{W} + \overline{N} = \text{m}\ \left\{a_{B,T}, a_{B,N}\right\}$

$\{-0.5886, -0.7848\} + \{0, \text{Nrm}\} = 0.1\ \left\{a_{B,T}, a_{B,N}\right\}$

$\{-0.5886, \text{Nrm} - 0.7848\} = 0.1\ \left\{a_{B,T}, a_{B,N}\right\}$

De donde:

$-0.5886 = 0.1\ a_{B,T}$

$0.1\ a_{B,T} = -0.5886$

$a_{B,T} = \frac{-0.5886}{0.1}$

$a_{B,T} = -5.886\ \frac{m}{s^2}$

Y para calcular la magnitud de la aceleración normal, se establece la siguiente expresión:

$a_{B,N} = \frac{v_B^2}{R}$

$a_{B,N} = \frac{4.316}{0.4}$

$a_{B,N} = 10.79\ \frac{m}{s^2}$

Las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal en el punto B son:

$a_{B,T} = -5.886\ \frac{m}{s^2}$ y $a_{B,N} = 10.79\ \frac{m}{s^2}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.1;
g = 9.81;
R = 0.4;
L = 0.5;
Δx = 4;
Δy = 3;
vA = 0;
```

La rapidez en el punto B

Cálculo de las alturas de los puntos A y B

```
ec1 = yA/L == 3/5
resp1 = Solve[ec1]
yAsol = yA /. resp1[[1]]
ec2 = hB/R == 4/5
resp2 = Solve[ec2]
hBsol = hB /. resp2[[1]]
yB = R - hBsol
```

Aplicación del método del trabajo y la energía

```
UWAaB = -m g (yB - yAsol)
ec3 = UWAaB == 1/2 m vB^2 - 1/2 m vA^2
resp3 = Solve[ec3]
vBsol = vB /. resp3[[2]]
```

Las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal en el punto B

Representación vectorial de las fuerzas

```
vW = m g {-3/5, -4/5}
vN = {0, Nrm}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton y cálculo de las magnitudes de las aceleraciones tangencial y normal

```
ec4 = vW + vN == m {aBT, aBN}
resp4 = Solve[ec4, {aBT, Nrm}]
aBTsol = aBT /. resp4[[1]]
aBN = vBsol^2/R
```

Ejercicio 47

En La Feria de Chapultepec, cuando funcionaba, existía un juego mecánico llamado El Cascabel, uno de los más populares, cuya vista frontal se muestra en la figura 1.

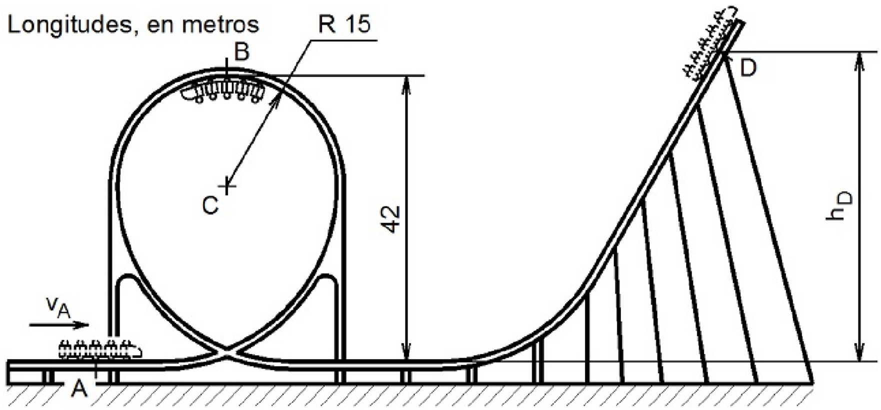


Figura 1 Vista frontal de El Cascabel.

En el punto A el carro tiene la rapidez v_A suficiente para dar la vuelta al rizo, siempre en contacto con los rieles y, luego de bajar, alcanza el punto D donde se detiene un instante, antes de volver a bajar y dar nuevamente la vuelta al rizo ahora de reversa, antes de detenerse y terminar el juego. Suponiendo que la fricción entre las ruedas y los rieles así como la resistencia del aire es despreciable, y que el carro se puede considerar una partícula con una masa m = 1000 kg, determine:

a) la rapidez mínima que se requiere en B para que el carro esté en contacto con los rieles;

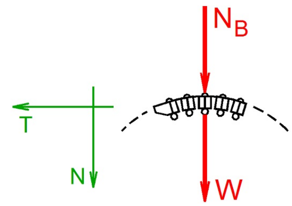
b) suponiendo la rapidez en B obtenida en el inciso anterior, cuál debe ser la rapidez del carro en el punto A; y

c) con base en los resultados anteriores, cuál es la altura h_D que alcanza el carro.

La resolución de este problema se facilita con el empleo del método del trabajo y la energía. Primero, se obtiene la rapidez en B de manera que el carro esté en contacto con los rieles. Conocida esta rapidez, se puede calcular la rapidez necesaria en el punto A. Finalmente, es posible determinar la altura h_D que alcanza el carro.

a) la rapidez mínima que se requiere en B para que el carro esté en contacto con los rieles

Para resolver este inciso, primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carro en dicho punto.



La representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el carro, en la que la primera componente es la tangencial y la segunda la normal:

$\overline{N_B} = \{0, N_B\}$

$\overline{W} = \{0, \text{m g}\}$

$\overline{W} = \{0, 1000\ (9.81)\}$

$\overline{W} = \{0, 9810\}$ N

Para que el carro siempre esté en contacto con los rieles es necesario que:

$N_B > 0$

En el límite, cuando está a punto de despegarse, se puede considerar que:

$N_B = 0$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{N_B} + \overline{W} = \text{m}\ \overline{a_B}$

$\{0, 0\} + \{0, 9810\} = 1000\ \{a_{T,B},\ a_{N,B}\}$

Por consiguiente:

$9810 = 1000\ a_{N,B}$

Dado que la aceleración normal en el punto B se puede calcular como:

$a_{N,B} = \frac{v_B^2}{\rho_B}$

Y el radio de curvatura en dicho punto es:

$\rho_B = 15$ m

$a_{N,B} = \frac{v_B^2}{15}$

Entonces:

$9840 = 1000\ \frac{v_B^2}{15}$

$1000\ v_B^2 = 9810\ (15)$

$v_B^2 = \frac{147\,150}{1000}$

$v_B^2 = 147.15$

$v_B = \sqrt{147.15}$

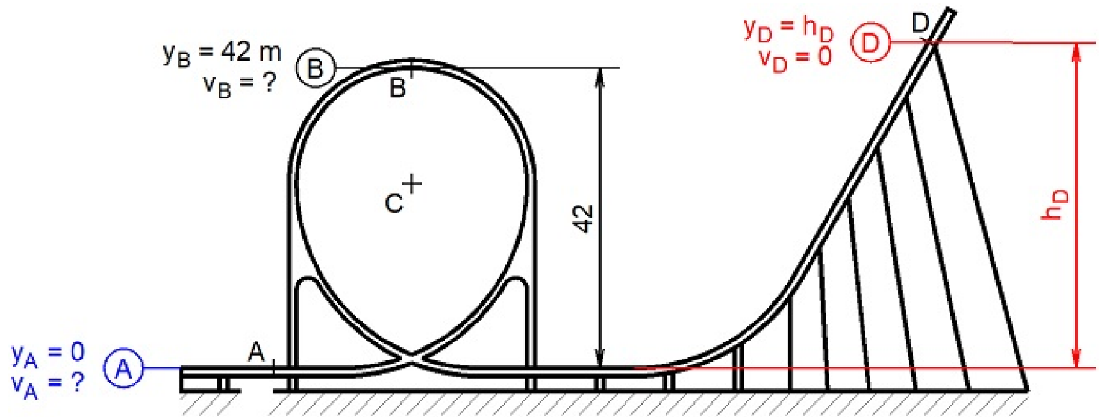
$v_B = 12.13\ \frac{m}{s}$

La rapidez mínima que se requiere en B para que el carro esté en contacto con los rieles es:

$v_B = 12.13\ \frac{m}{s}$.

b) suponiendo la rapidez en B obtenida en el inciso anterior, cuál debe ser la rapidez del carro en el punto A

Dado que las fuerzas que actúan todo el tiempo sobre el carro son el peso y la normal, y ésta siempre es perpendicular a su trayectoria, se requiere determinar las posiciones y rapideces del carro en los puntos de interés.
En la siguiente figura se muestra el diagrama correspondiente:



Para obtener la rapidez en el punto A, se calcula el trabajo de las fuerzas que actúan en el carro de A a B:

$U_{A\,a\,B}^{\text{Nrm}} = 0$

$U_{A\,a\,B}^{W} = -\text{ W }(y_B - y_A)$

$U_{A\,a\,B}^{W} = -9810\ (42 - 0)$

$U_{A\,a\,B}^{W} = -412{,}020$ J

Se aplica la expresión del trabajo y la energía para dichos puntos:

$U_{A\,a\,B}^{\text{Nrm}} + U_{A\,a\,B}^{W} = T_B - T_A$

$0 - 412{,}020 = \frac{1}{2}\text{ m } v_B^2 - \frac{1}{2}\text{ m } v_A^2$

Como:

$v_B^2 = 147.15$

$412{,}020 = \frac{1}{2}\ (1000)\ (147.15) - \frac{1}{2}\ (1000)\ v_A^2$

$500\ v_A^2 = 412{,}020 + 500\ (147.15)$

$500\ v_A^2 = 412{,}020 + 73{,}575$

$v_A^2 = \frac{485{,}595}{500}$

$v_A^2 = 971.2$

$v_A = \sqrt{971.2}$

$v_A = 31.16\ \frac{m}{s}$

La rapidez del carro en el punto A para que la rapidez en B sea la obtenida es:

$v_A = 31.16\ \frac{m}{s}$.

c) con base en los resultados anteriores, cuál es la altura h_D que alcanza el carro

Para resolver este inciso, se requiere calcular el trabajo de las fuerzas que actúan en el carro de B a D:

$$U_{B\,a\,D}^{\text{Nrm}} = 0$$
$$U_{B\,a\,D}^{W} = -\,\text{W}\,(y_D - y_B)$$

Luego de sustituir los valores conocidos:

$$U_{B\,a\,D}^{W} = -\,9810\,(h_D - 42)$$
$$U_{B\,a\,D}^{W} = -9810\,h_D + 9810\,(42)$$
$$U_{B\,a\,D}^{W} = 412{,}020 - 9810\,h_D$$

Se aplica el método del trabajo y la energía entre dichos puntos:

$$U_{B\,a\,D}^{\text{Nrm}} + U_{B\,a\,D}^{W} = T_D - T_B$$
$$0 + 412{,}020 - 9810\,h_D = \tfrac{1}{2}\,\text{m}\,v_D^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{m}\,v_B^2$$

Dado que:

$$v_D = 0$$
$$v_B^2 = 147.15$$
$$412{,}020 - 9810\,h_D = \tfrac{1}{2}\,(1000)\,(0)^2 - \tfrac{1}{2}\,(1000)\,(147.15)$$
$$9810\,h_D = 412{,}020 + 500\,(147.15)$$
$$h_D = \frac{412{,}020 + 73{,}575}{9810}$$
$$h_D = \frac{485{,}595}{9810}$$
$$h_D = 49.5\ \text{m}$$

La altura que alcanza el carro en el punto D es:

$h_D = 49.5$ m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
ρB = 15;
yB = 42;
m = 1000;
g = 9.81;
W = m g
```

a) la rapidez mínima que se requiere en B para que el carro esté en contacto con los rieles

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el carro:

```
vN = {0, Nrm}
vW = {0, W}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton para el cálculo de la rapidez mínima en B

```
ec1 = vN + vW == m {aT, aN}
aNB = vB^2/ρB
resp1 = Solve[(ec1 /. {Nrm → 0, aN → aNB}), {aT, vB}]
vBsol = vB /. resp1[[2]]
```

b) suponiendo la rapidez en B obtenida en el inciso anterior, cuál debe ser la rapidez del carro en el punto A

Aplicación del método del trabajo y la energía de A a B:

```
yA = 0;
vD = 0;
UNAaB = 0;
UWAaB = -W (yB - yA)
ec2 = UNAaB + UWAaB == 1/2 m vBsol^2 - 1/2 m vA^2
resp2 = Solve[ec2]
vAsol = vA /. resp2[[2]]
```

c) con base en los resultados anteriores, cuál es la altura h_D que alcanza el carro

Aplicación del método del trabajo y la energía de B a D:

```
UNBaD = 0;
UWBaD = -W (hD - yB)
ec3 = UNBaD + UWBaD == 1/2 m vD^2 - 1/2 m vBsol^2
resp3 = Solve[ec3]
hDsol = hD /. resp3[[1]]
```

Ejercicio 48

Un bloque con peso W = 15.6 N, se coloca sobre una rampa rugosa con una pendiente de bajada m = $\frac{5}{12}$ y se suelta desde el reposo, tal como se muestra en la figura 1.

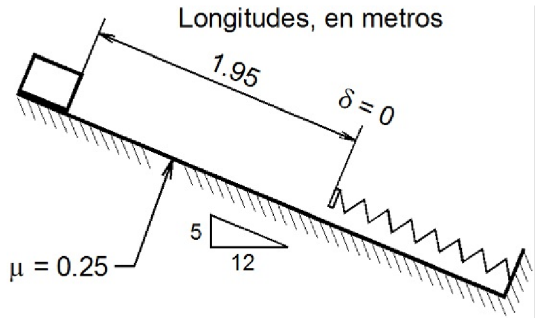


Figura 1 Configuración mecánica de un bloque sobre una rampa y un resorte.

Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la rampa es $\mu = 0.25$ y el resorte compuesto produce una fuerza P en función de la deformación δ mostrada en la figura 2, determine:

a) la rapidez con la que el bloque hace contacto con el resorte;

b) la expresión del trabajo de la fuerza P en función de la deformación máxima d, suponiendo que está en el intervalo $0.1 \leq d \leq 0.5$; y

c) la deformación máxima d que sufre el resorte para detener el movimiento del bloque.

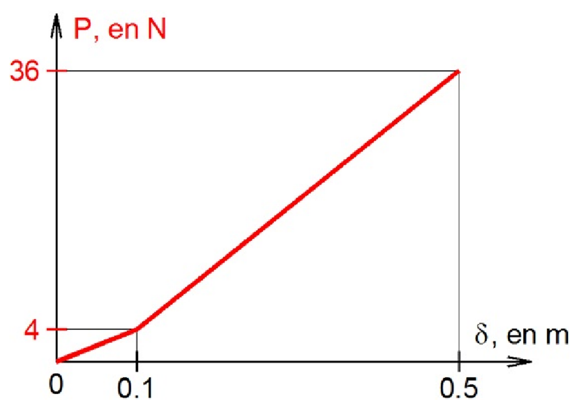
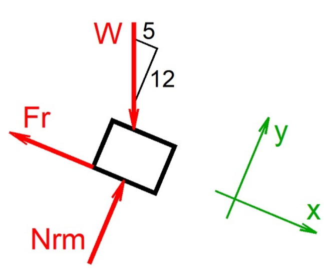


Figura 2 Gráfica de la fuerza P con respecto a la deformación δ.

La resolución de este problema puede facilitarse con la aplicación del método del trabajo y la energía.

a) la rapidez con la que el bloque hace contacto con el resorte

Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque, cuando el resorte aún no está haciendo contacto:



La hipotenusa del triángulo de pendiente del peso es:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{25 + 144}$$

$$\text{hip} = \sqrt{169}$$

$$\text{hip} = 13$$

La representación vectorial de las fuerzas que actúan son:

$$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-Fr}, 0\}$$

$$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$$

$$\overline{W} = \text{W}\left\{\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\}$$

$$\overline{W} = 15.6\left\{\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\}$$

$$\overline{W} = \{6, \text{-}14.4\}\ \text{N}$$

Luego, se aplica la segunda ley de Newton:

$$\overline{\text{Fr}} + \overline{N} + \overline{W} = \text{m}\ \overline{a}$$

$$\{\text{-Fr}, 0\} + \{0, \text{Nrm}\} + \{6, \text{-}14.4\} = \frac{15.6}{9.81}\ \{a_x, 0\}$$

$$\{6 - \text{Fr}, \text{Nrm} - 14.4\} = 1.59\ \{a_x, 0\}$$

De esta expresión vectorial se pueden establecer dos ecuaciones escalares:

$$6 - \text{Fr} = 1.59\ a_x$$

$$\text{Nrm} - 14.4 = 0$$

$$\text{Nrm} = 14.4\ \text{N}$$

Y dado que la fuerza de fricción es cinética:

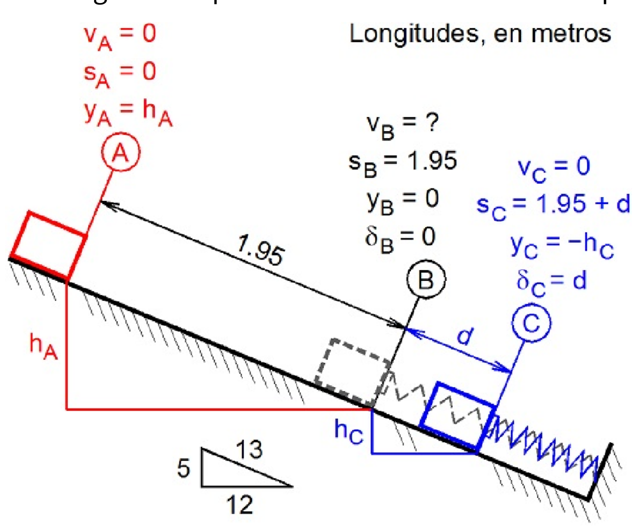
$$\text{Fr} = \mu\ \text{Nrm}$$

$$\text{Fr} = 0.25\ (14.4)$$

$$\text{Fr} = 3.6\ \text{N}$$

Posteriormente, se calcula el trabajo desarrollado por todas las fuerzas que actúan sobre el bloque del punto A al punto B.

A continuación se muestra el diagrama de parámetros cinemáticos del bloque:



Se pueden calcular las alturas h_A y h_C con base en el teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes:

$$\frac{h_A}{1.95} = \frac{5}{13}$$
$$h_A = \frac{5\,(1.95)}{13}$$
$$h_A = 0.75\text{ m}$$
$$\frac{h_C}{d} = \frac{5}{13}$$
$$h_C = \frac{5}{13}\text{ d}$$

El trabajo desarrollado por las fuerzas que actúan de A a B es el siguiente:

$$U_{A\,a\,B}^{W} = \text{-Fr}\,(s_B - s_A)$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = -3.6\,(1.95 - 0)$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = -7.02\text{ J}$$
$$U_{A\,a\,B}^{\text{Nrm}} = 0$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = \text{-W}\,(y_B - y_A)$$
$$y_A = h_A$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = -15.6\,(0 - 0.75)$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = 11.7\text{ J}$$

Entonces, con base en la expresión del trabajo y la energía:

$$U_{A\,a\,B}^{\text{Fr}} + U_{A\,a\,B}^{\text{Nrm}} + U_{A\,a\,B}^{W} = T_B - T_A$$
$$-7.02 + 0 + 11.7 = \frac{1}{2}\,(1.59)\,v_B^2 - \frac{1}{2}\,(1.59)\,v_A^2$$
$$4.68 = 0.795\,v_B^2 - 0.795\,(0)^2$$
$$0.795\,v_B^2 = 4.68$$
$$v_B^2 = \frac{4.68}{0.795}$$
$$v_B^2 = 5.887$$
$$v_B = \sqrt{5.887}$$
$$v_B = 2.426\,\frac{m}{s}$$

La rapidez con la que el bloque hace contacto con el resorte en el punto B es:

$$v_B = 2.426\,\frac{m}{s}.$$

b) la expresión del trabajo de la fuerza P en función de la deformación máxima d, suponiendo que está en el intervalo 0.1 ≤ d ≤ 0.35

Con base en la expresión de la diferencial de trabajo:

$$d\text{U} = \overline{F} \cdot \overline{dr}$$

Dado que para la fuerza P:

$$\overline{P} = \{\text{-P}, 0\}$$

De la gráfica de la fuerza P, para el intervalo $0 \le \delta \le 0.1$, la pendiente es:

$$\text{m} = \frac{\Delta\text{P}}{\Delta\delta}$$
$$\text{m} = \frac{4}{0.1}$$
$$\text{m} = 40$$

Por tanto, la ecuación de la recta es:

$$P = 40\,\delta$$

En el intervalo $0.1 \le \delta \le 0.5$, la ecuación se puede obtener con base en la expresión de la recta que pasa por dos puntos $P_1(0.1, 4)$, $P_2(0.5, 36)$:

$$P - 36 = \frac{36-4}{0.5-0.1}\,(\delta - 0.5)$$

$$P - 36 = \frac{32}{0.4}\,(\delta - 0.5)$$

$$P - 36 = 80\,(\delta - 0.5)$$

$$P = 80\,\delta - 40 + 36$$

$$P = 80\,\delta - 4$$

De donde:

$$P = \begin{cases} 40\,\delta & 0 \le \delta \le 0.1 \\ 80\,\delta - 4 & 0.1 \le \delta \le 0.5 \end{cases}$$

$$\overline{d\,r} = \{d\delta, 0\}$$

Por consiguiente:

$$d\,U = -P\,d\delta$$

Entonces:

$$\int_{B\,a\,C}^{P} d\,U = \int_{0}^{0.1} -40\,\delta\,d\,\delta + \int_{0.1}^{d} -(80\,\delta - 4)\,d\,\delta$$

$$U_{B\,a\,C}^{P} = -\frac{1}{2}\,40\,\delta^2\,\Big]_0^{0.1} - \left(\frac{1}{2}\,80\,\delta^2 - 4\,\delta\right)\Big]_{0.1}^{d}$$

$$U_{B\,a\,C}^{P} = -20\,(0.1)^2 - [-20\,(0)^2] - 40\,d^2 + 4\,d - \left[-40\,(0.1)^2 + 4\,(0.1)\right]$$

$$U_{B\,a\,C}^{P} = -20\,(0.01) - 40\,d^2 + 4\,d - [-40\,(0.01) + 0.4]$$

$$U_{B\,a\,C}^{P} = -0.2 - 40\,d^2 + 4\,d - (-0.4 + 0.4)$$

$$U_{B\,a\,C}^{P} = -40\,d^2 + 4\,d - 0.2$$

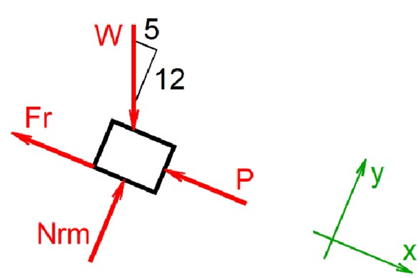
$$U_{B\,a\,C}^{P} = -40\,d^2 + 4\,d - 0.2$$

La expresión del trabajo de P en función de la deformación máxima d es:

$$U_{B\,a\,C}^{P} = -40\,d^2 + 4\,d - 0.2.$$

c) la deformación máxima d que sufre el resorte para detener el movimiento del bloque

Para resolver este inciso, conviene dibujar el diagrama de cuerpo libre del bloque, cuando el resorte ya está actuando:



En este caso, las fuerzas que desarrollan trabajo son: la fuerza de fricción, el peso y la fuerza del resorte, dado que el trabajo de la normal es nulo.

La magnitud de la fuerza de fricción es la misma que la del intervalo de movimiento anterior. Entonces, sus valores son:

$U^{Fr}_{B\,a\,C} = \text{-Fr}\,(s_C - s_B)$

$U^{Fr}_{B\,a\,C} = \text{-3.6}\,(1.95 + \text{d} - 1.95)$

$U^{Fr}_{B\,a\,C} = \text{-3.6 d}$

$U^{W}_{B\,a\,C} = \text{-W}\,(y_C - y_B)$

$U^{W}_{B\,a\,C} = \text{-15.6}\,(-h_C - 0)$

$h_C = \frac{5}{13}\,\text{d}$

$U^{W}_{B\,a\,C} = \text{-15.6}\left(-\frac{5}{13}\,d\right)$

$U^{W}_{B\,a\,C} = 6\,\text{d}$

Y finalmente, se considera el resultado del inciso anterior:

$U^{P}_{B\,a\,C} = -40\,d^2 + 4\,d - 0.62$

Se aplica la expresión del trabajo y la energía en el intervalo considerado:

$U^{Fr}_{B\,a\,C} + U^{W}_{B\,a\,C} + U^{P}_{B\,a\,C} = \frac{1}{2}\,\text{m}\,v_C^2 - \frac{1}{2}\,\text{m}\,v_B^2$

$v_B^2 = 5.887$

$\text{-3.6 d} + 6\,\text{d} - 40\,d^2 + 4\,d - 0.2 = \frac{1}{2}\,(1.59)\,(0)^2 - \frac{1}{2}\,(1.59)\,(5.887)$

$-40\,d^2 + 6.4\,d - 0.2 = -4.68$

$-40\,d^2 + 6.4\,d - 0.2 + 4.68 = 0$

$-40\,d^2 + 6.4\,d + 4.48 = 0$

Se normaliza la ecuación dividiendo ambos miembros por (-40):

$\frac{-40}{-40}\,d^2 + \frac{6.4}{-40}\,\text{d} + \frac{4.48}{-40} = \frac{0}{-40}$

$d^2 - 0.16\,\text{d} - 0.112 = 0$

Se resuelve la ecuación cuadrática con base en la fórmula simplificada del “chicharronero”:

$d_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

$d_{1,2} = -\frac{-0.16}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.16}{2}\right)^2 + 0.112}$

$d_{1,2} = 0.08 \pm \sqrt{(0.08)^2 + 0.112}$

$d_{1,2} = 0.08 \pm \sqrt{0.0064 + 0.112}$

Se considera la raíz positiva:

$d_1 = 0.08 + \sqrt{0.1184}$

$d_1 = 0.08 + 0.3441$

$d_1 = 0.4241\ \text{m}$

La deformación máxima que sufre el resorte para detener el movimiento del bloque es:

$d_1 = 0.4241\ \text{m}.$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
W = 15.6;
sB = 1.95;
Δx = 12;
Δy = 5;
μ = 0.25;
g = 9.81;
m = W/g
P1 = {0.1, 4};
P2 = {0.5, 36};
```

a) la rapidez con la que el bloque hace contacto con el resorte

Cálculo de la hipotenusa del triángulo de pendiente:

```
hip = Sqrt[Δx^2 + Δy^2]
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el bloque:

```
vFr = {-Fr, 0}
vN = {0, Nrm}
vW = W {Δy/hip, -Δx/hip}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton y cálculo de la magnitud de la fuerza de fricción:

```
ec1 = vFr + vN + vW == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, Nrm}]
Nsol = Nrm /. resp1[[1]]
Fr = μ Nsol
```

Parámetros cinemáticos del bloque:

```
ec2 = hA/sB == 5/hip
resp2 = Solve[ec2]
hAsol = hA /. resp2[[1]]
```

```
ec3 = hC/d == 5/hip
resp3 = Solve[ec3]
hCsol = hC /. resp3[[1]]
sA = 0;
yA = hAsol
vA = 0;
yB = 0;
sC = sB + d
yC = -hCsol
vC = 0;
```

Trabajo desarrollado por las fuerzas que actúan en el bloque de A a B:

```
UFrAaB = -Fr (sB - sA)
UNAaB = 0;
UWAaB = -W (yB - yA)
```

Aplicación del método del trabajo y la energía de A a B y cálculo de la rapidez en B:

```
ec4 = UFrAaB + UNAaB + UWAaB == 1/2 m vB^2 - 1/2 m vA^2
resp4 = Solve[ec4]
vBsol = vB /. resp4[[2]]
```

b) la expresión del trabajo de la fuerza P en función de la deformación máxima d, suponiendo que está en el intervalo 0.1 ≤ d ≤ 0.35

```
mP = P1[[2]]/P1[[1]]
ec5 = P - P2[[2]] == (P2 [[2]] - P1[[2]])/(P2 [[1]] - P1[[1]]) (δ - P2[[1]])
resp5 = Solve[ec5, P]
Puno = mP δ
Pdos = P /. resp5[[1]]
Pfun = { Puno  0 ≤ δ && δ ≤ 0.1
         Pdos  0.1 ≤ δ && δ ≤ 0.5
Plot[Pfun, {δ, 0, 0.5}]
```

Trabajo desarrollado por la fuerza P:

```
UPBaC = ∫_0^0.1 -Puno dδ + ∫_0.1^d -Pdos dδ
```

c) la deformación máxima d que sufre el resorte para detener el movimiento del bloque

Trabajo desarrollado por las fuerzas que actúan en el bloque de B a C:

```
UFrBaC = -Fr (sC - sB)
UNBaC = 0;
UWBaC = -W (yC - yB)
```

Aplicación del método del trabajo y la energía de B a C y cálculo de la deformación máxima del resorte, d:

```
ec6 = UFrBaC + UNBaC + UWBaC + UPBaC == 1/2 m vC^2 - 1/2 m vBsol^2
resp6 = Solve[ec6]
dSol = d /. resp6[[2]]
```

Ejercicio 49

En una salida conflictiva de una autopista, debido a los frecuentes accidentes que ocurren, se ha colocado una barrera formada por tambos de plástico rellenos de agua para frenar a los autos que no alcanzan a girar en dicha bifurcación. La fuerza de frenado, F, vs. penetración, x, que ofrece el conjunto de tambos se muestra en la gráfica de la figura 1.

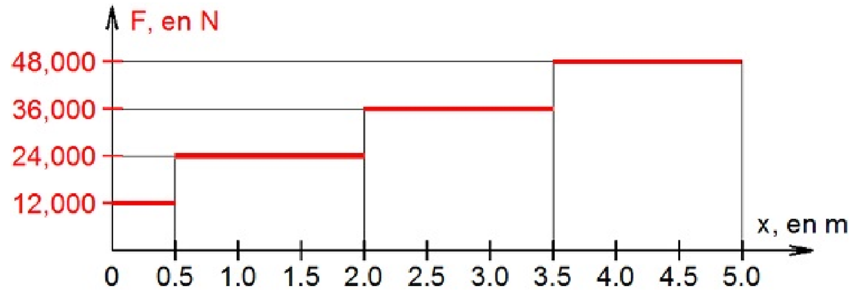
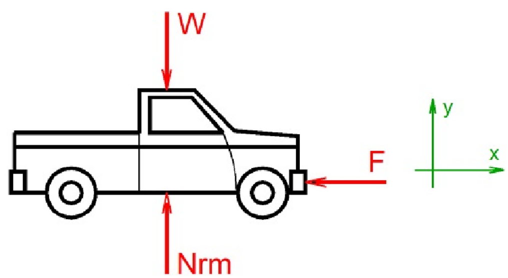


Figura 1 Gráfica de la fuerza de frenado, F, vs. penetración, x, del conjunto de tambos.

Si un automóvil descontrolado, con una masa m = 800 kg, va directo a la barrera de tambos con una rapidez de 64.8 kph, determine su penetración, considerando que el auto no frena y que la resistencia del aire es despreciable.

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del automóvil, en el que solo actúan su peso, W, la normal, Nrm, y la fuerza de frenado, F, que ofrece la barrera de tambos:



Dado que la única fuerza que actúa en la dirección de movimiento es la fuerza de frenado, se puede aplicar el método del trabajo y la energía.
Se considera que el punto inicial es A, en el cual la rapidez del automóvil es de 64.8 kph, y el punto final es B, en el cual este se detiene, por lo que su rapidez es cero.

$$U^F_{A-B} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_B^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_A^2$$

Se obtiene la rapidez v_A en $\frac{m}{s}$:

$$v_A = 64.8\,\frac{\mathrm{km}}{h} \times \frac{1000\,m}{1\,\mathrm{km}} \times \frac{1\,h}{3600\,s}$$

$$v_A = \frac{64\,800}{3600}\,\frac{m}{s}$$

$$v_A = 18\,\frac{m}{s}$$

Entonces:

$$U^F_{A\,a\,B} = \frac{1}{2}\,800\,(0)^2 - \frac{1}{2}\,800\,(18)^2$$

$$U^F_{A\,a\,B} = \text{-}400\,(324)$$

$$U^F_{A\,a\,B} = \text{-}129{,}600\ \mathrm{J}$$

Dado que la diferencial del trabajo de la fuerza de frenado es:

$d\,U = \overline{F} \cdot \overline{d\,r}$

donde:

$\overline{F} = \{-F, 0\}$

$\overline{d\,r} = \{d x, 0\}$

$d\,U = \{-F, 0\} \cdot \{d x, 0\}$

$d\,U = -F\, d x$

Por tanto:

$\int_A^B d\,U = \int_{x_A}^{x_B} -F\, d x$

$U_{A\,a\,B}^F = \int_{x_A}^{x_B} -F\, d x$

La interpretación geométrica del miembro derecho de la expresión anterior es valor negativo del área bajo la curva de la gráfica de la fuerza de frenado, F, vs. la abscisa, x, que en este caso representa la denominada penetración.

Dado que esta gráfica es discreta, conviene obtener las áreas bajo la curva por intervalos, y verificar en qué intervalo se encuentra un valor mayor al negativo del trabajo calculado anteriormente:

$-U_{A\,a\,B}^F = 129{,}600$

En el primer intervalo, $0 \leq x \leq 0.5$:

$U_{0\,a\,0.5}^F = 12{,}000\ (0.5)$

$U_{0\,a\,0.5}^F = 6000$

En el intervalo $0 \leq x \leq 2$:

$U_{0\,a\,2}^F = U_{0-0.5}^F + U_{0.5-2}^F$

$U_{0\,a\,2}^F = 6000 + 24{,}000\ (1.5)$

$U_{0\,a\,2}^F = 6000 + 36{,}000$

$U_{0\,a\,2}^F = 42{,}000$

En el intervalo $0 \leq x \leq 3.5$:

$U_{0\,a\,3.5}^F = U_{0-2}^F + U_{2-3.5}^F$

$U_{0\,a\,3.5}^F = 42{,}000 + 36{,}000\ (1.5)$

$U_{0\,a\,3.5}^F = 42{,}000 + 54{,}000$

$U_{0\,a\,3.5}^F = 96{,}000$

En el intervalo $0 \leq x \leq 5$:

$U_{0\,a\,5}^F = U_{0-3.5}^F + U_{3.5-5}^F$

$U_{0\,a\,5}^F = 96{,}000 + 48{,}000\ (1.5)$

$U_{0\,a\,5}^F = 96{,}000 + 72{,}000$

$U_{0\,a\,5}^F = 168{,}000$

En este último intervalo la magnitud del trabajo supera al requerido, se puede determinar el valor de la penetración, x, para la cual el trabajo es exactamente igual al calculado, de la siguiente manera:

$U_{0\,a\,x}^F = U_{0-3.5}^F + U_{3.5-x}^F$

$U_{0\,a\,x}^F = 96{,}000 + 48{,}000\ (x - 3.5)$

Dado que se requiere que:

$U^{F}_{0\,a\,x} = 129{,}600$

$129{,}600 = 96{,}000 + 48{,}000\ x - 168{,}000$

$48{,}000\ x = 129{,}600 - 96{,}000 + 168{,}000$

$x = \frac{201{,}600}{48{,}000}$

$x = 4.2$ m

La penetración del automóvil en la barrera de tambos es:

$x = 4.2$ m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
x1 = 0.5;
F1 = 12 000;
x2 = 2;
F2 = 24 000;
x3 = 3.5;
F3 = 36 000;
x4 = 5;
F4 = 48 000;
m = 800;
vAkph = 64.8;
vB = 0;
```

Ecuación del trabajo y la energía:

$$vA = vAkph\ \frac{1000}{1} \times \frac{1}{3600}$$

$$UFAaB == \frac{1}{2}\ m\ vB^2 - \frac{1}{2}\ m\ vA^2$$

Cálculo del trabajo de la fuerza de frenado, F, por intervalos:

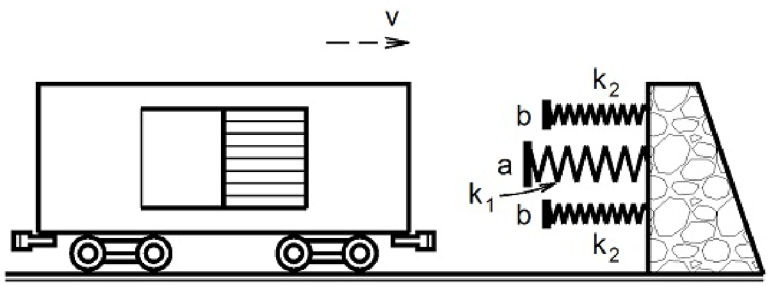
```
UF0a0p5 = F1 x1
UF0a2 = UF0a0p5 + F2 (x2 - x1)
UF0a3p5 = UF0a2 + F3 (x3 - x2)
UF0a5 = UF0a3p5 + F4 (x4 - x3)
UF0ax = UF0a3p5 + F4 (x - x3)
ec1 = -UFAaB == UF0ax
resp1 = Solve[ec1]
xSol = x /. resp1[[1]]
```

Ejercicio 50

El vagón de la figura se está moviendo hacia los resortes para–choques y en el instante en que hacen contacto, la energía cinética del vagón es de 1250 J.
El escudo para–choques principal “a” se encuentra conectado a un resorte cuya constante de rigidez es $k_1 = 20\,000\ \frac{N}{m}$.
Los escudos auxiliares “b” están a 0.30 m detrás de “a” y están unidos a resortes secundarios cuya constante de rigidez es $k_2 = 10\,000\ \frac{N}{m}$.
Con base en lo anterior, determine:

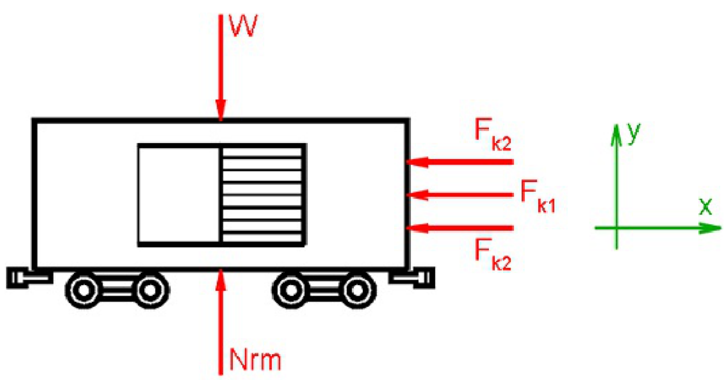
a) el máximo desplazamiento, d_{max}, del escudo “a”;

b) el porcentaje de energía absorbida por el resorte principal “a”.



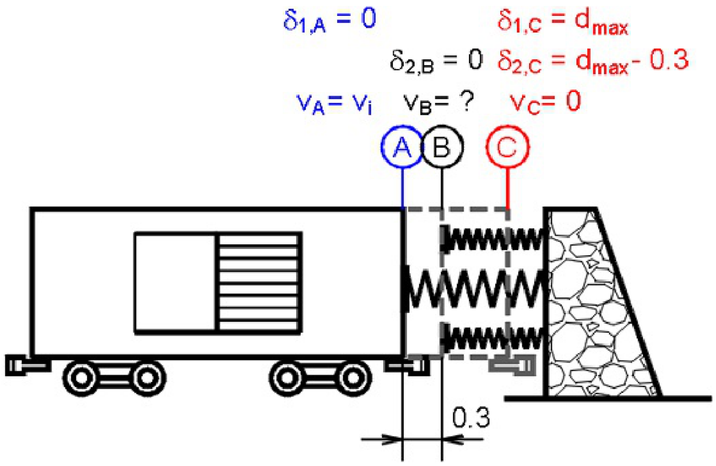
a) el máximo desplazamiento, d_{max}, del escudo “a”

Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del vagón:



Dado que para este caso tanto la fuerza normal como el peso siempre son perpendiculares a la trayectoria del vagón, no desarrollan trabajo.
Por consiguiente, las únicas fuerzas que trabajan son las de los resortes.
Entonces, se requiere determinar las deformaciones de los resortes, tanto en el punto inicial como en un punto intermedio, donde hacen contacto los resortes secundarios, y en el punto final, donde el vagón se detiene por primera vez, antes de moverse hacia atrás debido a la fuerza que ejercen los resortes deformados.

En seguida se muestra el diagrama de parámetros cinemáticos, en este caso deformaciones y velocidades, en los puntos de interés:



Con base en los parámetros mostrados, se puede calcular el trabajo de las fuerzas que generan los resortes. Conviene hacer notar que los resortes con constante de rigidez k_2 únicamente desarrollan trabajo de B a C:

$$U_{A\,a\,C}^{k_1} = -\frac{1}{2}\,k_1\left(\delta_{1,C}^2 - \delta_{1,A}^2\right)$$

$$U_{B\,a\,C}^{k_2} = -\frac{1}{2}\,k_2\left(\delta_{2,C}^2 - \delta_{2,B}^2\right)$$

Posteriormente, se aplica el método del trabajo y la energía:

$$U_{A\,a\,C}^{k_1} + 2\,U_{B\,a\,C}^{k_2} = \frac{1}{2}\,\text{m}\,v_C^2 - \frac{1}{2}\,\text{m}\,v_A^2$$

Donde se conoce la energía cinética en el punto A, donde el escudo principal hace contacto con el vagón:

$$\frac{1}{2}\,\text{m}\,v_A^2 = 1250\text{ J}$$

Y dado que la rapidez final es cero:

$$\frac{1}{2}\,\text{m}\,v_C^2 = 0$$

Entonces, la ecuación queda:

$$-\frac{1}{2}\,k_1\left(\delta_{1,C}^2 - \delta_{1,A}^2\right) + 2\left[-\frac{1}{2}\,k_2\left(\delta_{2,C}^2 - \delta_{2,B}^2\right)\right] = 0 - 1250$$

Luego de sustituir las expresiones para las deformaciones:

$$-\frac{1}{2}\,(20\,000)\left(d_{\text{max}}^2 - (0)^2\right) + 2\left[-\frac{1}{2}\,(10\,000)\left((d_{\text{max}} - 0.3)^2 - (0)^2\right)\right] = -1250$$

$$-10000\,d_{\text{max}}^2 - 10\,000\,(d_{\text{max}}^2\,-0.6\,d_{\text{max}} + 0.09) = -1250$$

Se multiplican ambos miembros por (-1):

$$10000\,d_{\text{max}}^2 + 10\,000\,(d_{\text{max}}^2\,-0.6\,d_{\text{max}} + 0.09) = 1250$$

$$10000\,d_{\text{max}}^2 + 10\,000\,d_{\text{max}}^2 - 6000\,d_{\text{max}} + 900 = 1250$$

$$20000\,d_{\text{max}}^2 - 6000\,d_{\text{max}} + 900 - 1250 = 0$$

$$20000\,d_{\text{max}}^2 - 6000\,d_{\text{max}} - 350 = 0$$

Se divide toda la ecuación por (20000):

$$d_{\text{max}}^2 - \frac{6000}{20\,000}\,d_{\text{max}} - \frac{350}{20\,000} = \frac{0}{20\,000}$$

$$d_{\text{max}}^2 - 0.3\,d_{\text{max}} - 0.0175 = 0$$

Se aplica la fórmula simplificada del “chicharronero”:

$$d_{max,1,2} = \frac{0.3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.3}{2}\right)^2 + 0.0175}$$

$$d_{max,1} = 0.15 + \sqrt{(0.15)^2 + 0.0175}$$

$$d_{max,1} = 0.15 + \sqrt{0.0225 + 0.0175}$$

$$d_{max,1} = 0.15 + \sqrt{0.04}$$

$$d_{max,1} = 0.15 + 0.2$$

$$d_{max,1} = 0.35\text{ m}$$

El máximo desplazamiento del escudo “a” es:

$$d_{max,1} = 0.35\text{ m.}$$

Para resolver esta pregunta, es suficiente con calcular el trabajo desarrollado por el resorte principal y compararlo con la energía cinética inicial del vagón de 1250 J.

Luego de sustituir el valor de la deformación máxima del resorte principal en la expresión correspondiente:

$$U_{A\,a\,C}^{k_1} = -\frac{1}{2}\,k_1\left(\delta_{1,C}^2 - \delta_{1,A}^2\right)$$

$$U_{A\,a\,C}^{k_1} = -\frac{1}{2}\,(20\,000)\left((0.35)^2 - (0)^2\right)$$

$$U_{A\,a\,C}^{k_1} = -10\,000\,(0.1225 - 0)$$

$$U_{A\,a\,C}^{k_1} = -1225\,J$$

Entonces, el porcentaje de energía absorbida por el resorte principal “a” es:

$$\%\,\Delta T_1 = \frac{U_{A\,a\,C}^{k_1}}{T_i} \times 100$$

$$\%\,\Delta T_1 = \frac{-1225}{-1250} \times 100$$

$$\%\,\Delta T_1 = 98 \times \%$$

El porcentaje de energía absorbida por el resorte principal “a” es:

$$\%\,\Delta T_1 = 98 \times \%.$$

Resolución del problema con el empleo de funciones de Mathematica

Datos:

```
TA = 1250;
k1 = 20000;
Δd = 0.3;
k2 = 10000;
```

a) el máximo desplazamiento, d_{max}, del escudo “a”

Parámetros cinemáticos:

```
δ1A = 0;
δ2B = 0;
δ1C = dmax
δ2C = dmax - Δd
vC = 0;
```

Trabajo desarrollado por las fuerzas de los resortes:

$$Uk1AaC = -\frac{1}{2} k1 \left(\delta 1C^2 - \delta 1A^2\right)$$

$$Uk2BaC = -\frac{1}{2} k2 \left(\delta 2C^2 - \delta 2B^2\right)$$

Aplicación del método del trabajo y la energía

$$ec1 = Uk1AaC + 2\, Uk2BaC == \frac{1}{2} m\, vC^2 - TA$$

```
resp1 = Solve[ec1]
dmaxSol = dmax /. resp1⟦2⟧
```

b) el porcentaje de energía absorbida por el resorte principal “a”

$$\Delta T1 = \frac{Uk1AaC \;/.\; dmax \to dmaxSol}{-TA}\, 100$$

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Academia de Dinámica
Febrero de 2023

Yukihiro Minami Koyama