Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Cuaderno de ejercicios resueltos
Cinemática y Dinámica

Autor: Yukihiro Minami Koyama

Trabajo y energía de la partícula, parte 2

Academia de Dinámica
División de Ciencias Básicas

Ejercicio 51

El collarín A que tiene una masa m_A = 1.6 kg, desliza a lo largo de la barra fija y rugosa en un plano vertical, y sobre el collarín se ejerce una fuerza de fricción Fr = 2.4 N con magnitud constante; se le suelta desde el reposo a partir de la posición mostrada en la figura 1.
Si se sabe que el resorte tiene una constante de rigidez k = 50 $\frac{N}{m}$ y una longitud libre L_0 = 0.4 m, determine la rapidez del collarín cuando el resorte se encuentra en la posición vertical, en la que la longitud total del resorte es L = 0.50 m.

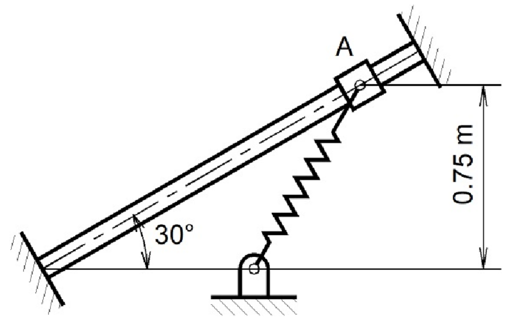
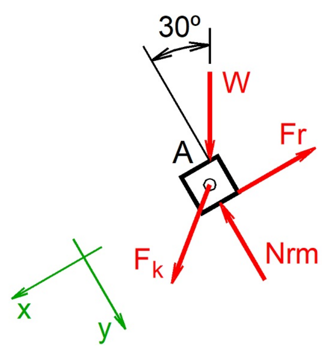


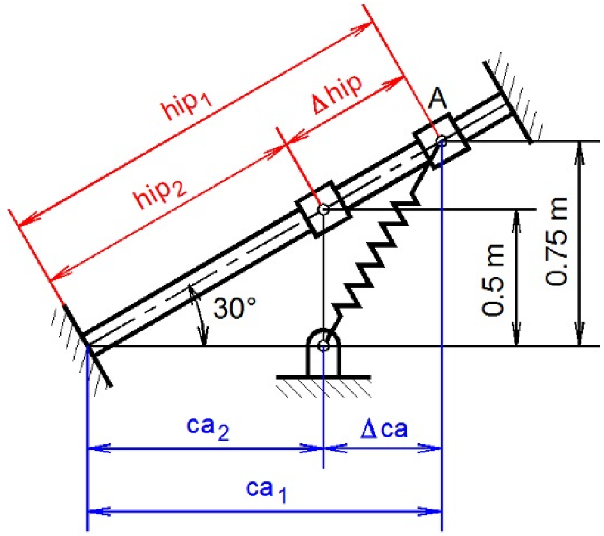
Figura 1 Collarín que desliza a lo largo de una barra fija y rugosa.

El método más sencillo para resolver este problema es el del trabajo y la energía.
Para aplicarlo, primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del collaría A en una posición intermedia de su movimiento:



Dado que las fuerzas que desarrollan trabajo son el peso, la fuerza del resorte y la de fricción, se analizan los parámetros cinemáticos que se requieren para calcular el trabajo correspondiente.
Para el caso del resorte, se requiere determinar su longitud en las posiciones inicial y final, para el peso sus alturas inicial y final; para la fuerza de fricción las posiciones inicial y final del collarín.

En el siguiente diagrama se muestra la configuración geométrica del collarín en sus posiciones inicial y final para determinar los parámetros mencionados:



Con base en el diagrama anterior, se puede verificar que:

$\text{Sin}[30°] = \frac{0.75}{hip_1}$

$hip_1 = \frac{0.75}{\text{Sin}[30°]}$

$hip_1 = \frac{0.75}{0.5}$

$hip_1 = 1.5\text{ m}$

$\text{Tan}[30°] = \frac{0.75}{ca_1}$

$ca_1 = \frac{0.75}{\text{Tan}[30°]}$

$ca_1 = \frac{0.75}{0.5774}$

$ca_1 = 1.299\text{ m}$

De manera similar:

$\text{Sin}[30°] = \frac{0.5}{hip_2}$

$hip_2 = \frac{0.5}{0.5}$

$hip_2 = 1\text{ m}$

$\text{Tan}[30°] = \frac{0.5}{ca_2}$

$ca_2 = \frac{0.5}{0.5774}$

$ca_2 = 0.866\text{ m}$

De donde:

$\Delta hip = hip_1 - hip_2$

$\Delta hip = 1.5 - 1$

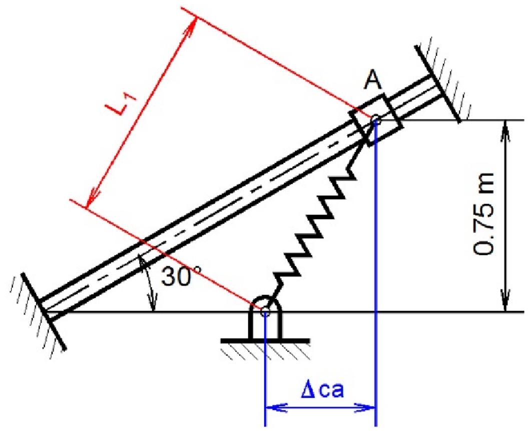
$\Delta hip = 0.5\text{ m}$

$\Delta ca = ca_1 - ca_2$

$\Delta ca = 1.299 - 0.866$

$\Delta ca = 0.433\text{ m}$

La longitud inicial del resorte puede obtenerse con base en el siguiente dibujo:



$L_1 = \sqrt{(0.75)^2 + \Delta ca^2}$

$L_1 = \sqrt{0.5625 + (0.433)^2}$

$L_1 = \sqrt{0.5625 + 0.1875}$

$L_1 = \sqrt{0.75}$

$L_1 = 0.866$ m

De donde las deformaciones inicial y final del resorte son:

$\delta_1 = L_1 - L_0$

$\delta_1 = 0.866 - 0.4$

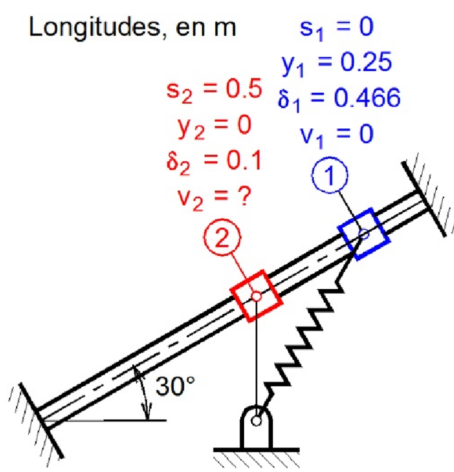
$\delta_1 = 0.466$ m

$\delta_2 = L_2 - L_0$

$\delta_2 = 0.5 - 0.4$

$\delta_2 = 0.1$ m

Con base en los resultados anteriores, se puede trazar el diagrama de parámetros cinemáticos en las posiciones inicial y final del collarín:



Se obtiene el trabajo que realiza cada una de las fuerzas que actúan:

$U_{1a2}^{Fr} = \text{-Fr}\,(s_2 - s_1)$

$U_{1a2}^{Fr} = \text{-2.4}\,(0.5 - 0)$

$U_{1a2}^{Fr} = \text{-1.2 J}$

$U_{1a2}^{Nrm} = 0$

$U_{1a2}^{W} = \text{-m g}\,(y_2 - y_1)$

$U_{1a2}^{W} = \text{-1.6}\,(9.81)\,(0 - 0.25)$

$U_{1a2}^{W} = \text{-15.70}\,(\text{-0.25})$

$U_{1a2}^{W} = 3.924\text{ J}$

$U_{1a2}^{k} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$

$U_{1a2}^{k} = -\frac{1}{2}\,(50)\left[(0.1)^2 - (0.466)^2\right]$

$U_{1a2}^{k} = \text{-25}\,(0.01 - 0.2172)$

$U_{1a2}^{k} = \text{-25}\,(\text{-0.2072})$

$U_{1a2}^{k} = 5.179\text{ J}$

Se aplica la ecuación del trabajo y la energía:

$U_{1a2}^{Fr} + U_{1a2}^{Nrm} + U_{1a2}^{W} + U_{1a2}^{k} = \frac{1}{2}\,m\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2$

$\text{-1.2} + 0 + 3.924 + 5.179 = \frac{1}{2}\,(1.6)\,v_2^2 - \frac{1}{2}\,(1.6)\,(0)^2$

$7.903 = 0.8\,v_2^2$

$0.8\,v_2^2 = 7.903$

$v_2^2 = \frac{7.903}{0.8}$

$v_2^2 = 9.879$

$v_2 = \sqrt{9.879}$

$v_2 = 3.143\,\frac{m}{s}$

La rapidez del collarín cuando el resorte se encuentra en posición vertical es:

$v_2 = 3.143\,\frac{m}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 1.6;
g = 9.81;
Fr = 2.4;
k = 50;
L0 = 0.4;
h1 = 0.75;
L2 = 0.5;
v1 = 0;
```

Obtención de parámetros cinemáticos:

```
ec1 = Sin[30 °] == h1/hip1
resp1 = Solve[ec1]
hip1Sol = hip1 /. resp1[[1]]
ec2 = Tan[30 °] == h1/ca1
```

```
resp2 = Solve[ec2]
ca1Sol = ca1 /. resp2[[1]]
ec3 = Sin[30 °] == L2/hip2
resp3 = Solve[ec3]
hip2Sol = hip2 /. resp3[[1]]
ec4 = Tan[30 °] == L2/ca2
resp4 = Solve[ec4]
ca2Sol = ca2 /. resp4[[1]]
Δhip = hip1Sol - hip2Sol
Δca = ca1Sol - ca2Sol
L1 = Sqrt[h1^2 + Δca^2]
δ1 = L1 - L0
δ2 = L2 - L0
s1 = 0;
s2 = Δhip
y1 = h1 - L2
y2 = 0;
```

Cálculo del trabajo realizado por las fuerzas que actúan en el collarín:

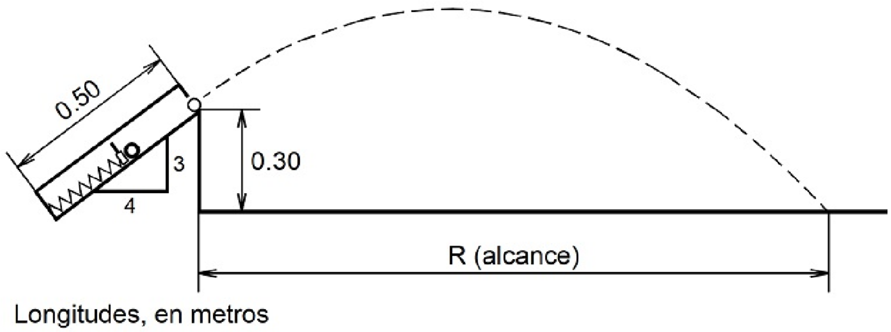
```
UFr1a2 = -Fr (s2 - s1)
UN1a2 = 0;
UW1a2 = -m g (y2 - y1)
Uk1a2 = -1/2 k (δ2^2 - δ1^2)
```

Ecuación del trabajo y la energía:

```
ec5 = UFr1a2 + UN1a2 + UW1a2 + Uk1a2 == 1/2 m v2^2 - 1/2 m v1^2
resp5 = Solve[ec5]
v2Sol = v2 /. resp5[[2]]
```

Ejercicio 52

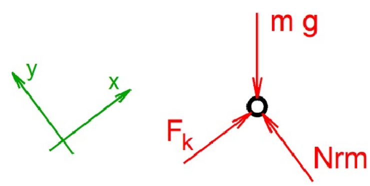
Un juego tiene un disparador que está formado por un resorte que tiene una longitud libre $L_0 =$ 0.70 m y tiene un tope que impide que este resorte se extienda más de 0.50 m, tal como se muestra en la figura.



Si el resorte se comprime 0.25 m desde la boca de salida del disparador y se suelta, determine el alcance que tendrá la bola, considerando que la constante de rigidez del resorte es k = 10 N/m, la masa de la bola es de 0.1 kg y se desprecia la fricción de la bola con la rampa así como la resistencia del aire.

Para resolver el problema, primero se requiere calcular la rapidez a la que sale disparada la bola. Se puede calcular dicha rapidez con facilidad con el empleo del método del trabajo y la energía.

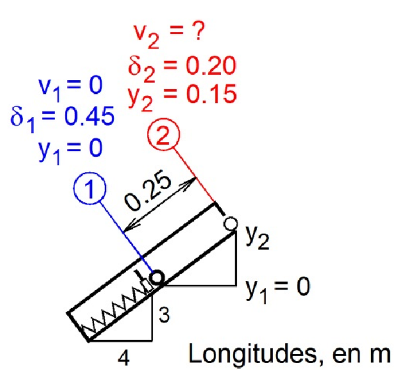
Diagrama de cuerpo libre de la bola, mientras está en el disparador:



Dado que las fuerzas que desarrollan trabajo son el peso y la fuerza del resorte, dicho trabajo se puede calcular con base en las siguientes expresiones, considerando que 1 es el punto en el que inicia la bola su movimiento y 2 es el punto de salida de la misma:

$$U_{1-2}^{W} = -m\,g\,(y_2 - y_1)$$
$$U_{1-2}^{k} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$$

Los parámetros para el cálculo de estos trabajos se pueden determinar con base en el siguiente diagrama:



Las deformación final del resorte, δ_2, se puede obtener con base en que la longitud libredel resorte es L_0 = 0.70 m y que el resorte solo puede extenderse hasta L_2 = 0.5 m, por lo que la deformación final es:

$$\delta_2 = L_0 - L_0$$
$$\delta_2 = 0.70 - 0.50$$
$$\delta_2 = 0.20 \text{ m}$$

Y la deformación inicial, δ_1, es 0.25 m mayor que la final, por tanto:

$$\delta_1 = \delta_2 + 0.25$$
$$\delta_1 = 0.20 + 0.25$$
$$\delta_1 = 0.45 \text{ m}$$

En cuanto a la altura, si se establece que la inicial, $y_1 = 0$, entonces, con base en el teorema de la proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes:

$$\frac{y_2}{3} = \frac{0.25}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$y_2 = \frac{(0.25)\,(3)}{\sqrt{9+16}}$$
$$y_2 = \frac{0.75}{\sqrt{25}}$$
$$y_2 = \frac{0.75}{5}$$
$$y_2 = 0.15 \text{ m}$$

A partir de los valores calculados:

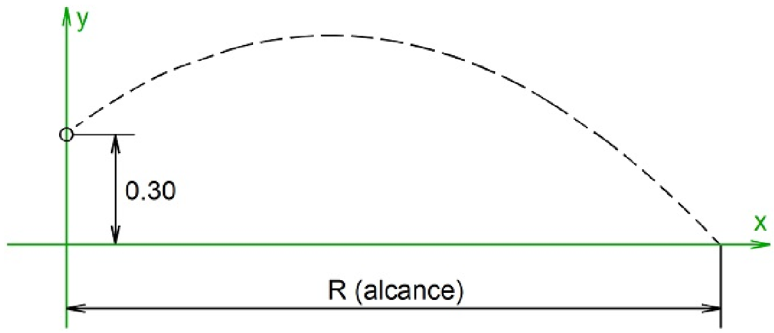
$$U^W_{1-2} = -m\,g\,(y_2 - y_1)$$
$$U^W_{1-2} = -(0.1)\,(9.81)\,(0.15 - 0)$$
$$U^W_{1-2} = -0.1472 \text{ N·m}$$
$$U^k_{1-2} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$$
$$U^k_{1-2} = -\frac{1}{2}\,(10)\left(0.20^2 - 0.45^2\right)$$
$$U^k_{1-2} = (-5)\,(0.04 - 0.2025)$$
$$U^k_{1-2} = (-5)\,(-0.1625)$$
$$U^k_{1-2} = 0.8125 \text{ N·m}$$

Con base en la expresión del trabajo y la energía:

$$U^W_{1-2} + U^k_{1-2} = \frac{1}{2}\text{ m } v_2^2 - \frac{1}{2}\text{ m } v_1^2$$
$$-0.1472 + 0.8125 = \frac{1}{2}\,(0.1)\,v_2^2$$
$$0.05\,v_2^2 = 0.6654$$
$$v_2^2 = \frac{0.6654}{0.05}$$
$$v_2^2 = 13.31$$
$$v_2 = \sqrt{13.31}$$
$$v_2 = 3.648\,\frac{m}{s}$$

Con base en la rapidez v_2 obtenida, puede determinase la expresión de la posición de la bola luego que es disparada, cuyo movimiento obedece al de un tiro parabólico.

Se establece que el eje x se encuentra en el plano de aterrizaje de la bola y el eje y se hace coincidir con el punto en el que la bola inicia su movimiento parabólico, tal como se muestra en la siguiente figura:



Entonces:

$\bar{r} = \left\{v_{2x}\, t,\ -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{2y}\, t + 0.30\right\}$

Las componentes de la velocidad inicial $\overline{v_2}$ son:

$\overline{v_2} = \left\{v_{2x},\ v_{2y}\right\}$

$\overline{v_2} = v_2 \left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

$\overline{v_2} = 3.648\, \{0.8, 0.6\}$

$\overline{v_2} = \{2.918, 2.189\}\, \frac{m}{s}$

Por tanto:

$v_{2x} = 2.918$

$v_{2y} = 2.189$

De donde:

$\bar{r} = \{2.918\, \text{t}, -4.905\, t^2 + 2.189\, t + 0.30\}$

El alcance, R, es el valor de la abscisa del vector anterior, para el cual la ordenada es cero.
Por consiguiente, se determina el tiempo que tarda la bola en bajar a una altura y = 0:

$\text{x} = 2.918\, \text{t}$

$\text{y} = -4.905\, t^2 + 2.189\, t + 0.30$

Si y = 0, t = t_f:

$0 = -4.905\, t_f^2 + 2.189\, t_f + 0.30$

Se divide toda la ecuación por -4.905:

$\frac{-4.905}{-4.905}\, t_f^2 + \frac{2.189}{-4.905}\, t_f + \frac{0.30}{-4.905} = \frac{0}{-4.905}$

$t_f^2 - 0.4462\, t_f - 0.06116 = 0$

Con base en la fórmula del “chicharronero” simplificado:

$t_{\text{f1,2}} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

$t_{\text{f1,2}} = -\frac{(-0.4462)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.4462}{2}\right)^2 - (-0.06116)}$

$t_{\text{f1,2}} = 0.2231 \pm \sqrt{(0.2231)^2 + 0.06116}$

$t_{\text{f1,2}} = 0.2231 \pm \sqrt{0.1109}$

Se descarta la raíz negativa:

$t_{f1} = 0.2231 + 0.3331$

$t_{f1} = 0.5562$ s

Por tanto, el alcance que tiene el disparo de la bola es:

$R = 2.918\ t_f$

$R = (2.918)\ (0.5562)$

$R = 1.623$ m

El alcance que tendrá la bola es:

R = 1.623 m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
L0 = 0.70;
L2 = 0.50;
Δδ = 0.25;
k = 10;
m = 0.1;
g = 9.81;
Δx = 4;
Δy = 3;
```

Cálculo de parámetros para el cálculo del trabajo de las fuerzas involucradas:

```
y1 = 0;
δ2 = L0 - L2
δ1 = δ2 + Δδ
hip = Sqrt[Δx^2 + Δy^2]
ec1 = y2/Δy == 0.25/hip
resp1 = Solve[ec1]
y2Sol = y2 /. resp1[[1]]
```

$$hip = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$ec1 = \frac{y2}{\Delta y} == \frac{0.25}{hip}$$

Obtención del trabajo de las fuerzas que actúan sobre la bola durante el disparo:

```
UW1a2 = -m g (y2Sol - y1)
Uk1a2 = -1/2 k (δ2^2 - δ1^2)
```

$$Uk1a2 = -\frac{1}{2} k \left(\delta 2^2 - \delta 1^2\right)$$

Aplicación del método del trabajo y la energía:

```
v1 = 0;
ec2 = UW1a2 + Uk1a2 == 1/2 m v2^2 - 1/2 m v1^2
resp2 = Solve[ec2]
v2Sol = v2 /. resp2[[2]]
```

Componenetes de la velocidad inicial y vector de posición del tiro parabólico:

```
vV2 = v2Sol {Δx/hip, Δy/hip}
r = {v2Sol}
```

Componenetes de la velocidad inicial y vector de posición del tiro parabólico:

```
vV2 = v2Sol {Δx/hip, Δy/hip}
r = {0, -1/2 g t^2} + vV2 t + {0, 0.30}
ec3 = r == {R, 0}
resp3 = Solve[ec3]
Rsol = R /. resp3[[2]]
```

Ejercicio 53

Un juego se compone de un disparador, un balín con masa m = 0.1 kg y una pista vertical formada por un rizo y una rampa circulares, como se muestra en la figura.
El disparador está formado por un resorte con constante de rigidez $k = 98.1\ \frac{N}{m}$ que se comprime $\delta = 0.1$ m y se suelta hasta su posición natural de equilibrio, para que el balín recorra la pista.
Despreciando todo tipo de fricción que actúe sobre el balín, determine el valor máximo de R_1 que puede tener el rizo de manera que el balín pueda pasar por él sin despegarse, y el valor de θ sobre la rampa circular hasta donde alcanza a llegar el balín antes de caerse.

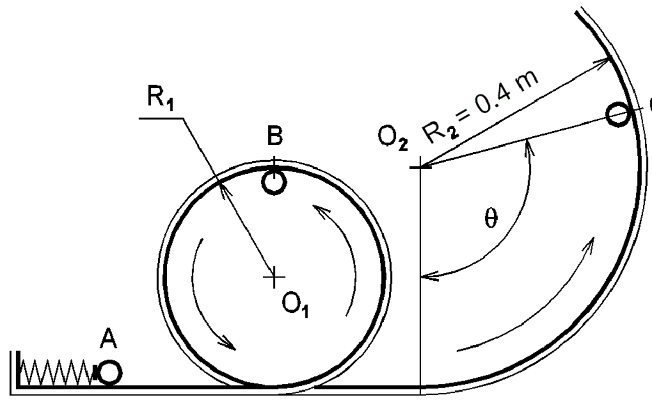
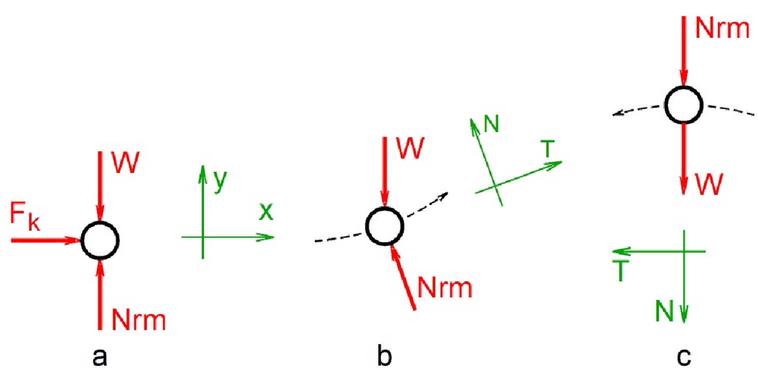


Figura 1 Diagrama de un juego con disparador, un rizo y rampa circular.

Primero, se dibujan los diagramas de cuerpo libre del balín en los tres intervalos de movimiento de interés:

a) en contacto con el resorte;
b) en la parte curva de la pista;
c) en el punto B.



Como puede observarse, la fuerza del resorte solo actúa mientras está en contacto con el balín. Posteriormente, sólo actúan el peso y la fuerza normal.
Por tanto, se puede aplicar el método del trabajo y la energía, con base en el cálculo del trabajo de la fuerza del resorte y del peso, debido a que la fuerza normal siempre es perpendicular a la trayectoria, por tanto, su trabajo es nulo.
Dado que es necesario calcular, primero, la rapidez mínima del balín de manera que esté en contacto con la pista en el punto B, es necesario aplicar en él la segunda ley de Newton.

Representación vectorial de las fuerzas en el punto B:

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$

$\overline{W} = \{0, \text{m g}\}$

Resultante y aplicación de la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \overline{N} + \overline{W}$

$\overline{R} = \{0, \text{Nrm}\} + \{0, \text{m g}\}$

$\overline{R} = \{0, \text{Nrm} + \text{m g}\}$

$\overline{R} = \text{m}\,\overline{a}$

$\{0, \text{Nrm} + \text{m g}\} = \text{m}\,\{a_T,\ a_N\}$

$a_T = 0$

$\text{m}\,a_N = \text{Nrm} + \text{m g}$

En el punto B, para que el balín esté en contacto con la pista es necesario que:

$N_B > 0$

Cuando está a punto de despegarse, se puede considerar que:

$N_B = 0$

Entonces:

$\text{m}\,a_{N,B} = 0 + \text{m g}$

$a_{N,B} = \text{g}$

Dado que:

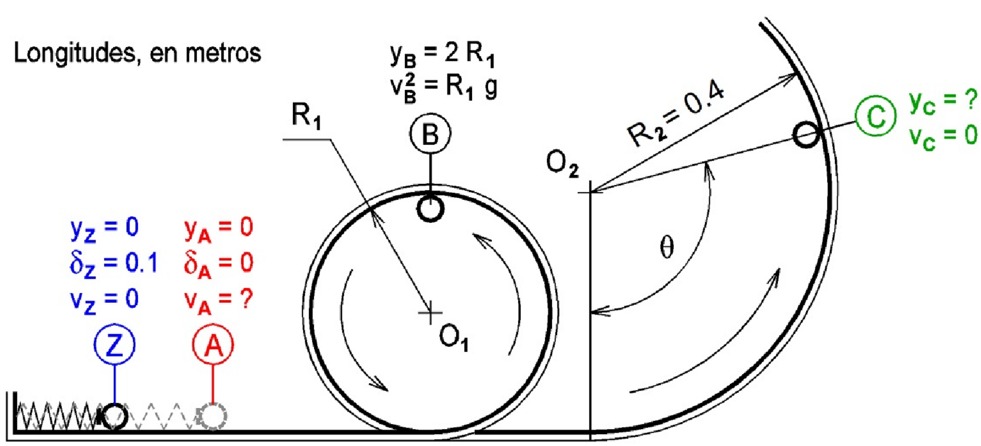
$$a_{N,B} = \frac{v_B^2}{R}$$

$$\frac{v_B^2}{R_1} = \text{g}$$

$$v_B^2 = R_1\,\text{g}$$

Ahora, se aplica el método del trabajo y la energía desde que se comprime el resorte hasta que llega al punto B. Se considera que en Z el resorte está comprimido $\delta_Z = 0.1$ m y en A el resorte deja de estar en contacto con el balín y, por tanto, $\delta_A = 0$.

A continuación se muestra un diagrama en el que pueden observarse las posiciones y los parámetos cinemáticos de los puntos de interés.



Dichos parámetros cinemáticos son:

$y_Z = 0$

$\delta_Z = 0.1$

$v_Z = 0$

$y_A = 0$

$\delta_A = 0$

$v_A = ?$

$y_B = 2\,R_1$

$v_B^2 = R_1\,\mathrm{g}$

Entonces, el trabajo de las fuerzas involucradas es:

$U_{Z\,a\,A}^{k} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{k}\left(\delta_A^2 - \delta_Z^2\right)$

$U_{Z\,a\,A}^{k} = -\frac{1}{2}\,(98.1)\left(0^2 - 0.1^2\right)$

$U_{Z\,a\,A}^{k} = -49.05\,(-0.01)$

$U_{Z\,a\,A}^{k} = 0.4905\ \mathrm{J}$

$U_{Z\,a\,B}^{W} = -\,\mathrm{m}\,\mathrm{g}\,(y_B - y_Z)$

$U_{Z\,a\,B}^{W} = -0.1\,(9.81)\,(2\,R_1 - 0)$

$U_{Z\,a\,B}^{W} = -1.962\,R_1$

Con base en la ecuación del trabajo y la energía:

$U_{Z\,a\,A}^{k} + U_{Z\,a\,B}^{W} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_B^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_Z^2$

$0.4905 - 1.962\,R_1 = \frac{1}{2}\,(0.1)\,R_1\,g - \frac{1}{2}\,(0.1)\,0^2$

$1.962\,R_1 = 0.4905 - 0.4905\,R_1$

$1.962\,R_1 + 0.4905\,R_1 = 0.4905$

$2.4525\,R_1 = 0.4905$

$R_1 = \frac{0.4905}{2.4525}$

$R_1 = 0.2\ \mathrm{m}$

El valor máximo de R_1 para que el balín no se despegue de la pista es:

$R_1 = 0.2$ m.

Para calcular el valor de θ de la rampa circular hasta donde llega el balín, se requiere conocer los parámetros asociados a dicho punto, C:

$y_C = ?$

$v_C = 0\ \frac{m}{s}$

Por consiguiente, con base en el método del trabajo y la energía:

$U_{B\,a\,C}^{W} = -\mathrm{m}\,\mathrm{g}\,(y_C - y_B)$

$U_{B\,a\,C}^{W} = -0.981\,(y_C - 0.4)$

$U_{B\,a\,C}^{W} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_C^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,v_B^2$

Sustituyendo los valores conocidos:

$-0.981\ (y_C - 0.4) = -\frac{1}{2}\ (0.1)\ (0.2)\ (9.81)$

$0.981\ y_C - 0.3924 = 0.0981$

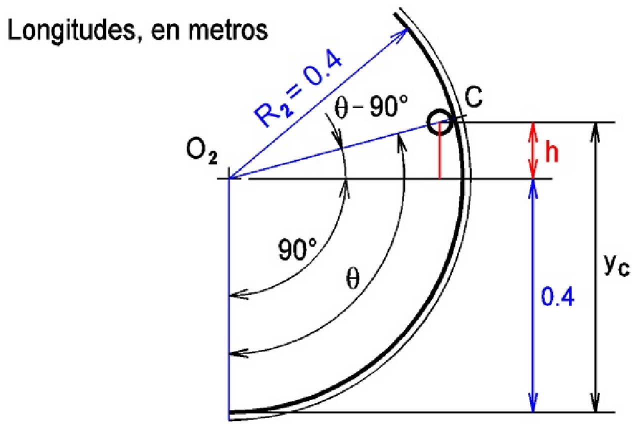
$0.981\ y_C = 0.0981 + 0.3924$

$0.981\ y_C = 0.4905$

$y_C = \frac{0.4905}{0.981}$

$y_C = 0.5\ \text{m}$

Para calcular el valor de θ, dado que el radio de la rampa circular es $R_2 = 0.4$ m, con base en el siguiente diagrama:



Puede verificarse que:

$\text{Sin}\ [\theta - 90°] = \frac{h}{R_2}$

$\text{h} = y_C - 0.4$

$\text{h} = 0.5 - 0.4$

$\text{h} = 0.1\ \text{m}$

$\text{Sin}\ [\theta - 90°] = \frac{0.1}{0.4}$

$\theta - 90° = \text{ArcSin}\ [0.25]$

$\theta - 90° = 14.48°$

$\theta = 14.48° + 90°$

$\theta = 104.48°$

El valor del ángulo θ hasta donde llega el balín es:

$\theta = 104.48°$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.1;
g = 9.81;
k = 98.1;
δ = 0.1;
R2 = 0.4;
```

Representación vectorial de las fuerzas en el punto B:

```
vN = {0, Nrm}
vW = {0, m g}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vN + vW == m {aTB, aNB}
resp1 = Solve[ec1 /. Nrm → 0]
aNBsol = aNB /. resp1[[1]]
ec2 = aNBsol == vB^2/R1
resp2 = Solve[ec2, vB]
vBsol = vB /. resp2[[2]]
```

Posiciones y parámetros:

```
yZ = 0;
δZ = δ;
vZ = 0;
yA = 0;
δA = 0;
yB = 2 R1;
vC = 0;
```

Trabajo desarrollado por las fuerzas involucradas:

```
UkZaA = -1/2 k (δA^2 - δZ^2)
UWZaB = -m g (yB - yZ)
```

Aplicación del método del trabajo y la energía:

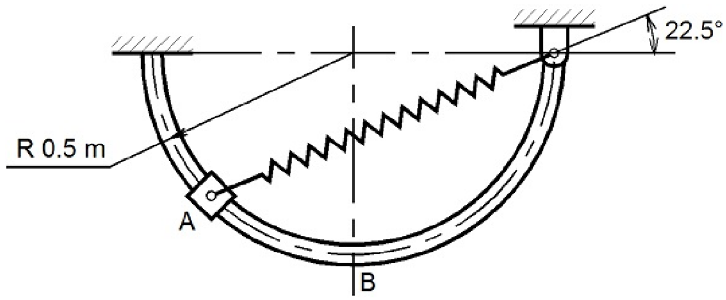
```
ec3 = UkZaA + UWZaB == 1/2 m vBsol^2 - 1/2 m vZ^2
resp3 = Solve[ec3]
R1sol = R1 /. resp3[[1]]
```

Cálculo del ángulo θ hasta donde llega el balín:

```
UWBaC = -m g (yC - (yB /. R1 → R1sol))
ec4 = UWBaC == 1/2 m vC^2 - 1/2 m (vBsol /. R1 → R1sol)^2
resp4 = Solve[ec4]
yCsol = yC /. resp4[[1]]
ec5 = Sin[θ - 90 °] == h/R2
h = yCsol - R2
resp5 = Solve[ec5]
θSol = θ /. resp5[[2]]
θSolDeg = θSol/°
```

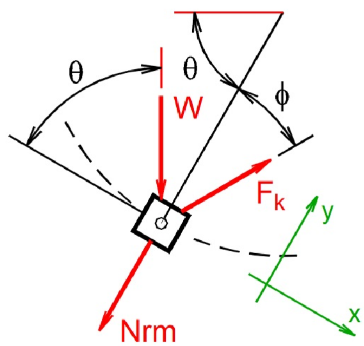
Ejercicio 54

Un collarín que tiene una masa de 2 kg, parte del reposo a partir de la posición mostrada en la figura, y se mueve a lo largo de una barra circular lisa.



Determine la rapidez de dicho collarín y la magnitud de su aceleración total, cuando se encuentre en el punto más bajo de su trayectoria, B, si se sabe que la constante de rigidez del resorte es $k = 200 \frac{N}{m}$, y la longitud libre del mismo es $L_0 = 0.4$ m.

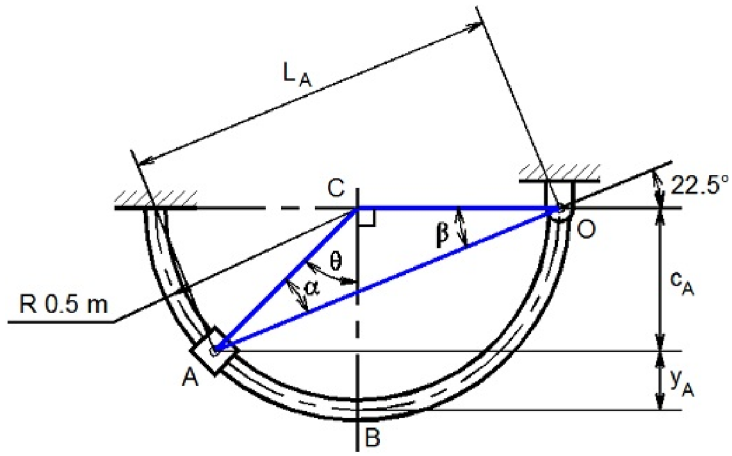
Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del collarín en un punto intermedio de su movimiento:



Dado que las fuerzas que actúan en el collarín son su peso, la fuerza normal, siempre perpendicular a la trayectoria, y la fuerza del resorte, es posible determinar su rapidez con la aplicación del método del trabajo y la energía.

Dado que el punto B es el más bajo, éste se considerará como el punto de altura nula. Para aplicar el método mencionado, se requiere determinar la altura del punto A así como la longitud del resorte tanto en A como en B.

Para ello, a continuación se muestra un diagrama para facilitar el cálculo de los parámtros en A.



Se resuelve el triángulo ACO, con el empleo del teorema del seno de la siguiente manera:

CA = 0.5 m, por ser un radio

CO = 0.5 m, por ser otro radio

$\beta = 22.5°$, por ser un ángulo opuesto por el vértice del indicado a la derecha

Por tanto:

$\frac{\text{Sin}[\alpha]}{\text{CO}} = \frac{\text{Sin}[\beta]}{\text{CA}}$

Dado que CO y CA son iguales:

$\text{Sin}[\alpha] = \text{Sin}[\beta]$

$\alpha = \beta$

$\alpha = 22.5°$

Con base en el teorema de la suma de ángulos interiores de todo triángulo, el ángulo en el vértice C es:

$\alpha + \beta + \text{C} = 180°$

$\text{C} = 180° - 22.5° - 22.5°$

$\text{C} = 135°$

Se aplica nuevamente el teorema del seno:

$\frac{L_A}{\text{Sin}[C]} = \frac{\text{CO}}{\text{Sin}[\alpha]}$

$L_A = \frac{0.5\,\text{Sin}[135\,°]}{\text{Sin}[22.5\,°]}$

$L_A = \frac{0.5\,(0.7071)}{0.3827}$

$L_A = 0.9239$ m

Como la longitud libre del resorte es:

$L_0 = 0.4$ m

La deformación del resorte en el punto A es:

$\delta_A = L_A - L_0$

$\delta_A = 0.9239 - 0.4$

$\delta_A = 0.5239$ m

Para el cálculo de y_A, se requiere determinar el ángulo θ. Con base en el axioma que establece que el valor del todo es igual a la suma de los valores de sus partes:

$C = 90^\circ + \theta$

$\theta = C - 90^\circ$

$\theta = 135^\circ - 90^\circ$

$\theta = 45^\circ$

Entonces, con el empleo de la definición de coseno:

$\text{Cos}\,[\theta] = \frac{c_A}{\text{CA}}$

$c_A = \text{CA Cos}\,[\theta]$

$c_A = 0.5\ \text{Cos}\,[45^\circ]$

$c_A = 0.5\ (0.7071)$

$c_A = 0.3536$

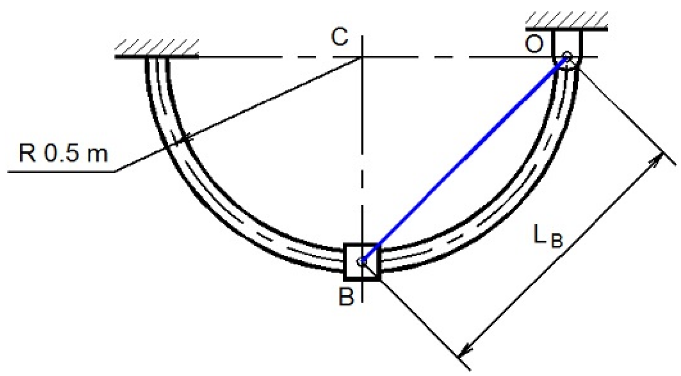
Por consiguiente:

$y_A + c_A = \text{CB}$

$y_A = 0.5 - 0.3536$

$y_A = 0.1464$ m

Para determinar la deformación del resorte en B, se hace el análisis de la siguiente figura:



Con base en el teorema de Pitágoras:

$L_B^2 = \text{CB}^2 + \text{CO}^2$

$L_B = \sqrt{(0.5)^2 + (0.5)^2}$

$L_B = \sqrt{0.25 + 0.25}$

$L_B = \sqrt{0.50}$

$L_B = 0.7071$

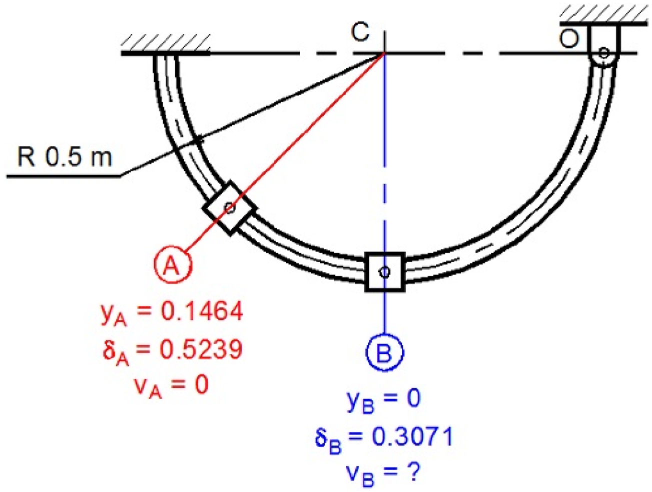
Por tanto, la deformación del resorte en el punto B es:

$\delta_B = L_B - L_0$

$\delta_B = 0.7071 - 0.4$

$\delta_B = 0.3071$ m

En seguida se muestra el diagrama de parámetros cinemáticos de este problema, con objeto de simplificar su resolución con el empleo del método del trabajo y la energía.



El trabajo que realiza el peso de A a B es:

$$U_{A\,a\,B}^{W} = \text{-W}\ (y_B - y_A)$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = -2\ (9.81)\ (0 - 0.1464)$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = -19.62\ (-0.1464)$$
$$U_{A\,a\,B}^{W} = 2.873\ \text{J}$$

El trabajo que realiza la fuerza del resorte de A a B es:

$$U_{A\,a\,B}^{k} = -\frac{1}{2}\ \text{k}\left(\delta_B^2 - \delta_A^2\right)$$
$$U_{A\,a\,B}^{k} = -\frac{1}{2}\ (200)\left(0.3071^2 - 0.5239^2\right)$$
$$U_{A\,a\,B}^{k} = -100\ (0.0943 - 0.2744)$$
$$U_{A\,a\,B}^{k} = -100\ (-0.1801)$$
$$U_{A\,a\,B}^{k} = 18.01\ \text{J}$$

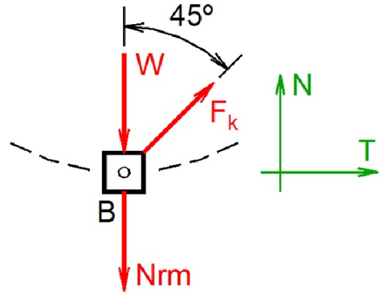
Con base en la expresión del trabajo y la energía:

$$U_{A\,a\,B}^{W} + U_{A\,a\,B}^{k} = \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_A^2$$
$$2.873 + 18.01 = \frac{1}{2}\ (2)\ v_B^2 - \frac{1}{2}\ (2)\ (0)^2$$
$$20.88 = v_B^2$$
$$v_B = \sqrt{20.88}$$
$$v_B = 4.570\ \frac{m}{s}$$

La rapidez del collarín cuando se encuentra en B es:

$$v_B = 4.570\ \frac{m}{s}.$$

Ahora, para calcular la aceleración del collarín en el punto B, se traza el diagrama de cuerpo libre del collarín en dicho punto:



La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el collarín son:

$\overline{W}$ = {0, -2 (9.81)}

$\overline{W}$ = {0, -19.62} N

$\overline{N}$ = {0, -Nrm}

$\overline{F_k}$ = k δ_B {Sin [45°], Cos [45°]}

$\overline{F_k}$ = 200 (0.3071) {0.7071, 0.7071}

$\overline{F_k}$ = {43.43, 43.43} N

Con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{W} + \overline{N} + \overline{F_k} = \text{m} \left\{a_{B,T},\ a_{B,N}\right\}$

$\{0, -19.62\} + \{0, -\text{Nrm}\} + \{43.43, 43.43\} = 2 \left\{a_{B,T},\ a_{B,N}\right\}$

De la expresión anterior pueden establecerse dos ecuaciones escalares:

$43.43 = 2\ a_{B,T}$

$43.43 - 19.62 - \text{Nrm} = 2\ a_{B,N}$

De la primera ecuación se puede obtener la aceleración tangencial en B:

$2\ a_{B,T} = 43.43$

$a_{B,T} = \frac{43.43}{2}$

$a_{B,T} = 21.72\ \frac{m}{s^2}$

Para la obtención de la aceleración normal en B, se recurre a su definición con base en la rapidez y el radio de curvatura:

$a_{B,N} = \frac{v_B^2}{R}$

$a_{B,N} = \frac{20.88}{0.5}$

$a_{B,N} = 41.76\ \frac{m}{s^2}$

Por tanto, la aceleración total en el punto B es:

$\overline{a_B} = \{a_{B,T}, a_{B,N}\}$

$\overline{a_B} = \{21.72, 41.76\}\ \frac{m}{s^2}$

Entonces, su magnitud es:

$$|\overline{a_B}| = \sqrt{(21.72)^2 + (41.76)^2}$$
$$|\overline{a_B}| = \sqrt{471.8 + 1744}$$
$$|\overline{a_B}| = \sqrt{2216}$$
$$|\overline{a_B}| = 47.07\ \frac{m}{s^2}$$

La magnitud de la aceleración total del collarín en el punto B es:

$$|\overline{a_B}| = 47.07\ \frac{m}{s^2}.$$

Resolución del problema con funciones de Mahematica

Datos:

```
m = 2;
g = 9.81;
R = 0.5;
γ = 22.5 °;
L0 = 0.4;
k = 200;
yB = 0;
vA = 0;
W = m g
```

Resolución del triángulo ACO

```
CA = R
CO = R
β = γ
ec1 = Sin[α]/CO == Sin[β]/CA
resp1 = Solve[ec1]
αSol = α /. resp1[[1]]
ec2 = αSol + β + C == π
resp2 = Solve[ec2]
Csol = C /. resp2[[1]]
ec3 = LA/Sin[Csol] == CO/Sin[αSol]
resp3 = Solve[ec3]
LAsol = LA /. resp3[[1]]
δA = LAsol - L0
```

Cálculo de y_A

```
ec4 = θ + π/2 == Csol
resp4 = Solve[ec4]
θsol = θ /. resp4[[1]]
ec5 = Cos[θsol] == cA/CA
resp5 = Solve[ec5]
cAsol = cA /. resp5[[1]]
CB = CA
yA = CB - cAsol
```

Deformación del resorte en B

```
ec6 = LB^2 == CB^2 + CO^2
resp6 = Solve[ec6]
LBsol = LB /. resp6[[2]]
δB = LBsol - L0
```

Aplicación del método del trabajo y la energía para el cálculo de v_B

```
UWAaB = -W (yB - yA)
UkAaB = -1/2 k (δB^2 - δA^2)
ec7 = UWAaB + UkAaB == 1/2 m vB^2 - 1/2 m vA^2
resp7 = Solve[ec7]
vBsol = vB /. resp7[[2]]
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el collarín en el punto B

```
vW = {0, -m g}
vN = {0, -Nrm}
vFk = k δB {Sin[45 °], Cos[45 °]}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton

```
ec8 = vW + vN + vFk == m {aBT, aBN}
resp8 = Solve[ec8, {aBT, Nrm}]
aBTsol = aBT /. resp8[[1]]
```

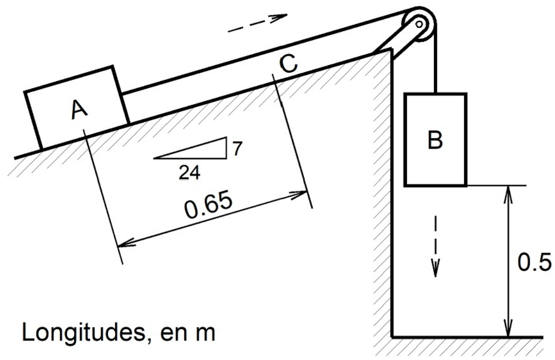
Cálculo de la aceleración total

$$aBN = \frac{vBsol^2}{R}$$

```
vaB = {aBTsol, aBN}
aB = Norm[vaB]
```

Ejercicio 55

Dos cuerpos A y B, con masas iguales de m = 5 kg, están conectados por medio de una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, y se sueltan del reposo en la posición mostrada en la figura.



El cuerpo A se mueve hacia la derecha debido a la tensión en la cuerda provocada por B, y luego que éste llega al piso, A empieza a frenar hasta llegar a C.

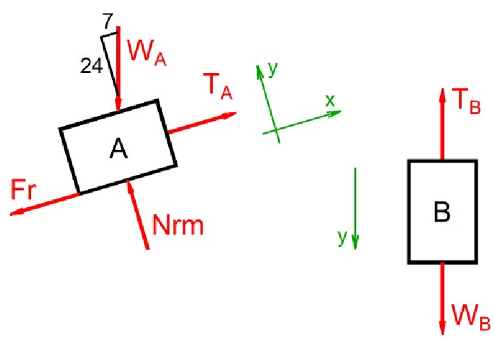
a) Determine el trabajo que realiza el peso del cuerpo B.

b) Calcule la altura que sube el cuerpo A.

c) Obtenga el coeficiente de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado.

d) Determine la rapidez con que el cuerpo B choca contra el piso.

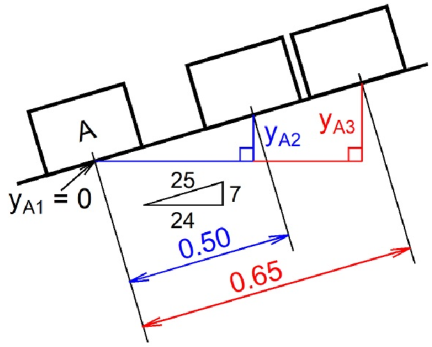
Ante todo, se dibujan los diagramas de cuerpo libre de A y B, con objeto de determinar todas las fuerzas que actúan sobre ellos:



Entonces, en el cuerpo A las fuerzas que desarrollan trabajo son el peso, la fuerza de fricción y la tensión de la cuerda; en el cuerpo A, su peso y la citada tensión.

Para poder calcular el trabajo que desarrollan dichas fuerzas, se necesitan las posiciones de los bloques así como sus alturas.

Primero, se procede a calcular las alturas del cuerpo A, con base en la siguiente figura:



Longitudes, en m

Se puede verificar que para el triángulo de la pendiente de dicho plano inclinado, su hipotenusa es:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Dado que:

$$\Delta x = 24$$
$$\Delta y = 7$$
$$\text{hip} = \sqrt{(24)^2 + (7)^2}$$
$$\text{hip} = \sqrt{576 + 49}$$
$$\text{hip} = \sqrt{625}$$
$$\text{hip} = 25$$

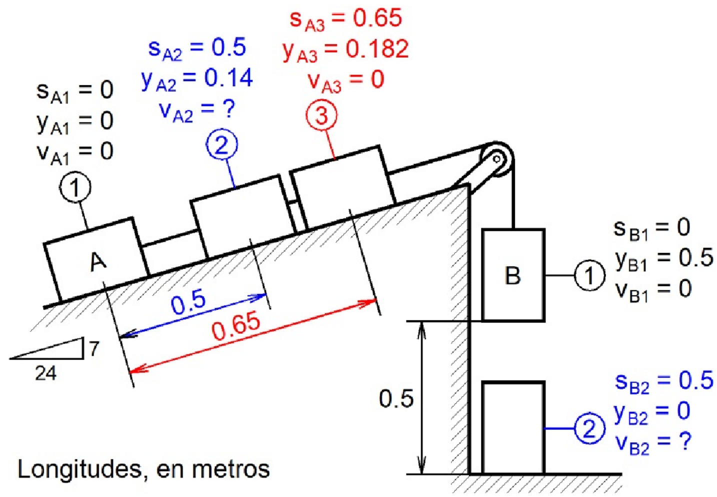
Luego, con base en el teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes:

$$\frac{y_{A2}}{0.50} = \frac{7}{25}$$
$$y_{A2} = \frac{7\,(0.50)}{25}$$
$$y_{A2} = \frac{3.5}{25}$$
$$y_{A2} = 0.14 \text{ m}$$

De forma similar:

$$\frac{y_{A3}}{0.65} = \frac{7}{25}$$
$$y_{A3} = \frac{7\,(0.65)}{25}$$
$$y_{A3} = \frac{4.55}{25}$$
$$y_{A3} = 0.182 \text{ m}$$

Con los valores obtenidos, se puede trazar el diagrama de parámetros cinemáticos necesarios para el cálculo del trabajo de las fuerzas que actúan en los cuerpos, que se muestra a continuación:



Los valores de los parámetros son independientes para cada uno de los cuerpos, en el sentido de que existe una referencia para la posición y puede ser otro para la altura de uno de los cuerpos, y para el otro cuerpo la referencia de posición y altura puede ser diferente.
Conviene que la referencia de altura sea el punto más bajo del cuerpo, a menos de que estén involucrados resortes, en cuyo caso se simplifica la resolución escogiendo el punto natural de equilibrio del resorte como referencia tanto de la altura como de la posición.
Respecto a la referencia de posición, conviene que sea el punto inicial del cuerpo en estudio.

a) Determine el trabajo que realiza el peso del cuerpo B

La expresión del trabajo que realiza el peso de B es:

$$U_{1\,a\,2}^{W_B} = -m_B\, g\,(y_{\text{B2}} - y_{\text{B1}})$$
$$U_{1\,a\,2}^{W_B} = \text{-5 (9.81) (0 - 0.5)}$$
$$U_{1\,a\,2}^{W_B} = \text{-49.05 (-0.5)}$$
$$U_{1\,a\,2}^{W_B} = 24.53\ \text{J}$$

El trabajo es positivo ya que el cuerpo baja, por lo que el peso es la fuerza que hace que se incremente la rapidez y, por consiguiente, la energía cinética.

El trabajo que realiza el peso del cuerpo B, del punto 1 al punto 2 es:

$$U_{1\,a\,2}^{W_B} = 24.53\ \text{J.}$$

b) Calcule la altura que sube el cuerpo A

La altura que sube el cuerpo A corresponde al parámetro y_{A3}, por consiguiente:

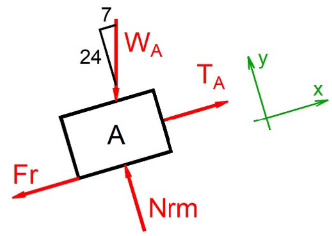
$$y_{\text{A3}} = 0.182\ \text{m}$$

La altura que sube el cuerpo A es de:

$$y_{\text{A3}} = 0.182\ \text{m.}$$

c) Obtenga el coeficiente de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado

Para obtener el coeficiente de fricción entre A y el plano inclinado, se aplica el método del trabajo y la energía. Dado que en el cuerpo A está aplicada la fuerza de fricción, primero se calcula su magnitud, con base en la resolución de la segunda ley de Newton para dicho cuerpo.



La representación vectorial de las fuerzas que actúan en A es:

$\overline{T_A} = \{T_A, 0\}$

$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-Fr}, 0\}$

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$

$\overline{W_A} = 5\ (9.81) \left\{-\frac{7}{25},\ -\frac{24}{25}\right\}$

$\overline{W_A} = 49.05 \left\{-\frac{7}{25},\ -\frac{24}{25}\right\}$

$\overline{W_A} = \{-13.73, -47.09\}$ N

En el diagrama de cuerpo libre del cuerpo A puede observarse que el vector que representa a su peso es una fuerza que se localiza en el tercer cuadrante del sistema de referencia, por lo cual ambas componentes son negativas. Asimismo, en el triángulo de la pendiente de la flecha correspondiente, el lado paralelo al eje x es de 7 unidades y el lado paralelo al eje y es de 24, por lo que se obtiene el vector unitario obtenido arriba.

Al aplicar la segunda ley de Newton, se obtiene lo siguiente:

$\overline{T_A} + \overline{\text{Fr}} + \overline{N} + \overline{W_A} = m_A\ \{a_{\text{Ax}},\ 0\}$

$\{\text{T}, 0\} + \{\text{-Fr}, 0\} + \{0, \text{Nrm}\} + \{-13.73, -47.09\} = \{5\ a_{\text{Ax}}, 0\}$

$\{\text{T - Fr} - 13.73, \text{Nrm} - 47.09\} = \{5\ a_{\text{Ax}}, 0\}$

De la componente en y de la expresión anterior se obtiene lo siguiente:

Nrm - 47.09 = 0

Por consiguiente:

Nrm = 47.09 N

De donde se puede obtener la magnitud de la fuerza de fricción:

$\text{Fr} = \mu\ \text{Nrm}$

$\text{Fr} = \mu\ 47.09$

es decir:

$\text{Fr} = 47.09\ \mu$

Ya que se desconoce el coeficiente de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado.

En seguida, se plantean las expresiones del método del trabajo y la energía, tanto para el cuerpo A, de 1 a 3, como para el B, de 1 a 2:

$U_{1\,a\,3}^{W_A} = -W_A\,(y_{A3} - y_{A1})$

$U_{1\,a\,3}^{W_A} = -5\,(9.81)\,(0.182 - 0)$

$U_{1\,a\,3}^{W_A} = -8.927\text{ J}$

$U_{1\,a\,2}^{T_A} = \text{T}\,(s_{A2} - s_{A1})$

$U_{1\,a\,2}^{T_A} = \text{T}\,(0.5 - 0)$

$U_{1\,a\,2}^{T_A} = 0.5\text{ T}$

$U_{1\,a\,3}^{\text{Fr}} = -\text{Fr}\,(s_{A3} - s_{A1})$

$U_{1\,a\,3}^{\text{Fr}} = -47.09\,\mu\,(0.65 - 0)$

$U_{1\,a\,3}^{\text{Fr}} = -30.61\,\mu$

$U_{1\,a\,2}^{T_B} = -\text{T}\,(s_{B2} - s_{B1})$

$U_{1\,a\,2}^{T_B} = -\text{T}\,(0.5 - 0)$

$U_{1\,a\,2}^{T_B} = -0.5\text{ T}$

Es importante hacer notar que la fuerza de tensión de la cuerda en el cuerpo A sólo actúa de 1 a 2, debido a que de 2 a 3 la cuerda ya no está actuando sobre dicho cuerpo debido a que el cuerpo B ya no lo jala en ese intervalo.

Por consiguiente, la expresión del trabajo y energía para el cuerpo A, de 1 a 3 es:

$U_{1\,a\,3}^{W_A} + U_{1\,a\,2}^{T_A} + U_{1\,a\,3}^{\text{Fr}} = \frac{1}{2}\,m_A\,v_{A3}^2 - \frac{1}{2}\,m_A\,v_{A1}^2$

$-8.927 + 0.5\text{ T} - 30.61\,\mu = \frac{1}{2}\,(5)\,(0)^2 - \frac{1}{2}\,(5)\,(0)^2$

$-8.927 + 0.5\text{ T} - 30.61\,\mu = 0$ (1)

Para el cuerpo B, la expresión del trabajo y energía de 1 a 2 es:

$U_{1\,a\,2}^{W_B} + U_{1\,a\,3}^{T_B} = \frac{1}{2}\,m_B\,v_{B2}^2 - \frac{1}{2}\,m_B\,v_{B1}^2$

$24.53 - 0.5\text{ T} = \frac{1}{2}\,(5)\,v_{B2}^2$

$24.53 - 0.5\text{ T} = 2.5\,v_{B2}^2$ (2)

Si se suman ambas expresiones, 1 y 2, se obtiene lo siguiente:

$-8.927 + 0.5\text{ T} - 30.61\,\mu = 0$

$24.53 - 0.5\text{ T} = 2.5\,v_{B2}^2$ +

____

$-8.927 + 0.5\text{ T} - 30.61\,\mu + 24.53 - 0.5\text{ T} = 2.5\,v_{B2}^2$

$15.60 - 30.61\,\mu = 2.5\,v_{B2}^2$ (3)

Se puede observar que se cancelan los trabajos de la tensión de la cuerda de ambos cuerpos.
De este resultado, se puede concluir que en los problemas que involucren a cuerpos conectados, se puede establecer la expresión del trabajo y la energía para ambos cuerpos como sigue:

La suma de los trabajos que realizan todas las fuerzas que actúan sobre ambos cuerpos, eliminando el trabajo de la fuerza que actúa entre ellos, es igual a la suma de los incrementos de las energías cinéticas que sufren dichos cuerpos.

Dado que la ecuación 3 tiene dos incógnitas, se requiere establecer otra ecuación.
Para ello, se establece la expresión del trabajo y la energía del cuerpo A, ahora de 2 a 3, en donde sólo trabajan su peso y la fuerza de fricción:

$$U_{2\,a\,3}^{W_A} + U_{2\,a\,3}^{\mathrm{Fr}} = \frac{1}{2}\, m_A\, v_{\mathrm{A3}}^2 - \frac{1}{2}\, m_A\, v_{\mathrm{A2}}^2$$

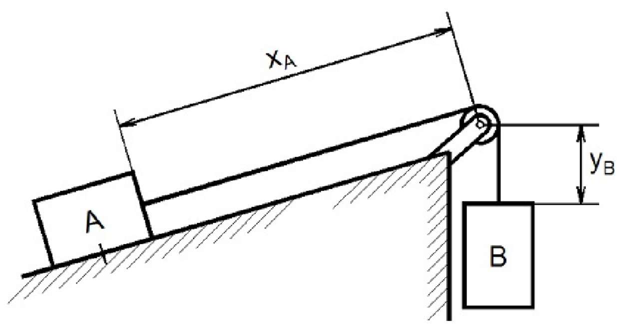
en donde:

$$U_{2\,a\,3}^{W_A} = -W_A\,(y_{\mathrm{A3}} - y_{\mathrm{A2}})$$
$$U_{2\,a\,3}^{W_A} = -5\ (9.81)\ (0.182 - 0.14)$$
$$U_{2\,a\,3}^{W_A} = -49.05\ (0.042)$$
$$U_{2\,a\,3}^{W_A} = -2.060\ \mathrm{J}$$
$$U_{2\,a\,3}^{\mathrm{Fr}} = -\mathrm{Fr}\ (s_{\mathrm{A3}} - s_{\mathrm{A2}})$$
$$U_{2\,a\,3}^{\mathrm{Fr}} = -47.09\ \mu\ (0.65 - 0.5)$$
$$U_{2\,a\,3}^{\mathrm{Fr}} = -47.09\ \mu\ (0.15)$$
$$U_{1\,a\,3}^{\mathrm{Fr}} = -7.063\ \mu$$

Por tanto:

$$-2.060 - 7.063\ \mu = \frac{1}{2}\ (5)\ (0)^2 - \frac{1}{2}\ (5)\ v_{\mathrm{A2}}^2$$
$$-2.060 - 7.063\ \mu = -2.5\ v_{\mathrm{A2}}^2 \qquad (4)$$

La relación cinemática entre los cuerpos se puede obtener con base en la longitud de la cuerda que los une, a partir del siguiente diagrama:



La longitud de la cuerda es:

$$\mathrm{L} = x_A + C_1 + y_B$$

Luego de derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo:

$$0 = v_A + 0 + v_B$$

es decir:

$$v_A = -v_B$$

Dado que esta relación cinemática se obtiene considerando que los ejes de referencia son del centro de la polea fija hacia cada uno de los cuerpos, y en el planteamiento de las expresiones del trabajo y la energía se consideró para el cuerpo A en sentido contrario, la expresión de la relación cinemática para este caso es:

$$v_A = v_B$$

Por consiguiente, para el punto 2:

$$v_{\mathrm{A2}} = v_{\mathrm{B2}} \qquad (5)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado por 3, 4 y 5.

$$15.60 - 30.61\,\mu = 2.5\, v_{B2}^2 \qquad (3)$$

$$-2.060 - 7.063\,\mu = -2.5\, v_{A2}^2 \qquad (4)$$

Primero, se sustituye 5 en 4 y se suma miembro a miembro la ecuación 3:

$$-2.060 - 7.063\,\mu = -2.5\, v_{B2}^2$$

$$15.60 - 30.61\,\mu = 2.5\, v_{B2}^2 \quad +$$

____

$$-2.060 - 7.063\,\mu + 15.60 - 30.61\,\mu = 0$$

De donde:

$$13.54 - 37.67\,\mu = 0$$

$$37.67\,\mu = 13.54$$

$$\mu = \frac{13.54}{37.67}$$

$$\mu = 0.3595$$

El coeficiente de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado es:

$\mu = 0.3595$.

d) Determine la rapidez con que el cuerpo B choca contra el piso

Para obtener la rapidez solicitada, se sustituye el resultado anterior en la expresión 3:

$$15.60 - 30.61\,(0.3595) = 2.5\, v_{B2}^2$$

$$15.60 - 11.01 = 2.5\, v_{B2}^2$$

$$2.5\, v_{B2}^2 = 4.59$$

$$v_{B2}^2 = \frac{4.59}{2.5}$$

$$v_{B2}^2 = 1.838$$

$$v_{B2} = 1.356\, \frac{m}{s}$$

La rapidez con que el cuerpo B choca con el piso es:

$v_{B2} = 1.356\, \frac{m}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 5;
mB = 5;
g = 9.81;
xAf = 0.65;
yBf = 0.5;
```

Parámetros cinemáticos:

```
Δx = 24;
Δy = 7;
yA1 = 0;
sA1 = 0;
vA1 = 0;
sA2 = yBf
sA3 = xAf
vA3 = 0;
yB1 = yBf;
sB1 = 0;
vB1 = 0;
```

```
yB2 = 0
sB2 = yBf
hip = Sqrt[Δx^2 + Δy^2]
ec1 = yA2/yBf == Δy/hip
resp1 = Solve[ec1]
yA2sol = yA2 /. resp1[[1]]
ec2 = yA3/xAf == Δy/hip
resp2 = Solve[ec2]
yA3sol = yA3 /. resp2[[1]]
```

a) Trabajo que realiza el peso del cuerpo B

```
UWB1a2 = -mB g (yB2 - yB1)
```

b) Altura que sube el cuerpo A

```
hSubeA = yA3sol
```

c) Coeficiente de fricción entre el cuerpo A y el plano inclinado

```
vWA = mA g {-Δy/hip, -Δx/hip}
vFr = {-Fr, 0}
vT = {T, 0}
vN = {0, N}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec3 = vWA + vFr + vT + vN == mA {aAx, 0}
resp3 = Solve[ec3, {aAx, N}]
Nsol = N /. resp3[[1]]
```

Aplicación del método del trabajo y la energía:

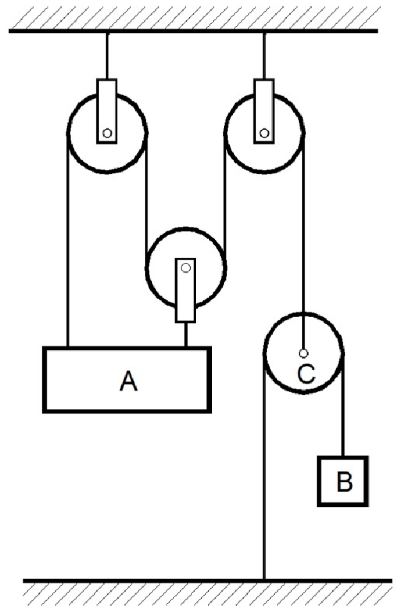
```
Fr = μ Nsol
UWA1a3 = -mA g (yA3sol - yA1)
UFr1a3 = -Fr (sA3 - sA1)
ec4 = UWA1a3 + UFr1a3 + UWB1a2 == 1/2 mA vA3^2 - 1/2 mA vA1^2 + 1/2 mB vB2^2 - 1/2 mB vB1^2
UWA2a3 = -mA g (yA3sol - yA2sol)
UFr2a3 = -Fr (sA3 - sA2)
ec5 = UWA2a3 + UFr2a3 == 1/2 mA vA3^2 - 1/2 mA vA2^2
ec6 = vA2 == vB2
resp6 = Solve[{ec4, ec5, ec6}]
μSol = μ /. resp6[[2]]
vA2sol = vA2 /. resp6[[2]]
```

d) Rapidez con que el cuerpo B choca contra el piso

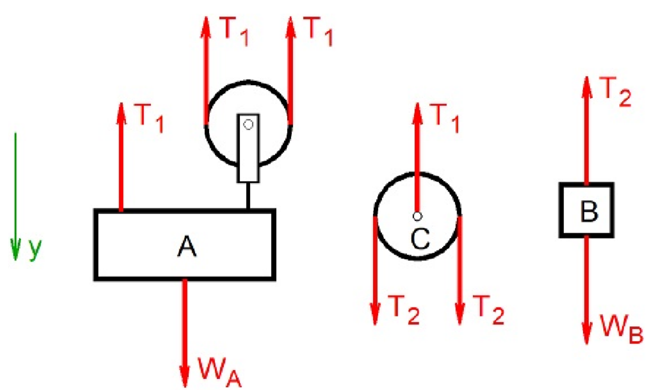
```
vB2 = vA2sol
```

Ejercicio 56

El sistema mostrado en la figura se compone de dos bloques, A, de masa desconocida, y B, de 2 kg, dos cuerdas flexibles, inextensibles y de masa despreciable y cuatro poleas.
Si parte del reposo, determine la masa de A si su rapidez es de 0.5 $\frac{m}{s}$, hacia abajo, luego de que B subió 1.2 m.

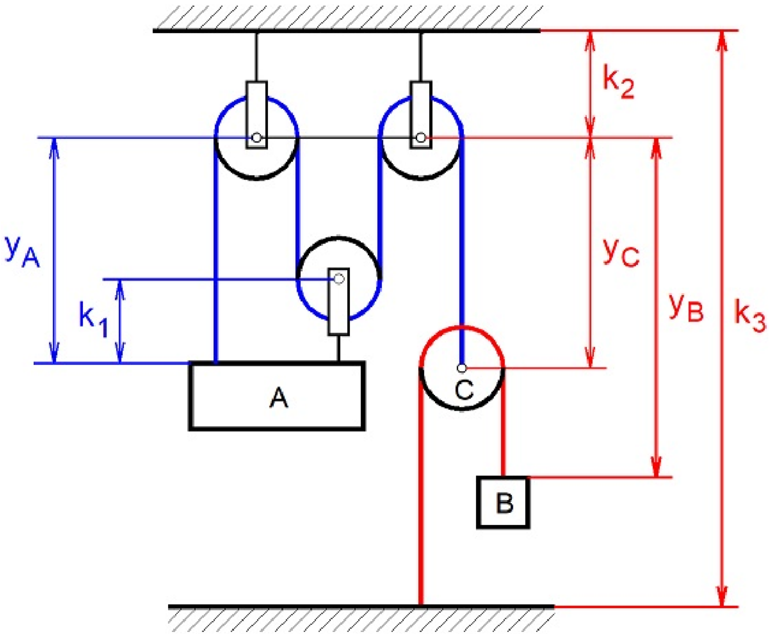


Para simplificar la resolución del problema, se considera que la polea que está unida al bloque A forma un solo cuerpo junto con este bloque, con el empleo del método del trabajo y la energía.
A continuación se muestran los diagramas de cuerpo libre del conjunto bloque A - polea, la polea C y el bloque B:



Como se puede observar, las únicas fuerzas externas que se requiere considerar son los pesos de los bloques.
Se requiere establecer como expresiones adicionales la relación de rapideces y de desplazamientos de dichos bloques.

Para obtenerlos, se hace el análisis de la longitud de las cuerdas en función de la posición de los citados bloques y de la polea móvil C, con base en la siguiente figura:



La longitud de la cuerda de color azul, L_1, es:

$$L_1 = y_A + C_1 + (y_A - k_1) + C_2 + (y_A - k_1) + C_3 + y_C$$

La longitud de la cuerda de color rojo, L_2, es:

$$L_2 = (k_3 - y_C - k_2) + C_4 + (y_B - y_C)$$

Luego de derivar con respecto al tiempo la primera expresión, se obtiene:

$$0 = 3\, v_A + v_C$$

De donde:

$$v_C = -3\, v_A$$

La derivada de la segunda expresión es:

$$0 = -2\, v_C + v_B$$

En la que se sustituye v_C de la expresión anterior:

$$0 = -2\,(-3\, v_A) + v_B$$

Por tanto:

$$v_B = -6\, v_A \qquad (1)$$

Dado que dichas rapideces se pueden escribir como el límite cuando el incremento del tiempo tiende a cero de la razón de los incrementos de posición, desplazamiento, y el incremento del tiempo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} -6\, \frac{\Delta y_A}{\Delta t}$$

Entonces:

$$\frac{\Delta y_B}{\Delta t} = -6\, \frac{\Delta y_A}{\Delta t}$$

De donde:

$$\Delta y_B = -6\, \Delta y_A \qquad (2)$$

Si la rapidez del bloque A es:

$$v_A = 0.5\, \frac{m}{s}$$

Con base en la ecuación 1, la rapidez del bloque B es:

$v_B = -6\ (0.5)$

$v_B = -3\ \frac{m}{s}$

El signo menos indica que la rapidez es en sentido contrario de la referencia establecida, es decir, hacia arriba.

Por otra parte, si el desplazamiento de B es de 1.2 m hacia arriba:

$\Delta y_B = -1.2\ \text{m}$

Entonces, con el empleo de la ecuación 2 el desplazamiento del bloque A es:

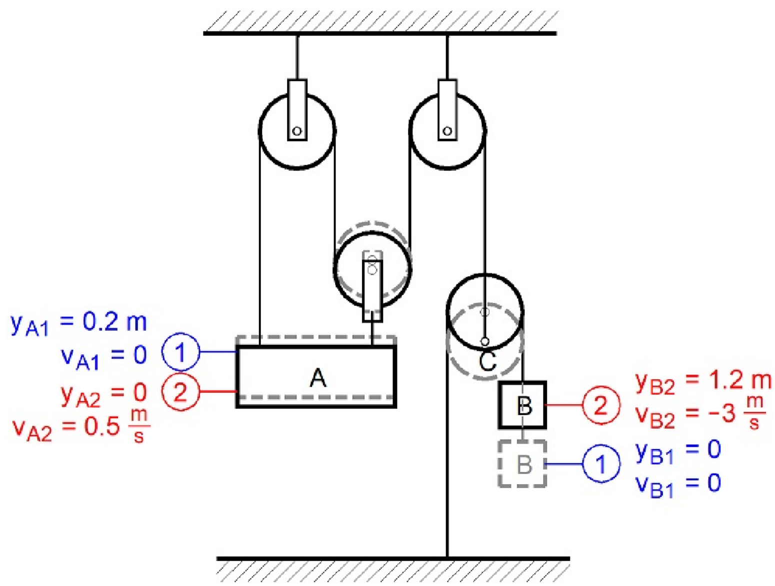
$-6\ \Delta y_A = \Delta y_B$

$\Delta y_A = -\frac{1}{6}\ \Delta y_B$

$\Delta y_A = -\frac{1}{6}\ (-1.2)$

$\Delta y_A = 0.2\ \text{m}$

Con base en los resultados obtenidos se puede trazar el siguiente diagrama de parámetros cinemáticos:



El trabajo que desarrolla el peso del bloque A es:

$U_{1\,a\,2}^{W_A} = -W_A\ (y_{A2} - y_{A1})$

$U_{1\,a\,2}^{W_A} = -m_A\ g\ (0 - 0.2)$

$U_{1\,a\,2}^{W_A} = 0.2\ \text{g}\ m_A$

$U_{1\,a\,2}^{W_A} = 1.962\ m_A$

El trabajo que desarrolla el peso de B es:

$U_{1\,a\,2}^{W_B} = -W_B\ (y_{B2} - y_{B1})$

$U_{1\,a\,2}^{W_B} = -\ 2\ g\ (1.2 - 0)$

$U_{1\,a\,2}^{W_B} = -2.4\ \text{g}$

$U_{1\,a\,2}^{W_B} = -23.54\ \text{J}$

La expresión del trabajo y la energía para el sistema de bloques, cuerdas y poleas queda:

$$U_{1\,a\,2}^{W_A} + U_{1\,a\,2}^{W_B} = \frac{1}{2}\, m_A\, v_{A2}^2 - \frac{1}{2}\, m_A\, v_{A1}^2 + \frac{1}{2}\, m_B\, v_{B2}^2 - \frac{1}{2}\, m_B\, v_{B1}^2$$

Por consiguiente:

$$1.962\, m_A - 23.54 = \frac{1}{2}\, m_A\, (0.5)^2 - \frac{1}{2}\, m_A\, (0)^2 + \frac{1}{2}\, (2)\, (-3)^2 - \frac{1}{2}\, (2)\, (0)^2$$

$$1.962\, m_A - 23.54 = \frac{1}{2}\, m_A\, (0.25) - 0 + 9 - 0$$

$$1.962\, m_A - 23.54 = 0.125\, m_A + 9$$

$$1.962\, m_A - 0.125\, m_A = 9 + 23.54$$

$$1.837\, m_A = 32.54$$

$$m_A = \frac{32.54}{1.837}$$

$$m_A = 17.72 \text{ kg}$$

Si el sistema parte del reposo, para que el bloque A tenga una rapidez de 0.5 $\frac{m}{s}$ hacia abajo cuando el bloque B haya subido 1.2 m, la masa de A debe ser de:

$m_A = 17.72$ kg.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mB = 2;
g = 9.81;
vA2 = 0.5;
ΔyB = -1.2;
```

Obtención de las relaciones cinemáticas:

```
ec1 = L1 == yA + C1 + (yA - k1) + C2 + (yA - k1) + C3 + yC
ec2 = L2 == (k3 - yC - k2) + C4 + (yB - yC)
ec3 = 0 == 3 vA + vC
ec4 = 0 == -2 vC + vB
resp4 = Solve[{ec3, ec4}, {vB, vC}]
vBsol = vB /. resp4[[1]]
```

Parámetros cinemáticos:

```
ec5 = ΔyB == vBsol /. vA → ΔyA
resp5 = Solve[ec5]
ΔyAsol = ΔyA /. resp5[[1]]
yA1 = ΔyAsol
vA1 = 0;
yA2 = 0;
yB1 = 0;
vB1 = 0;
yB2 = -ΔyB
vB2 = vBsol /. vA → vA2
```

Aplicación del método del trabajo y la energía:

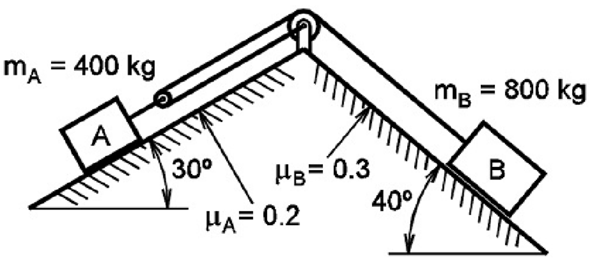
```
UWA1a2 = -mA g (yA2 - yA1)
UWB1a2 = -mB g (yB2 - yB1)
```

$$ec6 = UWA1a2 + UWB1a2 == \frac{1}{2} mA\, vA2^2 - \frac{1}{2} mA\, vA1^2 + \frac{1}{2} mB\, vB2^2 - \frac{1}{2} mB\, vB1^2$$

```
resp6 = Solve[ec6]
mAsol = mA /. resp6[[1]]
```

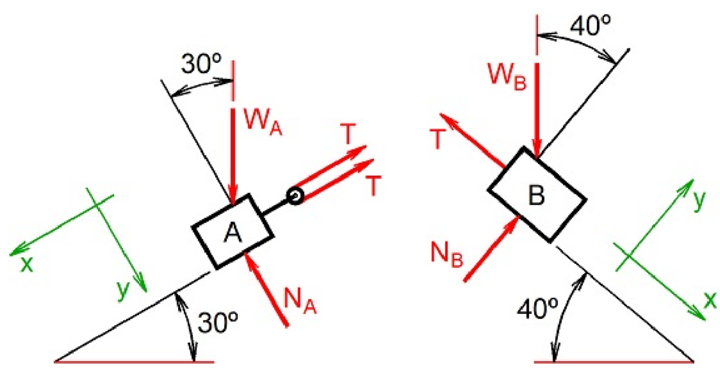
Ejercicio 57

Con base en el Ejercicio 33, determine la rapidez del bloque A, una vez que el bloque B se haya movido 2.4 m, partiendo del reposo.
Como antecedente, en la figura se muestra un sistema mecánico formado por los bloques A y B de 400 y 800 kg de masa, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una polea fija y una segunda polea conectada con el bloque A, ambas sin fricción y de masa despreciable.



A continuación se muestra el proceso seguido para establecer hacia dónde se tienden a mover estos bloques, por lo que se les analizó considerando que está estático el bloque A y que no hubiera fricción entre dichos bloques y las superficies en contacto.

Para esto, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de los bloques, bajo las consideraciones señaladas:



Con base en la suposición de que el bloque A no se mueve, se calcula la magnitud de la tensión de la cuerda, T; posteriormente, con el valor anterior se determina la resultante en el bloque B. Si ésta es positiva, indica que este bloque se mueve hacia la derecha-abajo.

Representación vectorial de las fuerzas:

$\overline{T_A}$ = {-T, 0}

$\overline{N_A}$ = {0, $-N_A$}

$\overline{W_A}$ = W_A {Sin [30°], Cos [30°]}

$\overline{W_A}$ = 400 (9.81) {0.5, 0.8660}

$\overline{W_A}$ = 3924 {0.5, 0.8660}

$\overline{W_A}$ = {1962, 3398} N

Se aplica la segunda ley de Newton, considerando que el bloque no se mueve:

2 $\overline{T_A}$ + $\overline{N_A}$ + $\overline{W_A}$ = m_A {0, 0}

2 {-T, 0} + {0, $-N_A$} + {1962, 3398} = {0, 0}

{1962 - 2 T, 3398 - N_A} = {0, 0}

De donde:

$1962 - 2\,T = 0$

$2\,T = 1962$

$T = \frac{1962}{2}$

$T = 981$ N

Para el bloque B, la representación vectorial de las fuerzas que actúan en él es:

$\overline{T_B} = \{-T, 0\}$

$\overline{T_B} = \{-981, 0\}$

$\overline{N_B} = \{0, N_B\}$

$\overline{W_B} = W_B$ {Sin [40°], -Cos [40°]}

$\overline{W_B} = 800\,(9.81)\,\{0.6428, -0.7660\}$

$\overline{W_B} = 7848\,\{0.6428, -0.7660\}$

$\overline{W_B} = \{5045, -6012\}$ N

Se obtiene la resultante, con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{T_B} + \overline{N_B} + \overline{W_B} = m_B\,\{a_B, 0\}$

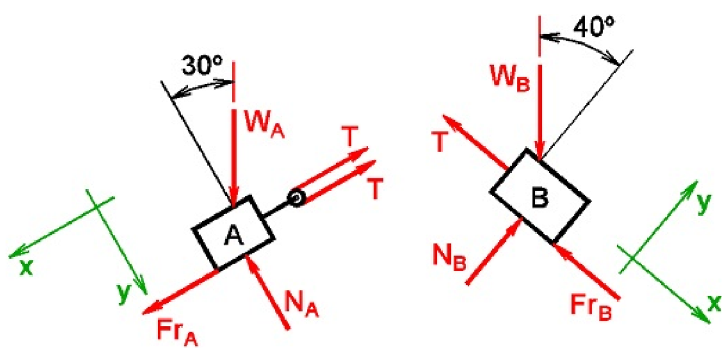
$\{-981, 0\} + \{0, N_B\} + \{5045, -6012\} = \{800\,a_B, 0\}$

$\{5045 - 981, N_B - 6012\} = \{800\,a_B, 0\}$

$\{4064, N_B - 6012\} = \{800\,a_B, 0\}$

Como se puede observar, la componente en x de la resultante es positiva y, por consiguiente,
su aceleración también sería positiva, lo cual indica que el bloque B se mueve hacia la derecha-abajo.

Con base en lo anterior, si B se mueve hacia la derecha-abajo, el bloque A se mueve hacia la derecha-arriba, por lo que el sentido de las fuerzas de fricción, en ambos casos es a la izquierda.
Se dibujan nuevos diagramas de cuerpo libre que incluyan las fuerzas de fricción:



Para la resolución del problema, se aplica el método del trabajo y la energía.
Las fuerzas externas que actúan en el sistema integrado por los dos bloques, las poleas y la cuerda son los pesos de los bloques mencionados y las fuerzas de fricción.
Las normales siempre son perpendiculares a las trayectorias de los bloques y la fuerza de tensión es una fuerza interna del sistema, por lo que no se toman en cuenta.

Entonces, se requiere calcular previamente la magnitud de las fuerzas de fricción, proceso que se muestra a continuación.

La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque A es:

$\overline{Fr_A} = \{Fr_A,\ 0\}$

$\overline{T_A} = \{-T, 0\}$

$\overline{N_A} = \{0, -N_A\}$

$\overline{W_A} = m_A\, g\, \{\mathrm{Sin}\,[30°], \mathrm{Cos}\,[30°]\}$

$\overline{W_A} = 3924\, \{0.5, 0.8660\}$

$\overline{W_A} = \{1962, 3398\}$ N

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{Fr_A} + 2\, \overline{T_A} + \overline{N_A} + \overline{W_A} = m_A\, \{a_A,\ 0\}$

$\{Fr_A,\ 0\} + 2\, \{-T, 0\} + \{0, -N_A\} + \{1962, 3398\} = \{400\, a_A, 0\}$

$\{1962 + Fr_A - 2\, T, 3398 - N_A\} = \{400\, a_A, 0\}$

De la ecuación anterior se establecen las siguientes expresiones escalares:

$1962 + Fr_A - 2\, T = 400\, a_A$

$3398 - N_A = 0$

De la segunda expresión se obtiene:

$N_A = 3398$ N

De donde:

$Fr_A = \mu_A\, N_A$

$Fr_A = 0.2\, (3398)$

$Fr_A = 679.7$ N

La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque B es:

$\overline{Fr_B} = \{-Fr_B,\ 0\}$

$\overline{T_B} = \{-T, 0\}$

$\overline{N_B} = \{0, N_B\}$

$\overline{W_B} = m_B\, g\, \{\mathrm{Sin}\,[40°], -\mathrm{Cos}\,[40°]\}$

$\overline{W_B} = 7848\, \{0.6428, -0.7660\}$

$\overline{W_B} = \{5045, -6012\}$ N

Con base en la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación vectorial del movimiento del bloque B:

$\overline{Fr_B} + \overline{T_B} + \overline{N_B} + \overline{W_B} = m_B\, \{a_B, 0\}$

$\{-Fr_B,\ 0\} + \{-T, 0\} + \{0, N_B\} + \{5045, -6012\} = \{800\, a_B, 0\}$

$\{5045 - Fr_B - T, N_B - 6012\} = \{800\, a_B, 0\}$

De la ecuación vectorial anterior se establecen las siguientes expresiones escalares:

$5045 - Fr_B - T = 800\, a_B$

$N_B - 6012 = 0$

Por consiguiente:

$N_B = 6012$ N

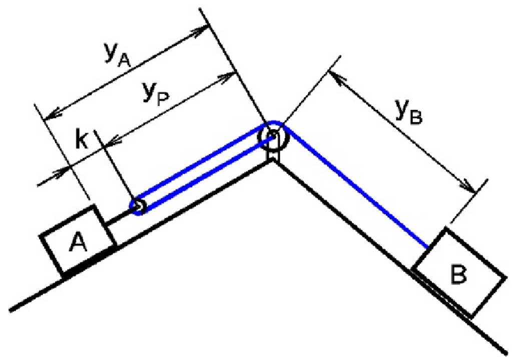
Del valor obtenido se puede calcular la magnitud de la fuerza de fricción en el bloque B:

$Fr_B = \mu_B N_B$

$Fr_B = 0.3\ (6012)$

$Fr_B = 1804$ N

Además de la magnitud de las fuerzas de fricción, también se requiere establecer la relación cinemática, tanto de rapideces como de desplazamientos de los bloques.
Esta relación cinemática se puede obtener por medio de la longitud de la cuerda, en función de la posición de los bloques, con base en la figura que se muestra a continuación:



La longitud constante de la cuerda, L, es:

$L = y_P + C_1 + y_P + C_2 + y_B$

De donde al derivar con respecto al tiempo se obtiene:

$0 = 2\ v_P + v_B$

La longitud constante k entre la polea móvil y el bloque A es:

$k = y_A - y_P$

De forma similar, se deriva con respecto al tiempo:

$0 = v_A - v_P$

Por tanto:

$v_P = v_A$

Se sustituye este valor en la expresión anterior:

$0 = 2\ v_A + v_B$

Es decir:

$v_B = -2\ v_A$

De la expresión anterior y con base en la definición de rapidez como el límite cuando el incremento de tiempo Δt tiende a cero de la razón de incrementos de la posición del cuerpo y del tiempo, se puede establecer lo siguiente:

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} -2 \frac{\Delta y_A}{\Delta t}$

Entonces:

$\frac{\Delta y_B}{\Delta t} = -2 \frac{\Delta y_A}{\Delta t}$

De donde:

$\Delta y_B = -2\ \Delta y_A$

Entonces, si el desplazamiento de B es de 2.4 m hacia abajo:

$\Delta y_B = 2.4$ m

Entonces, con el empleo de la ecuación anterior el desplazamiento del bloque A es:

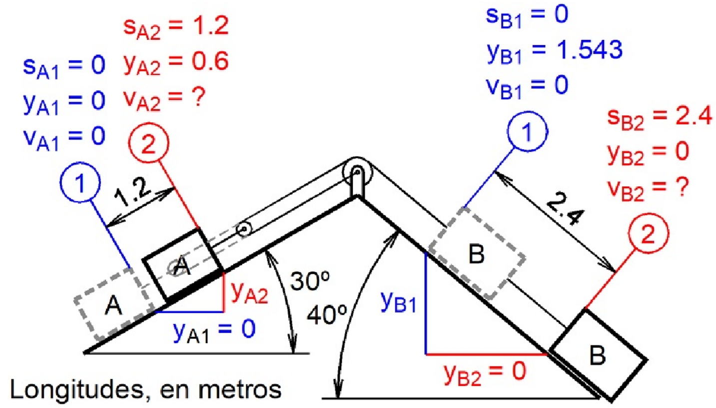
$-2\,\Delta y_A = \Delta y_B$

$\Delta y_A = -\frac{1}{2}\,\Delta y_B$

$\Delta y_A = -\frac{1}{2}\,(2.4)$

$\Delta y_A = -1.2$ m

Con base en estos desplazamientos, se puede trazar el diagrama de parámetros cinemáticos:



Para el cálculo de la altura y_{A2}, se establece la definición de seno de 30°:

$\text{Sin}\,[30°] = \frac{y_{A2}}{1.2}$

$y_{A2} = 1.2\,(0.5)$

$y_{A2} = 0.6$ m

En cuanto a la altura y_{B1}, se procede de forma similar con base en el seno de 40°:

$\text{Sin}\,[40°] = \frac{y_{B1}}{2.4}$

$y_{B1} = 2.4\,(0.6428)$

$y_{B1} = 1.543$ m

Luego, se procede al cálculo del trabajo de los pesos y las fricciones de ambos bloques:

$U_{1\,a\,2}^{W_A} = -W_A\,(y_{A2} - y_{A1})$

$U_{1\,a\,2}^{W_A} = -400\,(9.81)\,(0.6 - 0)$

$U_{1\,a\,2}^{W_A} = -2354$ J

$U_{1\,a\,2}^{W_B} = -W_B\,(y_{B2} - y_{B1})$

$U_{1\,a\,2}^{W_B} = -800\,(9.81)\,(0 - 1.543)$

$U_{1\,a\,2}^{W_B} = 12\,107$ J

$U_{1\,a\,2}^{Fr_A} = -Fr_A\,(s_{A2} - s_{A1})$

$U_{1\,a\,2}^{Fr_A} = -679.7\,(1.2 - 0)$

$U_{1\,a\,2}^{Fr_A} = -815.6$ J

$U_{1\,a\,2}^{Fr_B} = -Fr_B\,(s_{B2} - s_{B1})$

$U_{1\,a\,2}^{Fr_B} = -1804\,(2.4 - 0)$

$U_{1\,a\,2}^{Fr_B} = -4330$ J

Se establece la ecuación del trabajo y la energía para este sistema mecánico:

$$U_{1\,a\,2}^{W_A} + U_{1\,a\,2}^{W_B} + U_{1\,a\,2}^{Fr_A} + U_{1\,a\,2}^{Fr_B} = \frac{1}{2}\, m_A\, v_{A2}^2 - \frac{1}{2}\, m_A\, v_{A1}^2 + \frac{1}{2}\, m_B\, v_{B2}^2 - \frac{1}{2}\, m_B\, v_{B1}^2$$

$$-2354 + 12\,107 - 815.6 - 4330 = \frac{1}{2}\,(400)\, v_{A2}^2 - \frac{1}{2}\,(400)\,(0)^2 + \frac{1}{2}\,(800)\, v_{B2}^2 - \frac{1}{2}\,(800)\,(0)^2$$

$$4608 = 200\, v_{A2}^2 + 400\, v_{B2}^2$$

Con base en la relación cinemática de rapideces:

$$v_B = -2\, v_A$$

$$v_{B2} = -2\, v_{A2}$$

Por tanto:

$$4608 = 200\, v_{A2}^2 + 400\,(-2\, v_{A2})^2$$

$$200\, v_{A2}^2 + 400\,(4\, v_{A2}^2) = 4608$$

$$200\, v_{A2}^2 + 1600\, v_{A2}^2 = 4608$$

$$1800\, v_{A2}^2 = 4608$$

$$v_{A2}^2 = \frac{4608}{1800}$$

$$v_{A2}^2 = 2.561$$

$$v_{A2} = 1.6\, \frac{m}{s}$$

La rapidez del bloque A una vez que el bloque B se haya movido 2.4 m partiendo del reposo es:

$$v_{A2} = 1.6\, \frac{m}{s}.$$

Para verificar este resultado, se hace uso del resultado de la aceleración del bloque A obtenido en el Ejercicio 33:

$$a_A = -1.067\, \frac{m}{s^2}$$

Donde el signo menos indica que A se mueve hacia arriba.

Con base en la definición de aceleración en función de la rapidez y la posición del cuerpo:

$$a_A = v_A\, \frac{d\, v_A}{d\, x_A}$$

Por consiguiente:

$$v_A\, \frac{d\, v_A}{d\, x_A} = -1.067$$

$$v_A\, d\, v_A = -1.067\, d\, x_A$$

Se integran ambos miembros, considerando las condiciones iniciales $v_{A1} = 0$ para $y_{A1} = 0$:

$$\int_0^{v_A} v_A\, d v_A = \int_0^{x_A} -1.067\, d x_A$$

$$\frac{1}{2}\, v_A^2\,\Big]_0^{v_A} = -1.067\, x_A\,\Big]_0^{x_A}$$

$$\frac{1}{2}\, v_A^2\, - \frac{1}{2}\,(0)^2 = -1.067\, x_A - 1.067\,(0)$$

$$\frac{1}{2}\, v_A^2 = -1.067\, x_A$$

$$v_A^2 = -2.134\, x_A$$

$$v_A = \sqrt{-2.134\, x_A}$$

Dado que:

$x_A = -1.2$ m

Es negativo debido a que se mueve hacia arriba, en sentido contrario a la referencia establecida.

Por tanto:

$v_A = \sqrt{(-2.134)(-1.2)}$

$v_A = \sqrt{2.561}$

$v_A = 1.6\ \frac{m}{s}$

Que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 400;
mB = 800;
g = 9.81;
μA = 0.2;
μB = 0.3;
```

Determinación del sentido de movimiento del bloque B:

```
vTA = {-T, 0}
vNA = {0, -NA}
vWA = mA g {Sin[30 °], Cos[30 °]}
ec1 = 2 vTA + vNA + vWA == mA {0, 0}
resp1 = Solve[ec1]
Tsol = T /. resp1⟦1⟧
vTB = {-T, 0}
vNB = {0, NB}
vWB = mB g {Sin[40 °], -Cos[40 °]}
ec2 = vTB + vNB + vWB == mB {aB, 0}
resp2 = Solve[ec2, {aB, NB}]
aBsol = aB /. resp1⟦1⟧
```

Representación vectorial de las fuerzas de fricción que actúan en los bloques:

```
vFrA = {FrA, 0}
vFrB = {-FrB, 0}
```

Ecuación de movimiento del bloque A:

```
ec3 = vFrA + 2 vTA + vNA + vWA == mA {aA, 0}
resp3 = Solve[ec3, {aA, NA}]
NAsol = NA /. resp3[[1]]
FrA = μA NAsol
```

Ecuación de movimiento del bloque B:

```
ec4 = vFrB + vTB + vNB + vWB == mB {aB, 0}
resp4 = Solve[ec4, {aB, NB}]
NBsol = NB /. resp4[[1]]
FrB = μB NBsol
```

Longitudes de las cuerdas en función de las posiciones de los bloques y de la polea móvil:

```
ec5 = L == yP + C1 + yP + C2 + yB
ec6 = k == yA - yP
```

Obtención de la relación cinemática:

```
ec7 = 0 == 2 vP + vB
ec8 = 0 == vA - vP
resp8 = Solve[{ec7, ec8}, {vB, vP}]
vBsol = vB /. resp8[[1]]
```

Ejercicio 58

Un monoplaza F1, cuya masa es de 750 kg, puede acelerar de 0 a 100 kph en 2.8 s, alcanza una rapidez máxima de unos 340 kph.
Suponiendo que alcanza los 100 kph con aceleración constante y que para este tipo de vehículos la magnitud de la fuerza de resistencia viscosa del aire es $F_d = 0.68\, v^2$, donde F_d está en N si la rapidez del monoplaza, v, está en $\frac{m}{s}$, determine:

a) la magnitud de la fuerza de tracción que suministra el motor del vehículo cuando su rapidez es de 100 kph;

b) la potencia que suministra el motor en ese instante, en hp;

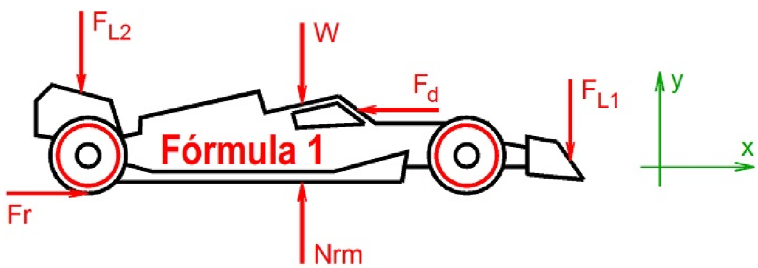
c) la potencia que debería suministrar el motor si el monoplaza estuviera moviéndose en línea recta sobre una superficie horizontal con la rapidez máxima de 340 kph.

Primero, se calculan las rapideces de 100 kph y 340 kph en $\frac{m}{s}$:

$$100\ \frac{\text{km}}{h} \times \frac{1000\, m}{1\,\text{km}} \times \frac{1\, h}{3600\, s} = 27.78\ \frac{m}{s}$$

$$340\ \frac{\text{km}}{h} \times \frac{1000\, m}{1\,\text{km}} \times \frac{1\, h}{3600\, s} = 94.44\ \frac{m}{s}$$

Posteriormente, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del monoplaza F1:



En el diagrama anterior, F_d es la magnitud de la fuerza de resistencia viscosa del aire, F_{L1} y F_{L2} son las magnitudes de las fuerzas aerodinámicas que hacen que el vehículo se "pegue" a la superficie de rodamiento. Pueden llegar a ser del orden de cuatro a cinco veces el peso del monoplaza.
En este caso, estas últimas fuerzas no se consideran para los cálculos solicitados.

a) la magnitud de la fuerza de tracción que suministra el motor del vehículo cuando su rapidez es de 100 kph

Para determinar la magnitud de la fuerza de tracción, Fr, se calcula previamente la aceleración que tiene le vehículo al pasar de 0 a 100 kph.
Dado que la definición de aceleración es:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a\, dt = dv$$

Se integran ambos miembros, considerando que las condiciones iniciales son, para $t_0 = 0$ s, $v_0 = 0\ \frac{m}{s}$:

$$\int_0^t a\, dt = \int_0^v dv$$

$$a\, t\,]_0^t = v\,]_0^v$$

$$a\, t - a\,(0) = v - 0$$

$$a\, t = v$$

Dado que el monoplaza alcanza una rapidez de 27.78 $\frac{m}{s}$ en 2.8 s:

$$a\,(2.8) = 27.78$$
$$a = \frac{27.78}{2.8}$$
$$a = 9.921\ \frac{m}{s^2}$$

La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el vehículo es:

$$\overline{\mathrm{Fr}} = \{\mathrm{Fr}, 0\}$$
$$\overline{F_d} = \{-F_d,\ 0\}$$
$$\overline{F_d} = \left\{-0.68\, v^2,\ 0\right\}$$
$$\overline{N} = \{0, \mathrm{Nrm}\}$$
$$\overline{W} = \{0, -W\}$$
$$\overline{W} = \{0, -750\ (9.81)\}$$
$$\overline{W} = \{0, -7358\}\ \mathrm{N}$$
$$\overline{F_{L1}} = \{0, -F_{L1}\}$$
$$\overline{F_{L2}} = \{0, -F_{L2}\}$$

Ahora, para calcular la magnitud de la fuerza de tracción que suministra el motor cuando su rapidez es de 100 kph, se aplica la segunda ley de Newton.

$$\overline{\mathrm{Fr}} + \overline{F_d} + \overline{N} + \overline{W} + \overline{F_{L1}} + \overline{F_{L2}} = \mathrm{m}\ \overline{a}$$
$$\{\mathrm{Fr}, 0\} + \left\{-0.68\, v^2,\ 0\right\} + \{0, \mathrm{Nrm}\} + \{0, -7358\} + \{0, -F_{L1}\} + \{0, -F_{L2}\} = 750\ \{a, 0\}$$

Al igualar la componente en x de ambos miembros se obtiene:

$$\mathrm{Fr} - 0.68\, v^2 = 750\ a$$

Se sustituyen los valores de la rapidez, v, y la aceleración, a:

$$\mathrm{Fr} = 750\ (9.921) + 0.68\ (27.78)^2$$
$$\mathrm{Fr} = 7440 + 0.68\ (771.6)$$
$$\mathrm{Fr} = 7440 + 524.7$$
$$\mathrm{Fr} = 7965\ \mathrm{N}$$

La magnitud de la fuerza de tracción que suministra el motor del vehículo cuando su rapidez es de 100 kph es:

Fr = 7965 N.

b) la potencia que suministra el motor en ese instante, en hp

Dado que la potencia es el producto escalar de la fuerza suministrada y la velocidad del cuerpo, en este caso dado que ambos vectores son colineales, es igual al producto de sus magnitudes:

$$\mathrm{P} = \overline{\mathrm{Fr}} \cdot \overline{v}$$
$$P_{100} = \{7965, 0\} \cdot \{27.78, 0\}$$
$$P_{100} = (7965)\ (27.78)$$
$$P_{100} = 221\,255\ \mathrm{W}$$

Dado que:

$1\ \text{hp} = 746\ \text{W}$

$P_{100} = 221\,255\ \text{W} \times \frac{1\ \text{hp}}{746\ W}$

$P_{100} = 296.6\ \text{hp}$

La potencia que suministra el motor en ese instante, en hp es:

$P_{100} = 296.6\ \text{hp}.$

c) la potencia que debería suministrar el motor si el monoplaza estuviera moviéndose en línea recta sobre una superficie horizontal con la rapidez máxima de 340 kph

Con base en la expresión de la fuerza de tracción suministrada por el motor obtenida anteriormente:

$\text{Fr} - 0.68\, v^2 = 750\ \text{a}$

Si el vehículo está moviéndose en línea recta sobre una superficie horizontal con la rapidez máxima constante de 340 kph, su aceleración es nula, por lo que la fuerza suministrada por el motor sería igual a la magnitud de la fuerza de resistencia viscosa del aire:

$\text{Fr} = (750)\,(0) + (0.68)\,(94.44)^2$

$\text{Fr} = (0.68)\,(8920)$

$\text{Fr} = 6065\ \text{N}$

En este caso, la potencia que debe suministrar el motor es:

$P_{340} = \text{Fr v}$

$P_{340} = (6065)\,(94.44)$

$P_{340} = 572\,846\ \text{W}$

Que es equivalente a:

$P_{340} = 572\,846\ \text{W} \times \frac{1\ \text{hp}}{746\ W}$

$P_{340} = 767.9\ \text{hp}$

La potencia que debe suministrar el motor para que el monoplaza pueda moverse sobre una superficie horizontal en línea recta a 340 kph es:

$P_{340} = 767.9\ \text{hp}.$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 750;
g = 9.81;
v1kph = 100;
t0 = 0;
v0 = 0;
t1 = 2.8;
v2kph = 340;
Fd = 0.68 v^2;
```

Rapideces, en metros por segundo:

```
v1mps = v1kph 1000/3600
v2mps = v2kph 1000/3600
```

a) la magnitud de la fuerza de tracción que suministra el motor del vehículo cuando su rapidez es de 100 kph

```
ec1 = a == ⅆv/ⅆt
ec2 = ∫_t0^t a ⅆt == ∫_v0^v ⅆv
resp2 = Solve[ec2, a]
a1Sol = a /. resp2[[1]]
a1 = a1Sol /. {v → v1mps, t → t1}
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el vehículo:

```
vFr = {Fr, 0}
vFd = {-Fd, 0}
vN = {0, Nrm}
vW = {0, -m g}
vFL1 = {0, -FL1}
vFL2 = {0, -FL2}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec3 = vFr + vFd + vN + vW + vFL1 + vFL2 == m {a, 0}
resp3 = Solve[ec3, {a, Nrm}]
aSol = a /. resp3[[1]]
ec4 = (aSol /. v → v1mps) == a1
resp4 = Solve[ec4]
Fr1Sol = Fr /. resp4[[1]]
```

b) la potencia que suministra el motor en ese instante, en hp

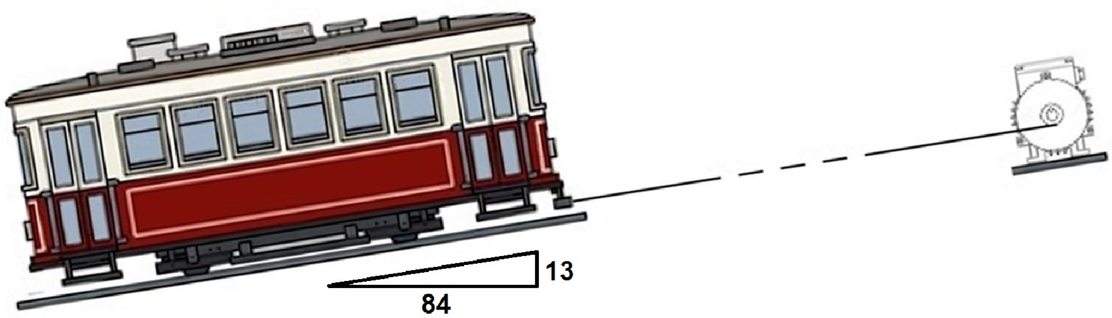
```
P100 = Fr1Sol v1mps
P100hp = P100/746
```

c) la potencia que debería suministrar el motor si el monoplaza estuviera moviéndose en línea recta sobre una superficie horizontal con la rapidez máxima de 340 kph

```
ec5 = (aSol /. v → v2mps) == 0
resp5 = Solve[ec5]
Fr2Sol = Fr /. resp5[[1]]
P340 = Fr2Sol v2mps
P340hp = P340/746
```

Ejercicio 59

Un tranvía, similar al del Ejercicio 7, tiene una masa de 8000 kg. En un lapso de tiempo de 10 s alcanzó una rapidez de 6 $\frac{m}{s}$ hacia arriba, partiendo del reposo, con aceleración constante.



Si se desprecia la fricción de las ruedas y la resistencia del aire, determine:

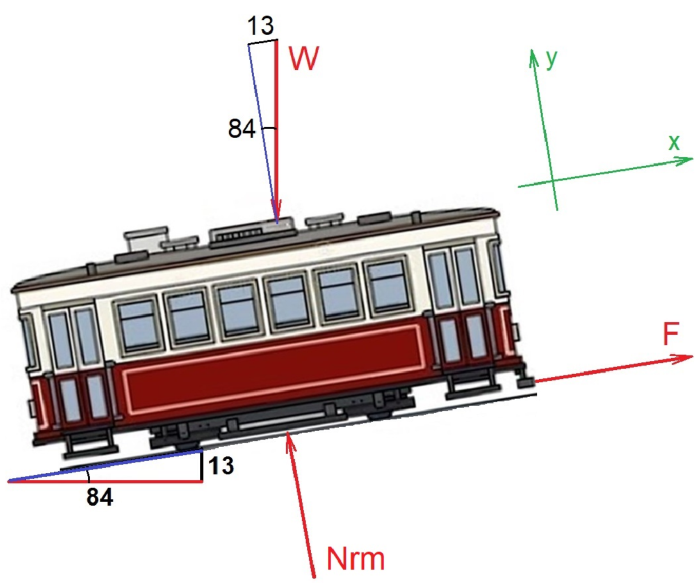
a) la fuerza constante necesaria en el cable para producir el movimiento;

b) la potencia mecánica que produce el motor cuando la rapidez del tranvía es de 6 $\frac{m}{s}$;

c) suponiendo que se sigue aplicando la misma fuerza calculada en a), la potencia eléctrica de debe suministrarse al motor 15 s después de que inició el movimiento, si se sabe que la eficiencia del motor es $\eta = 75\%$.

a) La fuerza constante necesaria en el cable para producir el movimiento

Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del tranvía, cuando ya está en movimiento:



Para el triángulo de la pendiente del vector que representa al peso, se calcula su hipotenusa:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Dado que:

$\Delta x = 13$

$\Delta y = 84$

$\text{hip} = \sqrt{(13)^2 + (84)^2}$

$\text{hip} = \sqrt{169 + 7056}$

$\text{hip} = \sqrt{7225}$

$\text{hip} = 85$

Se representa vectorialmente a las fuerzas que actúan en el tranvía:

$\overline{F} = \{F, 0\}$

$\overline{N} = \{0, \text{Nrm}\}$

$\overline{W} = W\left\{-\frac{13}{85}, -\frac{84}{85}\right\}$

$\overline{W} = 8000\,(9.81)\left\{-\frac{13}{85}, -\frac{84}{85}\right\}$

$\overline{W} = 78\,480\left\{-\frac{13}{85}, -\frac{84}{85}\right\}$

$\overline{W} = \{-12\,003, -77\,557\}$ N

Se plantean las ecuaciones de movimiento con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{F} + \overline{N} + \overline{W} = m\,\overline{a}$

$\{F, 0\} + \{0, \text{Nrm}\} + \{-12\,003, -77\,557\} = 8000\,\{a_x, 0\}$

$\{F - 12\,003, \text{Nrm} - 77\,557\} = \{8000\,a_x, 0\}$

De donde se obtienen dos expresiones escalares:

$F - 12\,003 = 8000\,a_x$

$\text{Nrm} - 77\,557 = 0$

Por tanto:

$F = 8000\,a_x + 12\,003$

$\text{Nrm} = 77\,557$

Entonces, para determinar la magnitud de la fuerza constante F necesaria para producir el movimiento se requiere obtener la aceleración del tranvía.
Esta aceleración puede calcularse a partir de la información de que en un lapso de 10 s alcanzó una rapidez de 6 $\frac{m}{s}$, con aceleración constante.

Dado que:

$a_x = \frac{dv_x}{dt}$

$a_x\,dt = dv_x$

Como parte del reposo, las condiciones iniciales son, para t = 0, $v_{x0} = 0$, entonces:

$\int_0^t a_x\,dt = \int_0^{v_x} dv_x$

$a_x\,t\,]_0^t = v_x\,]_0^{v_x}$

$a_x\,t - a_x(0) = v_x - 0$

$a_x\,t = v_x$

Para que se cumpla que en t = 10 s la rapidez sea de 6 $\frac{m}{s}$:

$a_x\,(10) = 6$

$a_x = \frac{6}{10}$

$a_x = 0.6\ \frac{m}{s^2}$

Por tanto, la magnitud de la fuerza F es:

$F = 8000\,(0.6) + 12\,003$

$F = 4800 + 12\,003$

$F = 16\,803\ N$

La magnitud de la fuerza constante F necesaria para producir el movimiento es:

$F = 16\,803\ N.$

b) La potencia mecánica que produce el motor cuando la rapidez del tranvía es de 6 $\frac{m}{s}$

Dado que la fuerza con la que el cable conectado al motor jala al tranvía es de 16 803 N y la velocidad con la que lo hace es de $v_1 = 6\ \frac{m}{s}$, la potencia mecánica que produce el motor en ese instante es:

$P_{mec,1} = \overline{F} \cdot \overline{v}$

Tanto el vector de la fuerza como el de la velocidad son colineales y hacia delante:

$P_{mec,1} = F\ v$

$P_{mec,1} = (16\,803)\,(6)$

$P_{mec,1} = 100\,817\ W$

La potencia mecánica que produce el motor cuando la rapidez del tranvía es $v_1 = 6\ \frac{m}{s}$ es:

$P_{mec,1} = 100\,817\ W.$

c) Con base en la fuerza calculada, la potencia eléctrica que debe suministrarse al motor 15 s después de que inició el movimiento, si se sabe que la eficiencia del motor es $\eta = 75\%$

Para calcular la potencia eléctrica, primero se requiere determinar la potencia mecánica y, por consiguiente, previamente hay que encontrar la rapidez con la que el motor está jalando la cuerda en t_2 = 15 s después de que inició el movimiento, es decir, la rapidez del propio tranvía.

Dado que la expresión de la rapidez del tranvia es:

$v_x = a_x\ t$

$v_x = 0.6\ t$

Para $t_2 = 15$ s:

$v_{x,2} = 0.6\,(15)$

$v_{x,2} = 9\ \frac{m}{s}$

Por consiguiente:

$P_{\text{mec},2} = \text{F}\ v_{x,2}$

$P_{\text{mec},2} = 16\,803\ (9)$

$P_{\text{mec},2} = 151\,225\ \text{W}$

A partir del resultado anterior, puede obtenerse la potencia eléctrica que debe suministrarse al motor para que produzca la potencia mecánica obtenida:

$\eta = \frac{P_{\text{mec}}}{P_{\text{elec}}}$

$P_{\text{elec}} = \frac{P_{\text{mec}}}{\eta}$

$P_{\text{elec},2} = \frac{151\,225}{0.75}$

$P_{\text{elec},2} = 201\,634\ \text{W}$

La potencia eléctrica que debe suministrarse al motor 15 s después de que inició el movimiento es:

$P_{\text{elec},2} = 201\,634\ \text{W}.$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 8000;
g = 9.81;
v0 = 0;
t1 = 10;
v1 = 6;
Δx = 84;
Δy = 13;
t2 = 15;
η = 0.75;
```

a) La fuerza constante necesaria en el cable para producir el movimiento

Representación vectorial de las fuerzas aplicadas al tranvía:

```
vF = {F, 0}
vN = {0, Nrm}
hip = √(Δx² + Δy²)
vW = m g {-Δy/hip, -Δx/hip}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec1 = vF + vN + vW == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {F, Nrm}]
Fsol = F /. resp1[[1]]
```

Cálculo de la aceleración constante; dado que $a_x = \frac{d v_x}{d t}$, $a_x\, d t = d v_x$:

```
ec2 = ∫_0^t ax ⅆt == ∫_v0^vx ⅆvx
resp2 = Solve[ec2, vx]
vxSol = vx /. resp2[[1]]
ec3 = v1 == vxSol /. t → t1
resp3 = Solve[ec3]
axCte = ax /. resp3[[1]]
```

Cálculo de la fuerza con la que jala la cuerda:

```
Fcte = Fsol /. ax → axCte
```

b) La potencia mecánica que produce el motor cuando la rapidez del tranvía es de 6 $\frac{m}{s}$

```
Pmec1 = Fcte v1
```

c) Con base en la fuerza calculada, la potencia eléctrica de debe suministrarse al motor 15 s después de que inició el movimiento, si se sabe que la eficiencia del motor es η = 75%

```
vx2 = vxSol /. {ax → axCte, t → t2}
Pmec2 = Fcte vx2
ec5 = η == Pmec/Pelec
resp5 = Solve[ec5, Pelec]
PelecSol = Pelec /. resp5[[1]]
Pelec2 = PelecSol /. Pmec → Pmec2
```

Ejercicio 60

Se tiene un sistema de cuerdas y poleas para manipulación de cargas pesadas, que es operado con un motor de corriente directa, tal como se muestra en la figura.

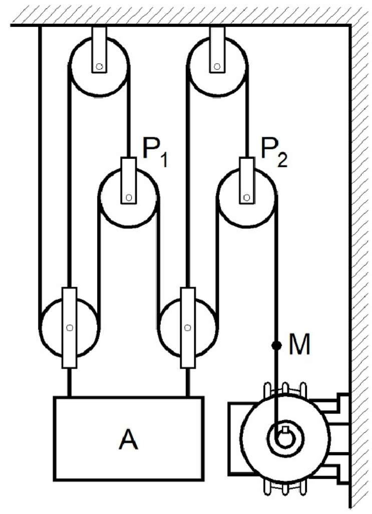


Figura 1 Sistema de cuerdas y poleas para manipulación de cargas pesadas.

En un momento dado, la carga A de 500 kg está bajando con una rapidez de 2 $\frac{m}{s}$ y una aceleración hacia arriba de 0.5 $\frac{m}{s^2}$.

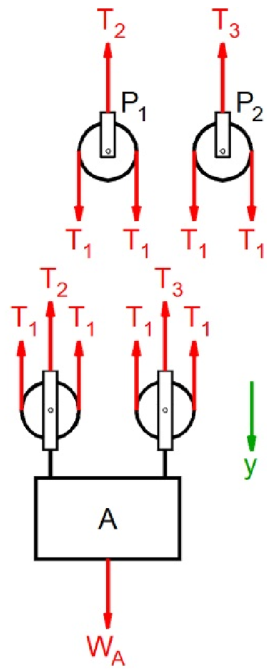
Determine:

a) la potencia mecánica de la cuerda conectada al motor en el punto M; y

b) la potencia eléctrica suministrada a dicho motor si su eficiencia es de 70%.

a) la potencia mecánica de la cuerda conectada al motor en el punto M

Lo primero que conviene hacer es dibujar el diagrama de cuerpo libre del cuerpo A, así como de las poleas móviles:



Al aplicar la segunda ley de Newton para el cuerpo A, considerando que las poleas sujetas a él son parte de sí mismo, la expresión de moviemiento queda:

$$W_A - 4\,T_1 - T_2 - T_3 = m_A\,a_A$$

Para la polea P_1, la expresión de movimiento queda:

$$2\,T_1 - T_2 = 0$$

$$T_2 = 2\,T_1$$

Para la polea P_2, la expresión de movimiento queda:

$$2\,T_1 - T_3 = 0$$

$$T_3 = 2\,T_1$$

Al sustituir los últimos dos resultados en la ecuación de movimiento del cuerpo A:

$$W_A - 4\,T_1 - 2\,T_1 - 2\,T_1 = m_A\,a_A$$

$$W_A - 8\,T_1 = m_A\,a_A$$

Dado que se conoce la aceleración del bloque A que es:

$$a_A = -0.5\,\frac{m}{s^2}$$

$$500\,(9.81) - 8\,T_1 = 500\,(-0.5)$$

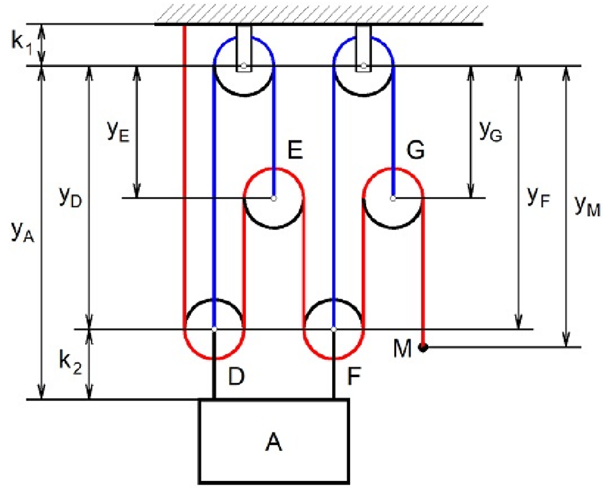
$$4905 - 8\,T_1 = -250$$

$$8\,T_1 = 4905 + 250$$

$$T_1 = \frac{5155}{8}$$

$$T_1 = 644.4\text{ N}$$

Se obtiene la relación cinemática de la rapidez del bloque A respecto a la rapidez del punto M del cable:



Para obtener la relación cinemática de la rapidez del bloque A respecto a la rapidez con la que se mueve el punto M del cable, es necesario determinar la longitud de las cuerdas respecto a la posición de los cuerpos móviles, en este caso el bloque A y las poleas D, E, F y G.

Para la primera cuerda, que está con color rojo:

$$L_1 = k_1 + y_D + C_1 + (y_D - y_E) + C_2 + (y_F - y_E) + C_3 + (y_F - y_G) + C_4 +(y_M - y_G)$$

La segunda cuerda tiene la siguiente longitud:

$$L_2 = y_D + C_5 + y_E$$

Finalmente, para la tercera cuerda:

$$L_3 = y_F + C_6 + y_G$$

Posteriormente, se obtienen las derivadas de las longitudes de las cuerdas con respecto al tiempo:

$$0 = 0 + v_D + 0 + v_D - v_E + 0 + v_F - v_E + 0 + v_F - v_G + 0 + v_M - v_G$$

$$0 = v_D + 0 + v_E$$

$$0 = v_F + 0 + v_G$$

Dado que se va a considerar que

$$y_D = y_F$$

$$y_G = y_E$$

La primera expresión se convierte en:

$$0 = v_D + v_D - v_E + v_D - v_E + v_D - v_E + v_M - v_E$$

$$0 = 4\, v_D - 4\, v_E + v_M$$

$$0 = v_D + v_E$$

$$0 = v_D + v_E$$

$$v_E = -\, v_D$$

$$0 = 4\, v_D + 4\, v_D + v_M$$

$$v_M = -8\, v_D$$

Por otra parte, se puede verificar que:

$$y_A = y_D + k_2$$

$$v_A = v_D$$

$$v_M = -8\, v_A$$

Dado que la carga A en el instante considerado está bajando con una rapidez $v_A = 2\ \frac{m}{s}$, positivo, ya que la referencia es positiva hacia abajo:

$v_A = 2$

Entonces:

$v_M = -8\ (2)$

$v_M = -16\ \frac{m}{s}$

Es decir, la velocidad con la que se mueve el cable conectado al motor es de $v_M = -16\ \frac{m}{s}$, lo cual implica que la cuerda se mueve hacia arriba, en otras palabras, el eje del motor está siendo jalado por el cable con la velocidad obtenida.

En el instante considerado, dado que la fuerza con que la cuerda está actuando en el punto M es $T_1 = 644.4$ N hacia arriba, y la rapidez del punto que está soltando el motor es $v_M = -16\ \frac{m}{s}$, el signo menos indica que el sentido de la velocidad es hacia arriba, la potencia mecánica que se aplica al eje del motor en ese instante es:

$P = \overline{T_1} \cdot \overline{v_M}$

$P = \{0, -644.4\} \cdot \{0, -16\}$

$P = (-644.4)\ (-16)$

$P = 10\,310$ W

La potencia mecáncia que se aplica a la flecha del motor es:

$P = 10\,310$ W

b) la potencia eléctrica suministrada a dicho motor si su eficiencia es de 70%

Se define como eficiencia al cociente de la potencia de salida divido por la potencia de entrada.
En este caso, dado que la carga A está jalando la cuerda, la cuerda hace que el motor gire, por tanto el motor está trabajando en realidad como generador.
Por esta razón, la eficiencia es, para este problema:

$\eta = \frac{P_{\text{elec}}}{P_{\text{mec}}}$

$0.7 = \frac{P_{\text{elec}}}{10 \times 310}$

$p_{\text{elec}} = (0.7)\ (10\,310)$

$P_{\text{elec}} = 7217$ W

La potencia eléctrica generada por el motor, que trabaja como generador, es de:

$P_{\text{elec}} = 7217$ W

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mA = 500;
mP1 = 0;
mP2 = 0;
g = 9.81;
vAsol = 2;
aA = -0.5;
η = 0.7;
```

a) la potencia mecánica de la cuerda conectada al motor en el punto M

Aplicación de la segunda ley de Newton al bloque A y a las poleas móviles P_1 y P_2:

```
ec1 = mA g - 4 T1 - T2 - T3 == mA aA
ec2 = 2 T1 - T2 == mP1 aP1
ec3 = 2 T1 - T3 == mP2 aP2
resp1 = Solve[{ec1, ec2, ec3}]
T1sol = T1 /. resp1⟦1⟧
```

Longitudes de las cuerdas

```
ec4 = L1 == k1 + yD + C1 + (yD - yE) + C2 + (yF - yE) + C3 + (yF - yG) + C4 + (yM - yG)
ec5 = L2 == yD + C5 + yE
ec6 = L3 == yF + C6 + yG
```

Relación cinemática

```
ec7 = 0 == 0 + vD + 0 + (vD - vE) + 0 + (vF - vE) + 0 + (vF - vG) + 0 + (vM - vG)
ec8 = 0 == vD + 0 + vE
ec9 = 0 == vF + 0 + vG
ec10 = vD == vF
ec11 = vE == vG
resp11 = Solve[{ec7, ec8, ec10, ec11}, {vE, vF, vG, vM}]
vMsol = vM /. resp11⟦1⟧
```

Cálculo rapidez del punto M

```
ec12 = yA == yD + k2
vD = vA
vMsol /. vA → vAsol
```

Cálculo potencia mecánica

```
T1 = {0, -T1sol}
vvM = {0, vMsol /. vA → vAsol}
Pmec = T1.vvM
```

b) la potencia eléctrica suministrada a dicho motor si su eficiencia es de 70%

```
ec13 = η == Pelec/Pmec
resp13 = Solve[ec13]
PelecSol = Pelec /. resp13[[1]]
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Academia de Dinámica
Febrero de 2023

Yukihiro Minami Koyama