FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 1:

Conceptos básicos y fundamentos de la mecánica newtoniana

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

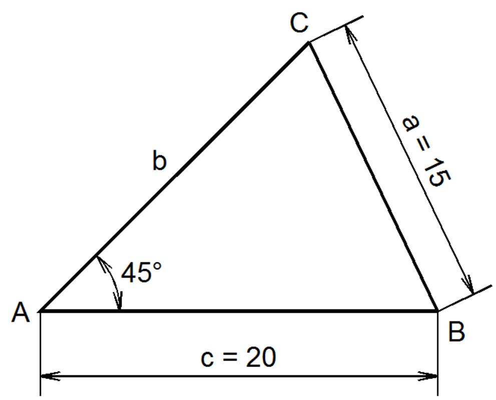
M.I Yukihiro Minami Koyama

Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

Tema 1
Conceptos básicos y fundamentos de la mecánica newtoniana

Ejercicio 1.1

Dos de los lados de un triángulo tienen 20 y 15 unidades de longitud, y en el vértice izquierdo los lados forman un ángulo de 45º. Determine la longitud del otro lado así como el valor de los ángulos restantes.



Expresiones de la ley del seno o teorema del seno

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

Nota: En lugar de emplear letras mayúsculas para designar los ángulos, también pueden emplearse las letras griegas minúsculas "correspondientes" a las letras latinas, es decir, en lugar de sin (A) se puede escribir sin (α).

Expresiones de la ley del coseno o teorema del coseno

$a^2 = b^2 + c^2$ - 2 b c cos (A)

$b^2 = a^2 + c^2$ - 2 a c cos (β)

$c^2 = a^2 + b^2$ - 2 a b cos (C)

Dado que para este caso, los datos son:

A = 45º

a = 15

c = 20

Se aplica la expresión de la ley del seno que relaciona los ángulos C, A, y sus lados correspondientes:

$$\frac{\sin(C)}{c} = \frac{\sin(A)}{a}$$

$$\frac{\sin(C)}{20} = \frac{\sin(45°)}{15}$$

$$\sin(C) = \frac{20 \sin(45°)}{15}$$

$$\sin(C) = \frac{20\ \sqrt{2}}{15\,(2)}$$

sin (C) = 0.9428

C = arc sin (0.9428)

C = 70.53º

Existe otra solución geométricamente válida, ya que el seno de ángulos en el intervalo 90° < C < 180° también tienen un valor positivo:

C = arc sin (0.9428)

C = 180° - 70.53°

C = 109.47°

Para obtener los subsiguientes resultados, solo se considerará el primer valor de C.

Teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a un ángulo llano (180º)

A + B + C = 180º

B = 180º - A - C

B = 180º - 45º - 70.53º

B = 64.47º

Finalmente, la longitud del lado b se puede obtener aplicando nuevamente la ley del seno:

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{a}{\sin(A)}$$

$$b = \frac{a \sin(B)}{\sin(A)}$$

$$b = \frac{15 \sin(64.47°)}{\sin(45°)}$$

$$b = \frac{15\,(0.9024)}{0.7071}$$

b = 19.14

La longitud del lado b y los valores de los ángulos B y C son:
b = 19.14 unidades, B = 64.47º y C = 70.53º.

Aplicación del teorema del coseno para obtener el resultado del lado b

Con base en los mismos datos de este problema:

A = 45º

a = 15

c = 20

es posible aplicar el teorema del coseno para obtener la longitud de b:

$a^2 = b^2 + c^2$ - 2 b c cos (A)

Sustituyendo los valores conocidos:

$15^2 = b^2 + 20^2 - 2\ b\ (20)\cos(45°)$

$225 = b^2 + 400 - 40\ (0.7071)\ b$

$b^2 - 28.28\ b + 400 - 225 = 0$

$b^2 - 28.28\ b + 175 = 0$

Se aplica la fórmula simplificada del “chicharronero”:

$b_{1,2} = \frac{28.28}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{28.28}{2}\right)^2 - 175}$

$b_{1,2} = 14.14 \pm \sqrt{14.14^2 - 175}$

$b_{1,2} = 14.14 \pm \sqrt{200 - 175}$

$b_{1,2} = 14.14 \pm \sqrt{25}$

$b_{1,2} = 14.14 \pm 5$

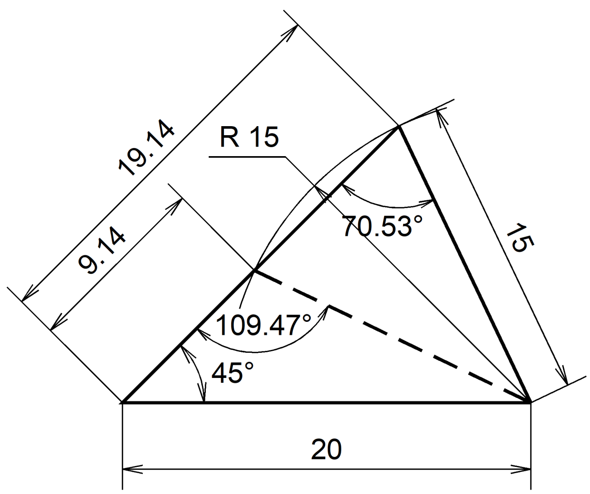
$b_1 = 14.14 + 5$

$b_1 = 19.14$

$b_2 = 14.14 - 5$

$b_2 = 9.14$

Como puede observarse, existen dos valores posibles para la longitud del lado b. En la siguiente figura se ilustran ambos casos.



Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
A = 45 °;
a = 15;
c = 20;
```

Se aplica el teorema del seno:

```
ec1 = Sin[CC]/c == Sin[A]/a
```

Para resolver ecuaciones con funciones trigonométricas, conviene emplear la función FindRoot, que es un método numérico para resolver ecuaciones. Requiere como segundo parámetro del nombre de la variable a resolver y su valor inicial.

```
resp1 = FindRoot[ec1, {CC, 0}]
        encuentra raíz
CCSol = CC /. resp1
```

Para obtener el ángulo en grados sexagesimales, se divide el ángulo en radianes entre °, que es la constante de conversión de grados a radianes.

```
CCSolDeg = CCSol/°
```

Se aplica el teorema que dice que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a la medida de un ángulo llano, es decir, igual a π radianes, o a 180°. En este caso, todos los ángulos están en radianes:

```
ec2 = A + B + CCSol == π
resp2 = Solve[ec2]
        resuelve
BSol = B /. resp2[[1]]
BSolDeg = BSol/°
```

Se aplica nuevamente el teorema del seno:

```
ec3 = b/Sin[BSol] == a/Sin[A]
resp3 = Solve[ec3]
        resuelve
bSol = b /. resp3[[1]]
```

Comprobación de la tercera forma del teorema del seno:

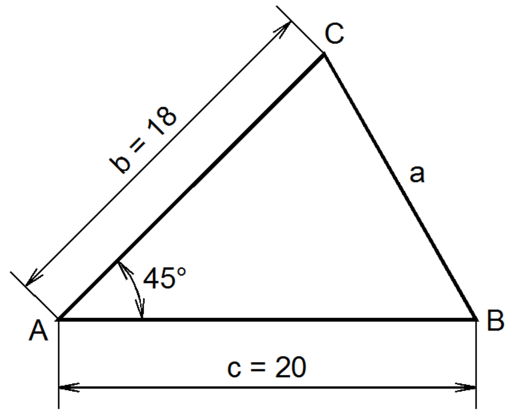
```
ec4 = Sin[A]/a == Sin[BSol]/bSol
```

Aplicación del teorema del coseno para obtener el resultado del lado b

```
ec5 = a^2 == b^2 + c^2 - 2 b c Cos[A]
                                coseno
resp5 = Solve[ec5]
        resuelve
b1Sol = b /. resp5[[2]] // N
                           valor n
b2Sol = b /. resp5[[1]] // N
                           valor n
```

Ejercicio 1.2

Dos de los lados de un triángulo tienen 20 y 18 unidades de longitud, y entre ellos forman un ángulo de 45°. Determine la longitud del otro lado así como el valor de los ángulos restantes.



En este caso no es posible aplicar la ley del seno, por lo que se requiere aplicar la ley del coseno, en este caso para determinar la longitud del lado a:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ b\ c \cos(A)$

b = 18

c = 20

A = 45°

$a^2 = 18^2 + 20^2 - 2\ (18)\ (20) \cos(45°)$

$a^2 = 324 + 400 - 720\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a^2 = 724 - 509.1169$

$a^2 = 214.8831$

$a = \sqrt{214.8831}$

a = 14.6589

Ahora, para calcular alguno de los dos ángulos desconocidos, conviene aplicar la ley de seno por ser más sencillo que la aplicación de la ley del coseno. Se calcula primero el ángulo C:

$\frac{\sin(C)}{c} = \frac{\sin(A)}{a}$

$\frac{\sin(C)}{20} = \frac{\sin(45°)}{14.6589}$

$\sin(C) = \frac{20 \sin(45°)}{14.6589}$

$\sin(C) = \frac{14.1421}{14.6589}$

sin (C) = 0.96475

C = arc sin (0.96475)

C = 74.74°

Finalmente, para determinar el ángulo B faltante, lo más sencillo es aplicar el teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo:

$A + B + C = 180^o$

$B = 180^o - A - C$

$B = 180^o - 45^o - 74.74^o$

$B = 60.26^o$

La longitud del lado a y los valores de los ángulos B y C son:
$a = 14.6589$ unidades, $B = 60.26^o$ y $C = 74.74^o$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
A = 45 °;
b = 18;
c = 20;
```

Aplicación del teorema del coseno:

```
ec1 = a^2 == b^2 + c^2 - 2 b c Cos[A]
                                coseno
resp1 = Solve[ec1] // N
        resuelve        valor num
aSol = a /. resp1[[2]]
```

Aplicación del teorema del seno:

```
ec2 = Sin[B]/b == Sin[A]/aSol
resp2 = FindRoot[ec2, {B, 1}]
        encuentra raíz
BSol = B /. resp2
BSolDeg = BSol/°
```

Aplicación del teorema de la suma de los ángulos interiores de todo triángulo; ángulos en radianes:

```
ec3 = A + BSol + CC == π
resp3 = Solve[ec3] // N
        resuelve        va
CSol = CC /. resp3[[1]]
CSolDeg = CSol/°
```

Ejercicio 1.3

Dos fuerzas P y Q se aplican en el punto A del gancho que se muestra en la figura. Si P = 15 lb y Q = 25 lb, determine la magnitud y la dirección de su resultante.

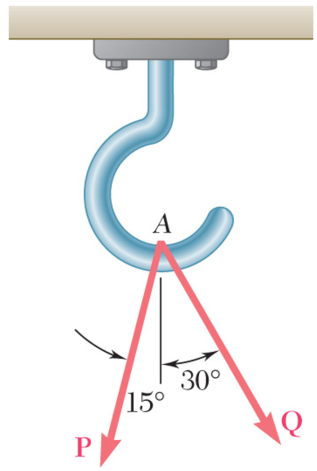
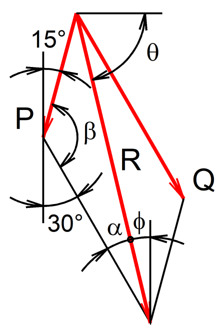


Figura tomada del Problema 2.1 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8a edición, McGraw-Hill, p. 25.

Resolución gráfica, con base en el principio del paralelogramo:



Primero, se aplica el teorema que verifica que los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales, por lo que el ángulo que forma el segmento dirigido que representa a la fuerza P con una vertical en el punto P es igual a 15°.
Luego, con base en el axioma de que la medida del todo es igual a la suma de la medida de sus partes, el ángulo formado en el vértice P por la recta vertical es igual a 180°:

$15° + \beta + 30° = 180°$

$\beta = 180° - 15° - 30°$

$\beta = 135°$

Ahora, para obtener la magnitud de la resultante, se puede aplicar el teorema del coseno; se establece que una letra mayúscula sin barra representa la magnitud del vector correspondiente:

$R^2 = P^2 + Q^2 - 2\,P\,Q\cos(\beta)$

$R^2 = 15^2 + 25^2 - 2\,(15)\,(25)\cos(135°)$

$R^2 = 225 + 625 - 750\,(-0.7071)$

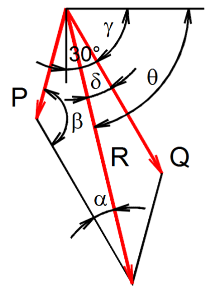
$R^2 = 850 + 530.3$

$R^2 = 1380.3$

$R = \sqrt{1380.3}$

$R = 37.15$ lb

La dirección de la resultante está dada por el ángulo θ, y para su cálculo se requiere obtener primero α:



Con base en el teorema del seno:

$$\frac{\sin(\alpha)}{P} = \frac{\sin(\beta)}{R}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{P \sin(\beta)}{R}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{15 \sin(135^\circ)}{37.15}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{15\,(0.7071)}{37.15}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{10.61}{37.15}$$

$$\sin(\alpha) = 0.2855$$

$$\alpha = \text{arc sin}\,(0.2855)$$

$$\alpha = 16.59^\circ$$

Por ser este ángulo α igual al ángulo δ por el teorema de la igualdad de ángulos anternos internos entre paralelas, se puede determinar el ángulo θ como la suma de los ángulos $\gamma + \delta$.

Dado que el ángulo que forma el segmento dirigido que representa a la fuerza Q con la vertical es de 30°, entonces:

$$\gamma + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\gamma = 60^\circ$$

Finalmente, el ángulo θ es:

$$\theta = \gamma + \delta$$

donde

$$\delta = \alpha$$

$$\delta = 16.59^\circ$$

Entonces:

$$\theta = 60^\circ + 16.59^\circ$$

$$\theta = 76.59^\circ$$

La magnitud de la fuerza resultante de P y Q es R = 37.15 lb y su dirección es 76.59° con respecto a la horizontal hacia abajo y a la derecha.

Esto se representa en varios textos de la asignatura como:

$$\overline{R} = 37.15\ \text{lb}\ \triangledown\ 76.59^\circ$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magP = 15;
magQ = 25;
θP = 15 °;
θQ = 30 °;
```

La suma de los ángulos formados en el vértice P por las rectas verticales es igual a la medida de un ángulo llano (180°):

```
ec1 = θP + β + θQ == 180 °
resp1 = Solve[ec1]
        resuelve
βSol = β /. resp1[[1]]
```

Aplicación del teorema del coseno para la obtención de la magnitud de la fuerza resultante, magR:

```
ec2 = magR^2 == magP^2 + magQ^2 - 2 magP magQ Cos[βSol]
                                              coseno
resp2 = Solve[ec2] // N
        resuelve     valor numérico
magRSol = magR /. resp2[[2]]
```

Aplicación del teorema del seno para la obtención del ángulo α:

```
ec3 = Sin[α]/magP == Sin[βSol]/magRSol
resp3 = FindRoot[ec3, {α, 0}]
        encuentra raíz
```

```
αSol = α /. resp3
αSolDeg = αSol/°
```

Con base en el teorema de ángulos alternos internos entre paralelas:

```
ec4 = αSol + ϕ == 30 °
resp4 = Solve[ec4]
        resuelve
ϕSol = ϕ /. resp4[[1]]
```

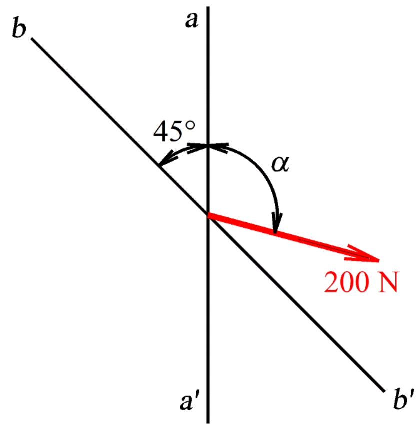
Con el empleo del concepto de ángulos complementarios:

```
ec5 = δ + ϕSol == 90 °
resp5 = Solve[ec5]
        resuelve
δSol = δ /. resp5⟦1⟧
δSolDeg = δSol / °
```

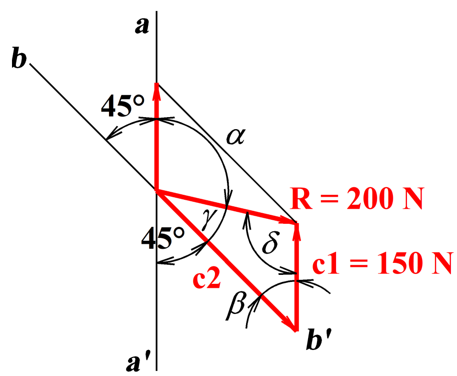
Ejercicio 1.4

Problema 2.5 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8a edición, McGraw-Hill, p. 25

La fuerza de 200 N se descompone en componentes a lo largo de las líneas a-a' y b-b'. a) Determine por trigonometría el ángulo α sabiendo que la componente a lo largo de a-a' es de 150 N. b) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de b-b'?



Primero, se traza un diagrama en el que se visualicen las componentes de la fuerza de 200 N.



Con base en el teorema de ángulo entre paralelas, se puede verificar que:

$\beta = 45°$

Con base en el teorema del seno, se puede obtener γ:

$$\frac{\sin(\gamma)}{150} = \frac{\sin(45°)}{200}$$

$$\sin(\gamma) = \frac{150 \sin(45°)}{200}$$

$$\sin(\gamma) = \frac{150\,(0.7071)}{200}$$

$$\sin(\gamma) = \frac{106.1}{200}$$

$$\sin(\gamma) = 0.5303$$

$$\gamma = \text{arc sin}\,(0.5303)$$

$$\gamma = 32.03°$$

Con base en el axioma de la medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes:

$\gamma + \alpha + 45^{o} = 180^{o}$

$\alpha = 180^{o} - 32.03^{o} - 45^{o}$

$\alpha = 102.97^{o}$

Con base en el teorema de la suma de ángulos interiores de todo triángulo es 180º:

$\beta + \delta + \gamma = 180^{o}$

$\delta = 180^{o} - 45^{o} - 32.03^{o}$

$\delta = 102.97^{o}$

Por último, se aplica el teorema del seno para obtener la magnitud c2:

$$\frac{c2}{\sin(\delta)} = \frac{200}{\sin(45^{o})}$$

$$c2 = \frac{200 \sin(102.97^{o})}{\sin(45^{o})}$$

$$c2 = \frac{200\,(0.9746)}{0.7071}$$

$$c2 = \frac{194.8975}{0.707107}$$

$c2 = 275.63$ N

El ángulo α para el cual la componente de la fuerza de 200 N a lo largo de a-a' sea de 150 N es:

$\alpha = 102.97^{o}$

El valor correspondiente de la componente a lo largo de b-b' es:

$c2 = 275.63$ N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
β = 45 °;
R = 200;
c1 = 150;
```

Con base en le teorema del seno:

```
ec1 = Sin[γ]/c1 == Sin[β]/R
resp1 = FindRoot[ec1, {γ, 0}]
        encuentra raíz
γSol = γ /. resp1
γSolDeg = γSol/°
```

Aplicando el axioma de la medida del todo es igual a la suma de las medidas de sus partes:

```
ec2 = α + γSol + β == π
resp2 = Solve[ec2]
        resuelve
αSol = α /. resp2[[1]]
αSolDeg = αSol/°
```

Nuevamente se aplica el teorema del seno:

```
ec3 = c2/Sin[αSol] == 200/Sin[β]
resp3 = Solve[ec3]
        resuelve
c2Sol = c2 /. resp3[[1]]
```

Ejercicio 1.5

Problema 1

Calcule el valor de la aceleración del campo gravitatorio de la Tierra en su superficie, si se sabe que su masa es $m_T = 5.974 \times 10^{24}$ kg y su radio $r_T = 6371$ km. La constante de gravitación universal tiene un valor $G = 66.73 \times 10^{-12}\ \frac{m^3}{\mathrm{kg} \cdot s^2}$.

El modelo matemático de la ley de la gravitación universal es:

$$F = G\ \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

luego de sustituir los valores conocidos:

$$F = 66.73 \times 10^{-12}\ \frac{5.974 \times 10^{24}\ m}{\left(6371 \times 10^3\right)^2}$$

Y la expresión para el cálculo del peso de un cuerpo con base en su masa es:

$$W = m\ g$$

Dado que la fuerza gravitatoria es equivalente al peso del cuerpo:

$$W = F$$

$$m\ g = 66.73 \times 10^{-12}\ \frac{5.974 \times 10^{24}\ m}{\left(6371 \times 10^3\right)^2}$$

Se multiplica por $\frac{1}{m}$ ambos miembros:

$$g = 66.73 \times 10^{-12}\ \frac{5.974 \times 10^{24}}{\left(6371 \times 10^3\right)^2} \left[\frac{m^3}{\mathrm{kg} \cdot s^2}\right] \frac{[\mathrm{kg}]}{[m^2]}$$

$$g = 9.821\ \frac{m}{s^2}$$

El valor de la aceleración del campo gravitatorio terrestre en su superficie es:

$$g = 9.821\ \frac{m}{s^2}.$$

Se define como la aceleración del campo gravitatorio terrestre estándar al que tiene un punto sobre el nivel del mar ubicado en la latitud 45° N.

$$g = 9.8069\ \frac{m}{s^2}$$

Nosotros consideraremos para la resolución de problemas en el curso:

$$g = 9.81\ \frac{m}{s^2}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mT = 5.974 × 10^24;
rT = 6.371 × 10^6;
G = 66.73 × 10^-12;
```

Con base en la ley de la gravitación universal:

```
ec1 = W == G (mT m) / rT^2
ec2 = W == m g
resp1 = Solve[{ec1, ec2}, {W, g}]
        resuelve
gSol = g /. resp1[[1]]
```

Problema 2

Determine el radio de Júpiter si se sabe que su masa es $m_J = 2.013 \times 10^{27}$ kg y la magnitud de la aceleración gravitacional sobre su superficie es 2.69 veces la que existe en la superficie de la Tierra.

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F = 66.73 \times 10^{-12}\,\frac{2.013 \times 10^{27}\,m}{{r_J}^2}$$

$$W_J = m\,g_J$$

$$W_J = m\,2.69\,g$$

$$W_J = F$$

$$2.69\,(9.81)\,m = 66.73 \times 10^{-12}\,\frac{2.013 \times 10^{27}\,m}{{r_J}^2}$$

Se multiplica por ${r_J}^2$ los dos miembros:

$$26.39\,m\,{r_J}^2 = 134.3 \times 10^{15}\,m$$

Se multiplica por $\frac{1}{m}$ ambos miembros:

$$26.39\,{r_J}^2 = 134.3 \times 10^{15}$$

$${r_J}^2 = \frac{134.3 \times 10^{15}}{26.39}$$

$${r_J}^2 = 5.090 \times 10^{15}$$

Se obtiene la raíz cuadrada de ambos miembros (es la función inversa de elevar al cuadrado):

$$\sqrt{{r_J}^2} = \sqrt{5.090 \times 10^{15}}$$

$$r_J = \sqrt{5.090 \times 10 \times 10^{15} \times 10^{-1}}$$

$$r_J = \sqrt{50.90 \times 10^{14}}$$

$$r_J = \sqrt{50.90} \times \sqrt{10^{14}}$$

$$r_J = 7.1344 \times 10^{7}\ \mathrm{m}$$

Para convertir el resultado a km:

$$1000\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{km}$$

$$1 = 1\,\frac{\mathrm{km}}{1000\,m}$$

$$r_J = 7.1344 \times 10^{7}\ \mathrm{m} \times \frac{\mathrm{km}}{1000\,m}$$

$$r_J = 7.1344 \times 10^{4}\ \mathrm{km}$$

$$r_J = 71.344 \times 10^{3}\ \mathrm{km}$$

El radio de Júpiter es de

$r_J = 71{,}344$ km.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
gT = 9.821349;
G = 66.73 × 10^-12;
mJ = 2.013 × 10^27;
gJ = 2.69 gT
```

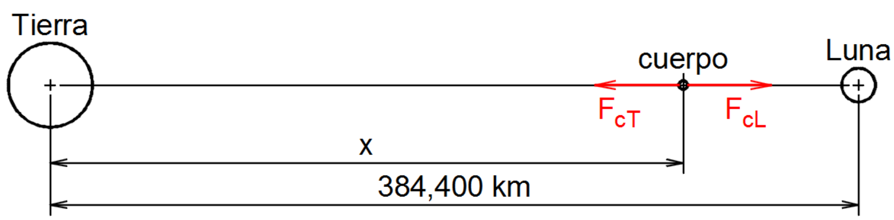
Se aplica la ley de la gravitación universal:

```
ec3 = WJ == m gJ
ec4 = WJ == (G mJ m)/rJ^2
resp2 = Solve[{ec3, ec4}, {WJ, rJ}]
        resuelve
rJSol = rJ /. resp2[[2]]
```

Problema 3

Si únicamente existiera la Tierra y la Luna y se coloca un cuerpo entre ambos astros sobre la recta que une sus centros, determine a qué distancia de la Tierra permanecerá en equilibrio.

Considere que la distancia entre la Tierra y la Luna es d = 384.4×10^3 km y la masa de la Luna es $m_L = 73.49 \times 10^{21}$ kg.



Para que el cuerpo esté en equilibrio:

$$F_{cT} = F_{cL}$$

Se calculan las fuerzas involucradas:

$$F_{cT} = G\,\frac{m_T\,m}{r_{cT}^{\,2}}$$

$$F_{cT} = 66.73 \times 10^{-12}\,\frac{5.974\times10^{24}\,m}{x^2}$$

$$F_{cL} = G\,\frac{m_L\,m}{r_{cL}^{\,2}}$$

$$F_{cL} = 66.73 \times 10^{-12}\,\frac{73.49\times10^{21}\,m}{\left(384.4 \times 10^6 - x\right)^2}$$

Se establece la expresión de equilibrio, y se resuelve para la incógnita x:

$$66.73 \times 10^{-12}\,\frac{5.974\times10^{24}\,m}{x^2} = 66.73 \times 10^{-12}\,\frac{73.49\times10^{21}\,m}{\left(384.4 \times 10^6 - x\right)^2}$$

$$\frac{5.974\times10^{24}}{x^2} = \frac{73.49\times10^{21}}{\left(384.4 \times 10^6 - x\right)^2}$$

$$5.974\times10^{24}\left(384.4 \times 10^6 - x\right)^2 = 73.49\times10^{21}\,x^2$$

$$5.974\times10^{24}\,(147763 \times 10^{12} - 768.8 \times 10^6\,\mathrm{x} + x^2) = 73.49\times10^{21}\,x^2$$

$$882.74 \times 10^{39} - 4.5928 \times 10^{33}\,\mathrm{x} + 5.974\times10^{24}\,x^2 = 73.49\times10^{21}\,x^2$$

$$5900.51 \times 10^{21}\,x^2 - 4.5928 \times 10^{33}\,\mathrm{x} + 882.74 \times 10^{39} = 0$$

Se normaliza la ecuación, es decir, se divide toda la ecuación por el coeficiente del término cuadrático, con objeto de simplificar su resolución:

$$\frac{5900.51\times10^{21}}{5900.51\times10^{21}} \times x^2 - \frac{4.5928\times10^{33}}{5900.51\times10^{21}}\,\mathrm{x} + \frac{882.74\times10^{39}}{5900.51\times10^{21}} = 0$$

$$x^2 - 778.37 \times 10^6\,\mathrm{x} + 149.6 \times 10^{15} = 0$$

Con base en la "fórmula del chicharronero" simplificada:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x_{1,2} = -\frac{\left(-778.37\times10^6\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-778.37\times10^6}{2}\right)^2 - 149.6\times10^{15}}$$

$$x_{1,2} = 389.19 \times 10^6 \pm \sqrt{151.466 \times 10^{15} - 149.6\times10^{15}}$$

$$x_{1,2} = 389.19 \times 10^6 \pm \sqrt{1.8623 \times 10^{15}}$$

$$x_{1,2} = 389.19 \times 10^6 \pm 43.151 \times 10^6$$

$x_1 = 389.19 \times 10^6 + 43.151 \times 10^6$

$x_1 = 432.341 \times 10^6$ m

$x_2 = 389.19 \times 10^6 - 43.151 \times 10^6$

$x_2 = 346.033 \times 10^6$ m

Dado que el resultado x_1 implica que el cuerpo se encuentra más allá de la Luna con respecto a la Tierra, entonces, las dos fuerzas tendrían la misma dirección y, por tanto, no estarían en equilibrio. Por consiguiente, el resultado es que para que un cuerpo colocado sobre la recta que une los centros de la Tierra y la Luna esté en equilibrio, la distancia al que debe estar con respecto a la Tierra es de x_1 = 346,033 km.

Para que un cuerpo colocado sobre la recta que une los centros de la Tierra y la Luna esté en equilibrio, la distancia al que debe estar con respecto a la Tierra es:

x_1 = 346,033 km.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
mT = 5.974 × 10^24;
mL = 73.49 × 10^21;
G = 66.73 × 10^-12;
dTL = 384.4 × 10^6
```

Aplicación de la ley de la gravitación universal:

```
ec5 = FT == (G mT mC)/x^2
ec6 = FL == (G mL mC)/(dTL - x)^2
ec7 = FT == FL
resp3 = Solve[{ec5, ec6, ec7}, {FT, FL, x}]
        resuelve
xSol = x /. resp3[[1]]
```

Problema 4

Obtenga la magnitud de la constante de gravitación universal para el sistema de unidades inglés.

Para resolver este problema, se requiere conocer las equivalencias de las unidades de longitud, masa y fuerza de los sistemas internacional e inglés.

En cuanto a la longitud:

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$$

Con respecto a la masa:

$$1 \text{ slug} = 14.5939 \text{ kg}$$

Referente a la fuerza:

$$1 \text{ lb} = 4.4482 \text{ N}$$

Dado que el valor de la constante de la gravitación universal para el SI es:

$$G = 66.73 \times 10^{-12} \frac{m^3}{\text{kg}\cdot s^2}$$

Se multiplica dicha expresión por las proporciones existentes entre cada una de las unidades involucradas, considerando el exponente de la longitud:

$$G = 66.73 \times 10^{-12} \frac{m^3}{\text{kg}\cdot s^2} \left(\frac{1 \text{ ft}}{0.3048\, m}\right)^3 \left(\frac{14.5939 \text{ kg}}{1 \text{ slug}}\right)$$

$$G = 66.73 \times 10^{-12} \frac{m^3}{\text{kg}\cdot s^2} \left(\frac{1 \text{ ft}^3}{28.3168\times10^{-3}\, m^3}\right) \left(\frac{14.5939 \text{ kg}}{1 \text{ slug}}\right)$$

$$G = 66.73 \times 10^{-12} \frac{\text{ft}^3}{\text{slug}\cdot s^2} (35.9147)\,(14.5939)$$

$$G = 34.3912 \times 10^{-9} \frac{\text{ft}^3}{\text{slug}\cdot s^2}$$

La constante de gravitación universal para el sistema inglés es:

$$G = 34.3912 \times 10^{-9} \frac{\text{ft}^3}{\text{slug}\cdot s^2}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
G = 66.73 × 10^-12;
ft2m = 0.3048;
slug2kg = 14.5939;
```

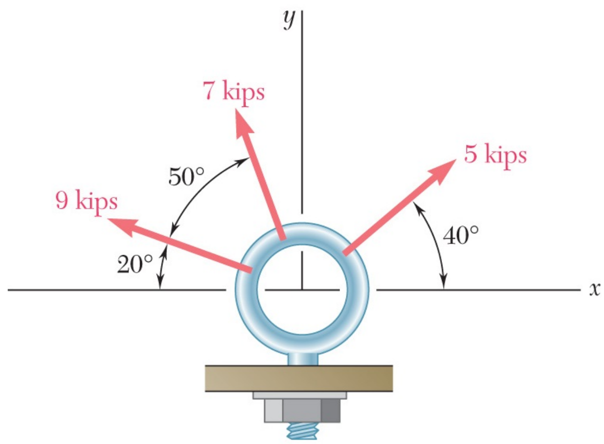
Aplicación del método de transformación de unidades (método del “chorizo”):

```
GsistIngles = G slug2kg / ft2m^3
```

Ejercicio 1.6

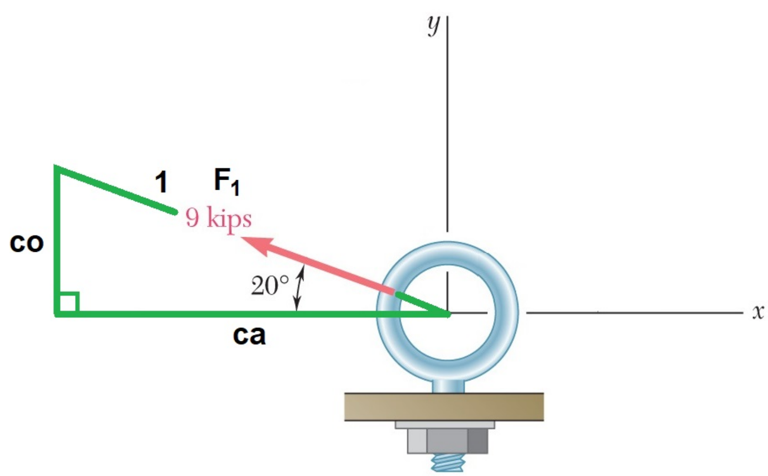
Problema 2.22 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 33.
Determine las componentes x, y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

La unidad kips es una abreviatura de kilo pounds, que traducido al español significa kilo libras, es decir, 9 kips corresponde a 9000 lb.
La identificación de las fuerzas a lo largo de esta resolución se muestra en la siguiente figura:



Los vectores unitarios de fuerzas definidas en el plano por medio de ángulos con respecto al eje x o al eje y resultan ser vectores con dos componentes, que son el seno y el coseno del ángulo dado.

Por ejemplo, para obtener $\overline{F_1}$, que es la fuerza que tiene una magnitud de 9 kips, se obtiene el vector unitario $\overline{u_1}$ de dicha fuerza, con base en la siguiente figura:



Puede obtenerse que:

$\sin(20°) = \frac{co}{1}$

$co = \sin(20°)$

$\cos(20^{o}) = \frac{ca}{1}$

$ca = \cos(20^{o})$

La componente en x es negativa, ya que se mide hacia la izquierda del origen del vector, y la componente en y es positiva porque se mide hacia arriba:

$\overline{u_1} = (-ca, co)$

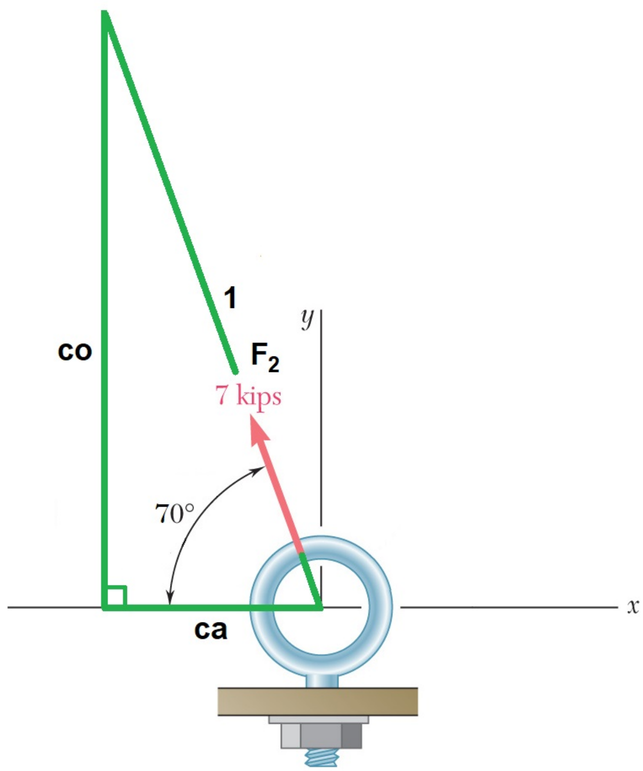
$\overline{u_1} = (-\cos(20^{o}), \sin(20^{o}))$

$\overline{u_1} = (-0.9397, 0.3420)$

$\overline{F_1} = 9000\,(-0.9397, 0.3420)$

$\overline{F_1} = (-8457, 3078)$ lb

Para el caso de la fuerza de 7 kips, con base en la figura mostrada:



Con el empleo de las definiciones de seno y coseno de un ángulo:

$\sin(70^{o}) = \frac{co}{1}$

$co = \sin(70^{o})$

$\cos(70^{o}) = \frac{ca}{1}$

$ca = \cos(70^{o})$

Su vector unitario, $\overline{u_2}$, tiene a ca como componente en x con signo negativo, ya que es del origen del vector hacia la izquierda, y co como componente en y con signo positivo, ya que es del origen hacia arriba, por tanto:

$\overline{u_2} = (-ca, co)$

$\overline{u_2} = (-\cos(70^{o}), \sin(70^{o}))$

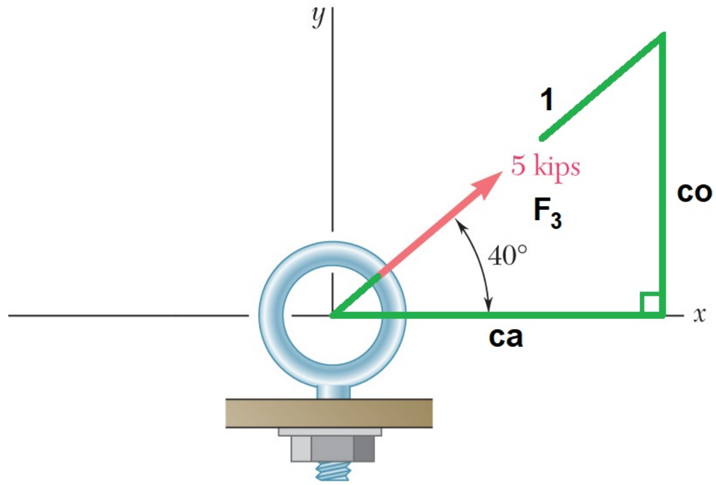
$\overline{u_2} = (-0.3420, 0.9397)$

$\overline{F_2} = F_2\, \overline{u_2}$

$\overline{F_2} = 7000\ (-0.3420,\ 0.9397)$

$\overline{F_2} = (-2394,\ 6578)$ lb

En relación con la fuerza $\overline{F_3}$, que es la ubicada de lado derecho del centro de la armella, es necesario calcular su vector unitario, $\overline{u_3}$, el cual puede obtenerse con facilidad a partir de la figura mostrada a continuación:



Puede verificarse que para el vector unitario $\overline{u_3}$ de la fuerza de 5 kips, ambas componentes son positivas, puesto que son hacia la derecha y hacia arriba del origen del vector que lo representa:

$\sin(40^o) = \frac{co}{1}$

$co = \sin(40^o)$

$\cos(40^o) = \frac{ca}{1}$

$ca = \cos(40^o)$

Entonces:

$\overline{u_3} = (ca,\ co)$

$\overline{u_3} = (\cos(40^o),\ \sin(40^o))$

$\overline{u_3} = (0.7660,\ 0.6427)$

$\overline{F_3} = 5000\ (0.7660,\ 0.6427)$

$\overline{F_3} = (3830,\ 3214)$ lb

Considerando que $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$ y $\overline{F_3}$ son, respectivamente, las fuerzas con una magnitud de 9 kips, 7 kips y 5 kips, sus representaciones analíticas son:

$\overline{F_1} = (-8457,\ 3078)$ lb

$\overline{F_2} = (-2394,\ 6578)$ lb

$\overline{F_3} = (3830,\ 3214)$ lb.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magF1 = 9000;
magF2 = 7000;
magF3 = 5000;
```

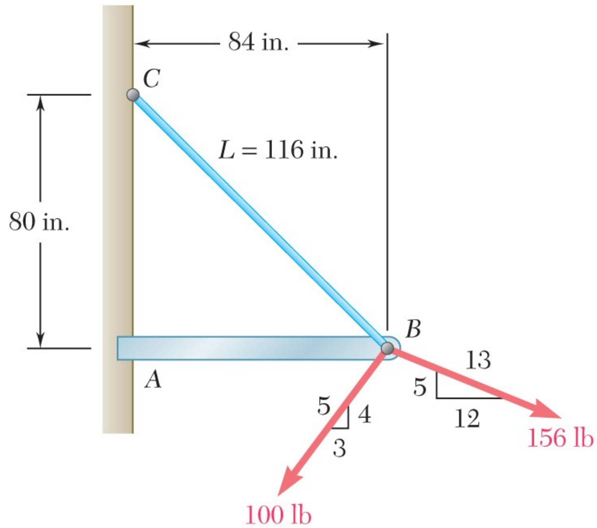
El vector fuerza es igual a su magnitud multiplicada por su vector unitario:

```
eF1 = N[{-Cos[20 °], Sin[20 °]}, 4]
        valo· coseno        seno
F1 = magF1 eF1
eF2 = N[{-Cos[70 °], Sin[70 °]}, 4]
        valo· coseno        seno
F2 = magF2 eF2
eF3 = N[{Cos[40 °], Sin[40 °]}, 4]
        v··· coseno        seno
F3 = magF3 eF3
```

Ejercicio 1.7

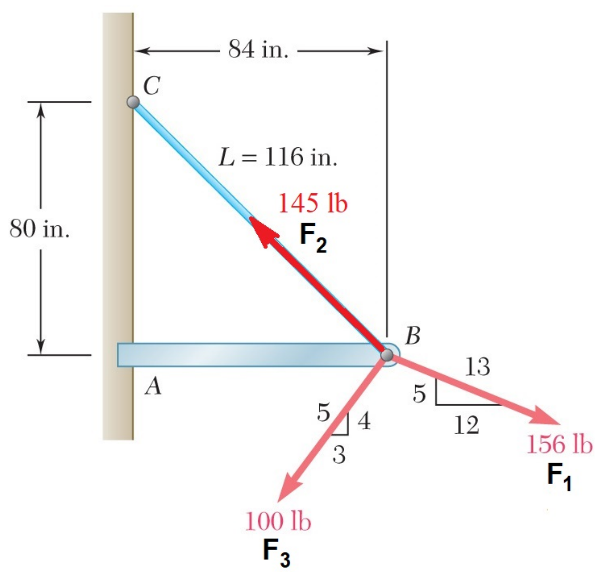
Problema 2.35 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 34.

Si la tensión en el cable BC es de 145 lb, determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB.

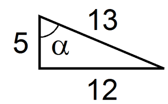


Se define como resultante a la suma vectorial de todas las fuerzas que son concurrentes a un punto. En Mecánica no se permite mover los vectores a otro punto de aplicación, a menos que esté contenido en la línea de acción del vector.

En la siguiente figura se muestran los identificadores de cada una de las tres fuerzas que se emplearán en el desarrollo de este ejercicio, incluyendo la fuerza de tensión en el cable BC.



Para la fuerza $\overline{F_1}$ de 156 lb, el vector unitario se puede obtener fácilmente con el seno y el coseno del ángulo, con base en las longitudes dadas del triángulo correspondiente. No es necesario calcular el valor del ángulo, simplemente se puede verificar que si se considera que el ángulo α es el que forma el cateto vertical con la hipotenusa:



Puede observarse que:

$\sin(\alpha) = \frac{12}{13}$

$\cos(\alpha) = \frac{5}{13}$

Dado que el cateto con valor 12 es el horizontal, la división de este y la hipotenusa corresponde a la componente en x del vector unitario. Para el cateto con longitud 5 que es el vertical, su división por la hipotenusa representa a la componente en y. Dado que la componente en x es hacia la derecha del origen del vector y la componente en y es hacia abajo, la primera es positiva y la segunda negativa:

$\overline{u_1} = \left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

Se puede demostrar que este vector efectivamente es unitario:

$|\overline{u_1}| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2}$

$|\overline{u_1}| = \sqrt{\frac{12^2}{13^2} + \frac{(-5)^2}{13^2}}$

$|\overline{u_1}| = \sqrt{\frac{12^2 + (-5)^2}{13^2}}$

$|\overline{u_1}| = 1$

Por tanto, el vector que representa a la fuerza de 156 lb que se le denominará $\overline{F_1}$ es:

$\overline{F_1} = 156\,\overline{u_1}$

$\overline{F_1} = 156\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$

$\overline{F_1} = (144, -60)$ lb

Para la tensión en el cable al que se denomina $\overline{F_2}$ y cuya magnitud es de 145 lb, de forma similar al explicado anteriormente, se obtiene el vector unitario $\overline{u_2}$ con base en las medidas de los lados del triángulo correspondiente:

$\overline{u_2} = \left(-\frac{84}{116}, \frac{80}{116}\right)$

luego de dividir por cuatro el numerador y el denominador de ambas componentes:

$\overline{u_2} = \left(-\frac{21}{29}, \frac{20}{29}\right)$

Por tanto:

$\overline{F_2} = 145\left(-\frac{21}{29}, \frac{20}{29}\right)$

$\overline{F_2} = (-105, 100)$ lb

Puede verificarse que el módulo del vector $\overline{F_2}$ es igual a 145 lb:

$|\overline{F_2}| = \sqrt{(-105)^2 + 100^2}$

$|\overline{F_2}| = \sqrt{11\,025 + 10\,000}$

$|\overline{F_2}| = \sqrt{21\,025}$

$|\overline{F_2}| = 145$ lb

Para la fuerza $\overline{F_3}$ de 100 lb de magnitud, su vector unitario $\overline{u_3}$ es:

$\overline{u_3} = \left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$

de donde:

$\overline{F_3} = 100\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$

$\overline{F_3}$ = (-60, -80) lb

Finalmente, la resultante es la suma de las tres fuerzas:

$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$

$\overline{R}$ = (144, -60) + (-105, 100) + (-60, -80)

$\overline{R}$ = (-21, -40) lb

La resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB es:

$\overline{R}$ = (-21, -40) lb.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magF1 = 100;
magF2 = 156;
magF3 = 145;
```

Obtención de los vectores unitarios de cada una de las fuerzas:

$$eF1 = \left\{-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$$

$$eF2 = \left\{\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right\}$$

```
eF3 = Normalize[{-84, 80}]
```

normaliza

Nota: la función Normalize obtiene el vector unitario del vector dado

Obtención de la representación vectorial de las fuerzas:

```
F1 = magF1 eF1
F2 = magF2 eF2
F3 = magF3 eF3
```

Cálculo de la resultante:

```
R = F1 + F2 + F3
```

Magnitud de la resultante:

```
magR = Norm[R] // N
```

Ángulo que forma la resultante con respecto al eje x:

```
θR = ArcTan[R[[2]] / R[[1]]] // N

θRDeg = θR / °
```

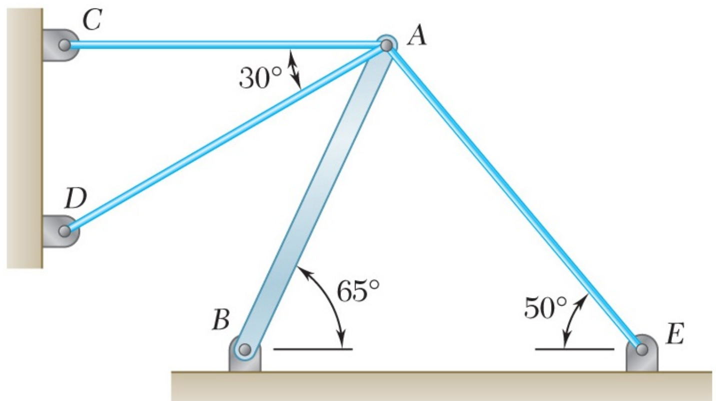
Ejercicio 1.8

Problema 2.42 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 35.

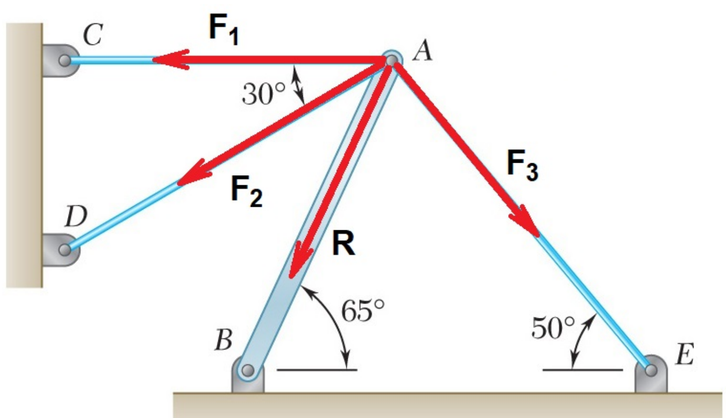
El aguilón AB se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante tres cables. Si las tensiones respectivas en los cables AC y AD son de 900 y 1200 lb, determine:

a) la tensión en el cable AE si la resultante de las tensiones ejercidas en el punto A del aguilón debe estar dirigida a lo largo de AB;

b) la magnitud correspondiente de la resultante.



Las fuerzas de tensión de todos los cables se representan como segmentos dirigidos cuyos orígenes están en el punto A orientados hacia fuera de dicho punto, tal como se muestra en la siguiente figura. Asimismo, se muestra la resultante mencionada.



Por consiguiente, las expresiones
analíticas de cada una de las fuerzas son las siguientes. Para la tensión en el cable AC, al que se denominará $\overline{F_1}$ es:

$\overline{F_1} = F_1\,\overline{u_1}$

donde F_1 es su magnitud y $\overline{u_1}$ su vector unitario.

$F_1 = 900$ lb

$\overline{u_1} = (-1, 0)$

$\overline{F_1} = 900\,(-1, 0)$

$\overline{F_1} = (-900, 0)$ lb

ya que va dirigido horizontalmente hacia la izquierda.
Para la tensión en el cable AD, su expresión analítica es:

$\overline{F_2} = F_2\,\overline{u_2}$

De manera similar a la fuerza de tensión en el cable AC, F_2 y $\overline{u_2}$ son, respectivamente, la magnitud y el vector unitario de $\overline{F_2}$ que lo representa.

$F_2 = 1200$ lb

$\overline{u_2} = (-\cos(30°), -\sin(30°))$

$\overline{u_2} = (-0.8660, -0.5000)$

$\overline{F_2} = 1200\,(-0.8660, -0.5000)$

$\overline{F_2} = (-1039, -600)$ lb

Con respecto a la tensión en el cable AE, si se considera que $\overline{F_3}$ es la representación analítica de dicha fuerza y F_3 y $\overline{u_3}$ son su magnitud y su vector unitario:

$\overline{F_3} = F_3\,\overline{u_3}$

$\overline{u_3} = (\cos(50°), -\sin(50°))$

$\overline{u_3} = (0.6427, -0.7660)$

Ya que se desconoce su magnitud:

$\overline{F_3} = F_3\,(0.6427, -0.7660)$

$\overline{F_3} = (0.6427\,F_3, -0.7660\,F_3)$

Con respecto a la resultante, dado que se refiere a aquella obtenida de las tres tensiones anteriores, lo más seguro es que su orientación sea también del punto A hacia B, en este caso:

$\overline{R} = \mathrm{R}\,\overline{u_R}$

donde R es su magnitud y $\overline{u_R}$ su vector unitario, donde:

$\overline{u_R} = (-\cos(65°), -\sin(65°))$

$\overline{u_R} = (-0.4226, -0.9063)$

Entonces:

$\overline{R} = \mathrm{R}\,(-0.4226, -0.9063)$

$\overline{R} = (-0.4226\,\mathrm{R}, -0.9063\,\mathrm{R})$

Con base en la definición de resultante como la suma de las fuerzas involucradas:

$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$

$(-0.4226\,\mathrm{R}, -0.9063\,\mathrm{R}) = (-900, 0) + (-1039, -600) + (0.6427\,F_3, -0.7660\,F_3)$

De la ecuación vectorial anterior, se pueden establecer dos ecuaciones escalares, al igualar la componente en x del miembro izquierdo con la componente en x del derecho, de forma similar igualando las componentes en y:

$-0.4226\,\mathrm{R} = -900 - 1039 + 0.6427\,F_3$

$-0.9063\,\mathrm{R} = 0 - 600 - 0.7660\,F_3$

Se puede reescribir la primera expresión de la siguiente manera:

$-1939 + 0.6427\,F_3 = -0.4226\,\mathrm{R}$

$0.6427\,F_3 + 0.4226\,\mathrm{R} = 1939$

y la segunda expresión:

$0.7660\,F_3 - 0.9063\,\mathrm{R} = -600$

Para calcular la magnitud de la tensión en el cable AE, es decir F_3, se despeja R de la primera expresión:

$0.4226\ R = 1939 - 0.6427\ F_3$

$R = \frac{1939}{0.4226} - \frac{0.6427}{0.4226} F_3$

$R = 4588.3 - 1.5208\ F_3$

y se le sustituye en la segunda:

$0.7660\ F_3 - 0.9063\ (4588.3 - 1.5208\ F_3) = -600$

$0.7660\ F_3 - 4158.3 + 1.3783\ F_3 = -600$

$2.1443\ F_3 = -600 + 4158.3$

$F_3 = \frac{3558.3}{2.1443}$

$F_3 = 1659.4$ lb

Finalmente, para obtener el valor de la magnitud de la resultante, se sustituye el resultado anterior en la expresión para R:

$R = 4588.3 - 1.5208\ F_3$

$R = 4588.3 - 1.5208\ (1659.3)$

$R = 4588.3 - 2523.5$

$R = 2064.8$ lb

La tensión en el cable AE si la resultante de las tensiones ejercidas en el punto A del aguilón debe estar dirigida a lo largo de AB es:

$F_3 = 1659.4$ lb

y la magnitud correspondiente de la resultante es:

$R = 2064.8$ lb

Resolución con el empleo de la función Solve de Mathematica:

```
ec1 = 0.6427 F3 + 0.4226 R == 1939
ec2 = 0.7660 F3 - 0.9063 R == -600
```

```
resp = Solve[{ec1, ec2}]
        resuelve
```

```
F3Sol = F3 /. resp[[1]]
RSol = R /. resp[[1]]
```

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magFAC = 900;
magFAD = 1200;
```

Vectores unitarios:

```
eFAC = {-1, 0}
eFAD = {-Cos[30 °], -Sin[30 ° ]} // N
        coseno      seno           va
eFAE = {Cos[50 °], -Sin[50 ° ]} // N
        coseno     seno           valo
eR = {-Cos[65 °], -Sin[65 ° ]} // N
      coseno      seno           valor
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
FAC = magFAC eFAC
FAD = magFAD eFAD
FAE = magFAE eFAE
R = magR eR
```

Resolución de la ecuación vectorial:

```
ec1 = FAC + FAD + FAE == R
resp = Solve[ec1]
       resuelve
magRSol = magR /. resp[[1]]
magFAESol = magFAE /. resp[[1]]
```

Ejercicio 1.9

Problema 2.73 y 2.74 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 54.

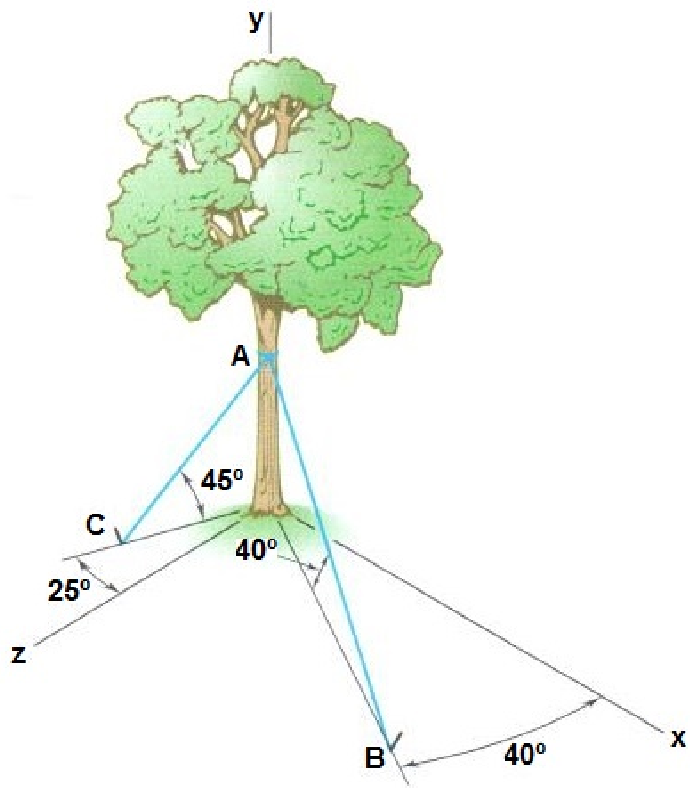
Para estabilizar un árbol arrancado parcialmente durante una tormenta, se le amarran los cables AB y AC a la parte alta del tronco y después se fijan a las barras de acero clavadas en el suelo. Si la tensión en el cable AB es de 950 lb y en el cable AC es de 810 lb, determine:

a) las componentes de la fuerza ejercida por el cable AB sobre el árbol;

b) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida por el cable AB en A sobre el árbol con los ejes paralelos a los ejes coordenados;

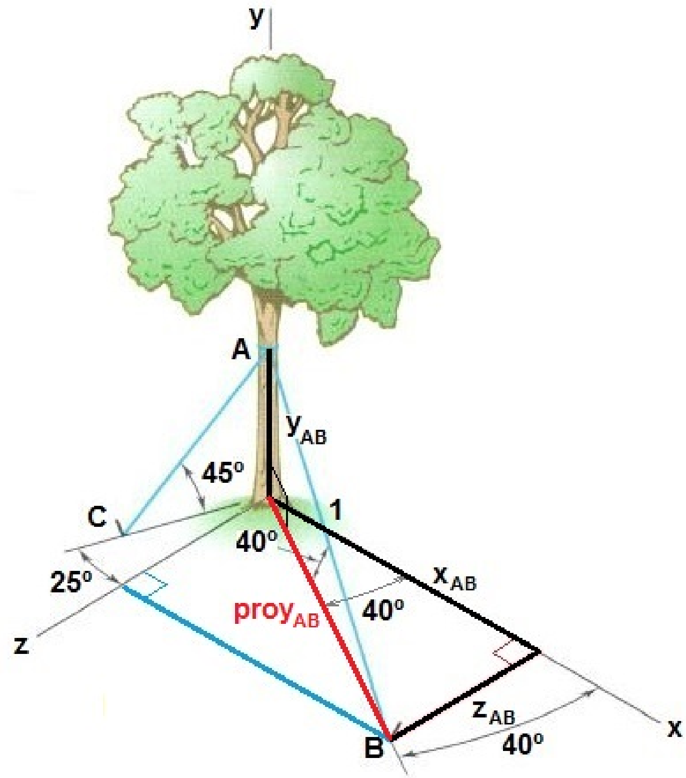
c) las componentes de la fuerza ejercida por el cable AC sobre el árbol;

d) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida por el cable AC en A sobre el árbol con los ejes paralelos a los ejes coordenados.



a) las componentes de la fuerza ejercida por el cable AB sobre el árbol

Se considera que el triángulo que va de A al pie del árbol y a B es un triángulo rectángulo en el espacio. Por tanto, con base en las definiciones de seno y coseno, se pueden obtener los catetos de dicho triángulo, que corresponden a la componente en y para el seno, y la proyección horizontal para el coseno. Se considera que la hipotenusa vale 1, con objeto de obtener el vector unitario, tal como se muestra en la siguiente figura:



$\sin 40º = \frac{y_{AB}}{1}$

$y_{AB} = \sin(40º)$

$y_{AB} = 0.6428$

$\cos(40º) = \frac{proy_{AB}}{1}$

$proy_{AB} = \cos(40º)$

$proy_{AB} = 0.7660$

Ahora, para obtener las otras dos componentes del vector unitario, se requiere visualizar que el triángulo formado por la proyección de AB sobre el piso y un segmento de recta que va de B perpedicularmente al eje x y al pie del árbol, es rectángulo. Por consiguiente, con base en la definición de seno y coseno, se obtiene:

$\sin(40º) = \frac{z_{AB}}{proy_{AB}}$

$z_{AB} = proy_{AB} \sin(40º)$

$z_{AB} = 0.7660\ (0.6428)$

$z_{AB} = 0.4924$

$\cos(40º) = \frac{x_{AB}}{proy_{AB}}$

$x_{AB} = proy_{AB} \cos(40º)$

$x_{AB} = 0.7660\ (0.7660)$

$x_{AB} = 0.5868$

En esta ocasión se verifica si realmente dichas componentes son de un vector unitario:

$\overline{u_{AB}} = (0.5868, 0.6428, 0.4924)$

$|\overline{u_{AB}}| = \sqrt{0.5868^2 + 0.6428^2 + 0.4924^2}$

$|\overline{u_{AB}}| = \sqrt{0.3443 + 0.4132 + 0.2425}$

$|\overline{u_{AB}}| = \sqrt{1}$

$|\overline{u_{AB}}| = 1$

Es necesario establecer los signos de las componentes, luego de obtener sus valores. Con base en el análisis en la misma figura, se puede observar que la flecha que representa al vector de la fuerza solicitada va hacia la derecha, hacia abajo y hacia delante del punto A, las componentes tendrán los siguientes signos:

$\overline{u_{AB}} = (0.5868, -0.6428, 0.4924)$

Finalmente, el vector que representa a la fuerza que ejerce el cable AB sobre el árbol es:

$\overline{F_{AB}} = F_{AB}\,\overline{u_{AB}}$

$F_{AB} = 950$ lb

$\overline{F_{AB}} = 950\,(0.5868, -0.6428, 0.4924)$

$\overline{F_{AB}} = (557.5, -610.7, 467.8)$ lb

b) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida por el cable AB en A sobre el árbol con los ejes paralelos a los ejes coordenados

Recordando que el vector unitario está formado por los cosenos directores:

$\overline{u_{AB}} = (\cos(\theta_x), \cos(\theta_y), \cos(\theta_z))$

aplicando el teorema de transitividad:

$(\cos(\theta_x), \cos(\theta_y), \cos(\theta_z)) = (0.5868, -0.6428, 0.4924)$

de donde:

$\cos(\theta_x) = 0.5868$

$\theta_x = \arccos(0.5868)$

$\theta_x = 54.07^{o}$

$\cos(\theta_y) = -0.6428$

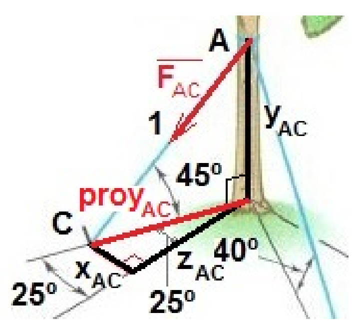
$\theta_y = 130^{o}$

$\cos(\theta_z) = 0.4924$

$\theta_z = 60.50^{o}$

c) las componentes de la fuerza ejercida por el cable AC sobre el árbol

En seguida se muestra una figura a partir de la cual pueden obtenerse las componentes de un vector unitario que va del punto A al punto C:



$y_{AC} = \sin(45^{o})$

$y_{AC} = 0.7071$

$proy_{AC} = \cos(45^{o})$

$proy_{AC} = 0.7071$

$x_{AC} = \text{proy}_{AC} \sin(25°)$

$x_{AC} = 0.7071\ (0.4226)$

$x_{AC} = 0.2988$

$z_{AC} = \text{proy}_{AC} \cos(25°)$

$z_{AC} = 0.7071\ (0.9063)$

$z_{AC} = 0.6409$

Con respecto a los signos de las componentes, dado que el vector fuerza va del árbol al punto C, éste va hacia la izquierda, hacia abajo y hacia delante, entonces:

$\overline{u_{AC}} = (-0.2988, -0.7071, 0.6409)$

Finalmente, las componentes de la fuerza solicitada son:

$\overline{F_{AC}} = F_{AC}\ \overline{u_{AC}}$

$\overline{F_{AC}} = 810\ (-0.2988, -0.7071, 0.6409)$

$\overline{F_{AC}} = (-242.0, -572.8, 519.1)$ lb

d) los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida por el cable AC en A sobre el árbol con los ejes paralelos a los ejes coordenados

$\theta_x = \text{arc cos}\ (-0.2988)$

$\theta_x = 107.4°$

$\theta_y = \text{arc cos}\ (-0.7071)$

$\theta_y = 135°$

$\theta_z = \text{arc cos}\ (0.6409)$

$\theta_z = 50.14°$

Las componentes de la fuerza ejercida por el cable AB sobre el árbol son:

$\overline{F_{AB}} = (557.5, -610.7, 467.8)$ lb.

Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida por el cable AB en A con los ejes paralelos a los ejes coordenados son:

$\theta_x = 54.07°$

$\theta_y = 130°$

$\theta_z = 60.50°$.

Las componentes de la fuerza ejercida por el cable AC sobre el árbol son:

$\overline{F_{AC}} = (-242.0, -572.8, 519.1)$ lb.

Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida por el cable AC en A con los ejes paralelos a los ejes coordenados son:

$\theta_x = 107.4°$

$\theta_y = 135°$

$\theta_z = 50.14°$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

a) Las componentes de la fuerza ejercida por el cable AB sobre el árbol

Datos:

```
magFAB = 950;
```

Componentes vector unitario $\overline{e_{AB}}$:

```
eFABy = -Sin[40 °]
         seno
eFABh = Cos[40 °]
        coseno
eFAB = {eFABh Cos[40 °], eFABy, eFABh Sin[40 °]} // N
              coseno                  seno          va
```

Representación vectorial de la fuerza $\overline{F_{AB}}$:

```
FAB = magFAB eFAB
```

b) Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza en A con los ejes paralelos a los ejes coordenados

```
ÁngFAB = ArcCos[eFAB]
         arco coseno
               ÁngFAB
ÁngFABDeg = ---------
                 °
```

c) Las componentes de la fuerza ejercida por el cable AC sobre el árbol

Datos:

```
magFAC = 810;
```

Componentes vector unitario $\overline{e_{AC}}$:

```
eFACy = -Sin[45 °]
         seno
eFACh = Cos[45 °]
        coseno
eFAC = {-eFACh Sin[25 °], eFACy, eFACh Cos[25 °]} // N
               seno                    coseno        va
```

Representación vectorial de la fuerza $\overline{F_{\text{AC}}}$:

```
FAC = magFAC eFAC
```

d) Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que forma la fuerza en A con los ejes paralelos a los ejes coordenados

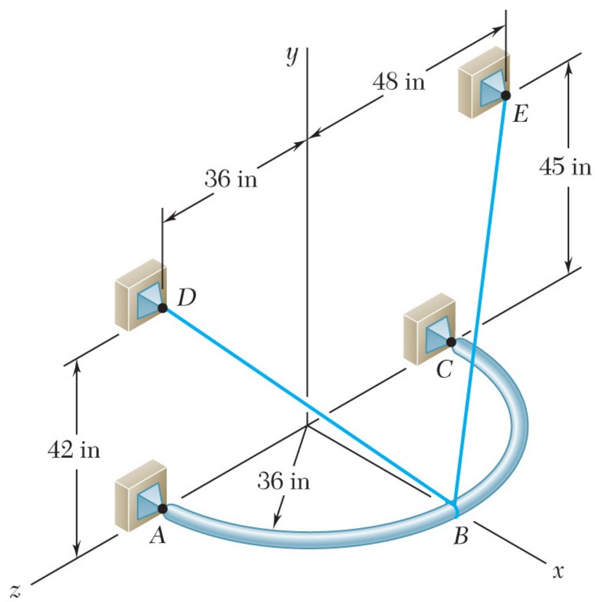
```
ÁngFAC = ArcCos[eFAC]
                └arco coseno
```

$$\text{ÁngFACDeg} = \frac{\text{ÁngFAC}}{{}^\circ}$$

Ejercicio 1.10

Problema 2.87 y 2.88 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 55.

Una barra de acero se dobla para formar un anillo semicircular con 36 in de radio que está sostenido parcialmente por los cables BD y BE, los cuales se unen al anillo en el punto B. Si la tensión en el cable BD es de 55 lb y en el cable BE es de 60 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable BD sobre el soporte colocado en D, y de la fuerza ejercida por el cable BE sobre el soporte colocado en E.



Para obtener las componentes de las fuerzas ejercidas por los cables BD y BE sobre los soportes colocados en D y E, primero se obtienen los vectores geométricos determinados por BD y BE, luego se obtienen sus vectores unitarios y finalmente se multiplican por la magnitud de dichas fuerzas:

$\overline{r_B} = \{36, 0, 0\}$

$\overline{r_D} = \{0, 42, 36\}$

$\overline{r_E} = \{0, 45, -48\}$

$\overline{\text{DB}} = \overline{r_B} - \overline{r_D}$

$\overline{\text{DB}} = \{36, 0, 0\} - \{0, 42, 36\}$

$\overline{\text{DB}} = \{36, -42, -36\}$

$|\overline{\text{DB}}| = \sqrt{36^2 + (-42)^2 + (-36)^2}$

$|\overline{\text{DB}}| = \sqrt{1296 + 1764 + 1296}$

$|\overline{\text{DB}}| = \sqrt{4356}$

$|\overline{\text{DB}}| = 66$

$\overline{e_{\text{DB}}} = \frac{\overline{\text{DB}}}{|\overline{\text{DB}}|}$

$\overline{e_{\text{DB}}} = \frac{1}{66}\{36, -42, -36\}$

$\overline{e_{DB}} = \left\{\frac{36}{66}, -\frac{42}{66}, -\frac{36}{66}\right\}$

$\overline{EB} = \overline{r_B} - \overline{r_E}$

$\overline{EB} = \{36, 0, 0\} - \{0, 45, -48\}$

$\overline{EB} = \{36, -45, 48\}$

$|\overline{EB}| = \sqrt{36^2 + (-45)^2 + 48^2}$

$|\overline{EB}| = \sqrt{1296 + 2025 + 2304}$

$|\overline{EB}| = \sqrt{5625}$

$|\overline{EB}| = 75$

$\overline{e_{EB}} = \frac{\overline{EB}}{|\overline{EB}|}$

$\overline{e_{EB}} = \frac{1}{75}\{36, -45, 48\}$

$\overline{e_{EB}} = \left\{\frac{36}{75}, -\frac{45}{75}, \frac{48}{75}\right\}$

Por consiguiente:

$\overline{F_{DB}} = F_{DB}\,\overline{e_{DB}}$

$\overline{F_{DB}} = 55\left\{\frac{36}{66}, -\frac{42}{66}, -\frac{36}{66}\right\}$

$\overline{F_{DB}} = \{30, -35, -30\}$ lb

$\overline{F_{EB}} = F_{EB}\,\overline{e_{EB}}$

$\overline{F_{EB}} = 60\left\{\frac{36}{75}, -\frac{45}{75}, \frac{48}{75}\right\}$

$\overline{F_{EB}} = \{28.8, -36, 38.4\}$ lb

Las componentes de la fuerza del cable BD sobre el soporte colocado en D son:

$\overline{F_{DB}} = \{30, -35, -30\}$ lb

y las del cable BE sobre el soporte colocado en E son:

$\overline{F_{EB}} = \{28.8, -36, 38.4\}$ lb.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magFDB = 55;
magFEB = 60;
rB = {36, 0, 0};
rD = {0, 42, 36};
rE = {0, 45, -48};
```

Vectores geométricos:

```
DB = rB - rD
EB = rB - rE
```

Vectores unitarios:

```
eDB = Normalize[DB]
      normaliza
eEB = Normalize[EB]
      normaliza
```

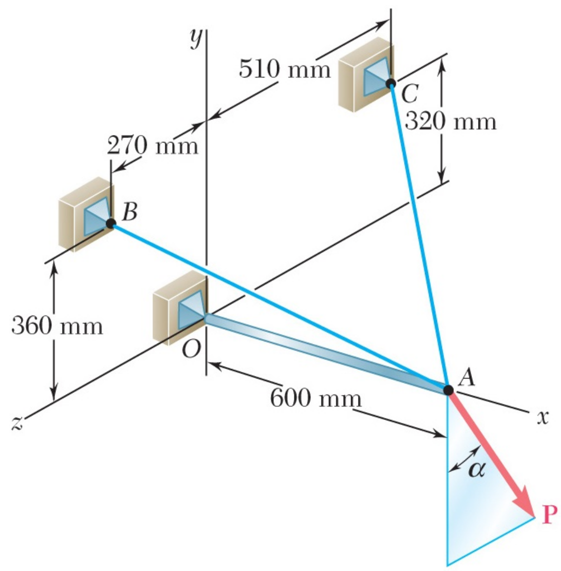
Representación vectorial de las fuerzas:

```
FDB = magFDB eDB
FEB = magFEB eEB // N
                   va
```

Ejercicio 1.11

Problema 2.95 Beer, Johnston y Eisenberg, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 57.

El aguilón OA soporta una carga P y está sostenido por dos cables, según muestra la figura. Si en el cable AB la tensión es de 510 N y en el cable AC es de 765 N, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.



Para calcular la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los cables AB y AC, se requiere obtener las representaciones vectoriales de dichas fuerzas de tensión.
Primero, se obtienen los vectores geométricos de A a B y de A a C, luego sus vectores unitarios, y estos últimos multiplicados por las magnitudes de las tensiones respectivas determinan los vectores que representan a estas fuerzas.

$\overline{r_A} = \{0.6, 0, 0\}$ m

$\overline{r_B} = \{0, 0.36, 0.27\}$ m

$\overline{r_C} = \{0, 0.32, -0.51\}$ m

$\overline{AB} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$

$\overline{AB} = \{0, 0.36, 0.27\} - \{0.6, 0, 0\}$

$\overline{AB} = \{-0.6, 0.36, 0.27\}$

$\overline{AC} = \overline{r_C} - \overline{r_A}$

$\overline{AC} = \{0, 0.32, -0.51\} - \{0.6, 0, 0\}$

$\overline{AC} = \{-0.6, 0.32, -0.51\}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-0.6)^2 + 0.36^2 + 0.27^2}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{0.36 + 0.1296 + 0.0729}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{0.5625}$

$|\overline{AB}| = 0.75$

$|\overline{AC}| = \sqrt{(-0.6)^2 + 0.32^2 + (-0.51)^2}$

$|\overline{\text{AC}}| = \sqrt{0.36 + 0.1024 + 0.2601}$

$|\overline{\text{AC}}| = \sqrt{0.7225}$

$|\overline{\text{AC}}| = 0.85$

$\overline{e_{\text{AB}}} = \frac{\overline{\text{AB}}}{|\overline{\text{AB}}|}$

$\overline{e_{\text{AB}}} = \frac{1}{0.75}\ \{-0.6, 0.36, 0.27\}$

$\overline{e_{\text{AB}}} = \left\{-\frac{0.6}{0.75}, \frac{0.36}{0.75}, \frac{0.27}{0.75}\right\}$

$\overline{e_{\text{AC}}} = \frac{\overline{\text{AC}}}{|\overline{\text{AC}}|}$

$\overline{e_{\text{AC}}} = \frac{1}{0.85}\ \{-0.6, 0.32, -0.51\}$

$\overline{e_{\text{AC}}} = \left\{-\frac{0.6}{0.85}, \frac{0.32}{0.85}, -\frac{0.51}{0.85}\right\}$

$\overline{T_{\text{AB}}} = T_{\text{AB}}\ \overline{e_{\text{AB}}}$

$\overline{T_{\text{AB}}} = 510\left\{-\frac{0.6}{0.75}, \frac{0.36}{0.75}, \frac{0.27}{0.75}\right\}$

$\overline{T_{\text{AB}}} = \{-408, 244.8, 183.6\}$ N

$\overline{T_{\text{AC}}} = T_{\text{AC}}\ \overline{e_{\text{AC}}}$

$\overline{T_{\text{AC}}} = 765\left\{-\frac{0.6}{0.85}, \frac{0.32}{0.85}, -\frac{0.51}{0.85}\right\}$

$\overline{T_{\text{AC}}} = \{-540, 288, -459\}$ N

La resultante de las fuerzas ejercidas por los dos cables es, entonces:

$\overline{R} = \overline{T_{\text{AB}}} + \overline{T_{\text{AC}}}$

$\overline{R} = \{-408, 244.8, 183.6\} + \{-540, 288, -459\}$

$\overline{R} = \{-948, 532.8, -275.4\}$ N

Por consiguiente, su magnitud es:

$|\overline{R}| = \sqrt{(-948)^2 + 532.8^2 + (-275.4)^2}$

$|\overline{R}| = \sqrt{898\,704 + 283\,875.84 + 75\,845.16}$

$|\overline{R}| = \sqrt{1\,258\,425}$

$|\overline{R}| = 1121.8$ N

Y para establecer su dirección, se obtendrán sus ángulos directores, por medio de su vector unitario:

$\overline{e_R} = \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|}$

$\overline{e_R} = \frac{1}{1121.7954}\ \{-948, 532.8, -275.4\}$

$\overline{e_R} = \left\{-\frac{948}{1121.7954}, \frac{532.8}{1121.7954}, -\frac{275.4}{1121.7954}\right\}$

$\overline{e_R} = \{-0.8451, 0.4750, -0.2455\}$

Por tanto, los ángulos directores son:

α_R = ArcCos [-0.8451]

α_R = 147.68°

β_R = ArcCos [0.4750]

β_R = 61.64°

γ_R = ArcCos [-0.2455]

γ_R = 104.21°

La magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables son:

$|\overline{R}|$ = 1,121.8 N

α_R = 147.68°

β_R = 61.64°

γ_R = 104.21°.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magTAB = 510;
magTAC = 765;
rA = {0.6, 0, 0};
rB = {0, 0.36, 0.27};
rC = {0, 0.32, -0.51};
```

Vectores geométricos AB y AC, en los que están contenidos los vectores que representan a las tensiones de los cables respectivos:

```
AB = rB - rA
AC = rC - rA
```

Vectores unitarios AB y AC:

```
eAB = Normalize[AB]
      normaliza
eAC = Normalize[AC]
      normaliza
```

Vectores que representan a las tensiones en los cables:

```
TAB = magTAB eAB
TAC = magTAC eAC
```

El vector de la fuerza resultante es igual a la suma de los vectores que representan a las tensiones en los cables:

```
R = TAB + TAC
magR = Norm[R]
```
norma

Para obtener los ángulos directores del vector de la fuerza resultante, se obtiene el vector unitario correspondiente :

$$eR = \frac{R}{magR}$$

Los ángulos directores se obtienen con la función ArcCos de cada una de las componentes del vector unitario anterior (el resultado se obtiene en radianes):

```
Ángulos = ArcCos[eR]
```
arco coseno

Se obtienen dichos ángulos en grados sexagesimales :

$$\alpha RDeg = \frac{Ángulos[[1]]}{°}$$

$$\beta RDeg = \frac{Ángulos[[2]]}{°}$$

$$\gamma RDeg = \frac{Ángulos[[3]]}{°}$$

Ejercicio 1.12

Problema 5-1 Hibbeler, Ingeniería mecánica, Estática, 10ª edición, Pearson Prentice Hall, p. 207.

Trace el diagrama de cuerpo libre del cilindro de papel de 50 kg que tiene su centro de masa en *G* y descansa sobre la horquilla lisa del transportador de papel. Explique la importancia de cada fuerza que actúa sobre el diagrama.

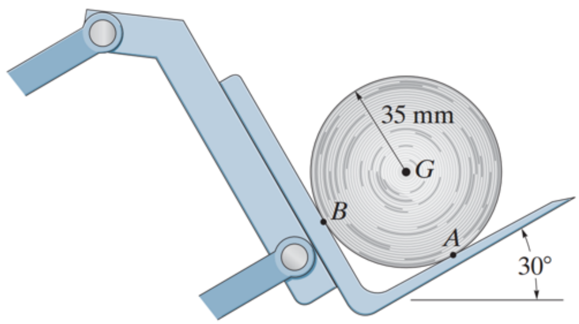
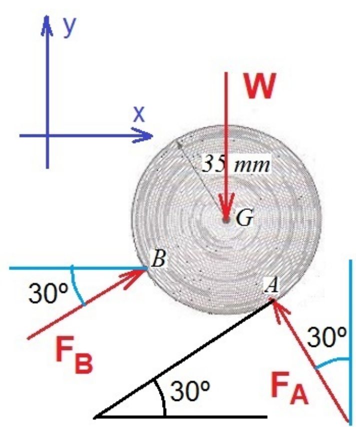


Diagrama de cuerpo libre del cilindro de papel:



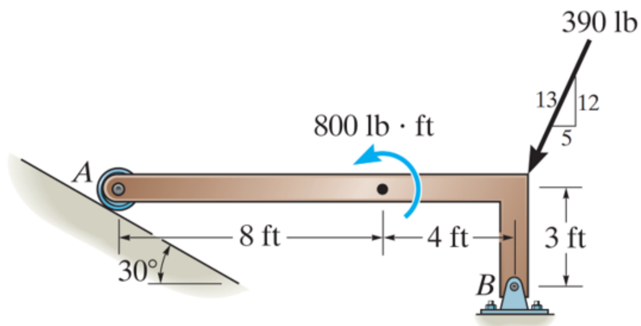
Las fuerzas de la horquilla sobre el cilindro en los puntos *A* y *B*, F_A y F_B, son perpendiculares a sus superficies y orientadas hacia el centro de dicho cilindro. Considerando que los planos de dicha horquilla son perpendiculares entre sí y que la porción derecha forma un ángulo de 30° con la horizontal, la orientación de la reacción en dicha parte forma el mismo ángulo de 30° con la vertical, con base en el teorema de ángulos entre perpendiculares, y el ángulo de la porción izquierda con la horizontal son estos mismos 30° con respecto a la horizontal.

El peso del cilindro de papel, $W = m\, g$, donde *m* es su masa y *g* es la aceleración del campo gravitatorio de la Tierra, actúa en su centro de gravedad, *G*, y es vertical y hacia abajo, tal como se muestra en este diagrama de cuerpo libre.

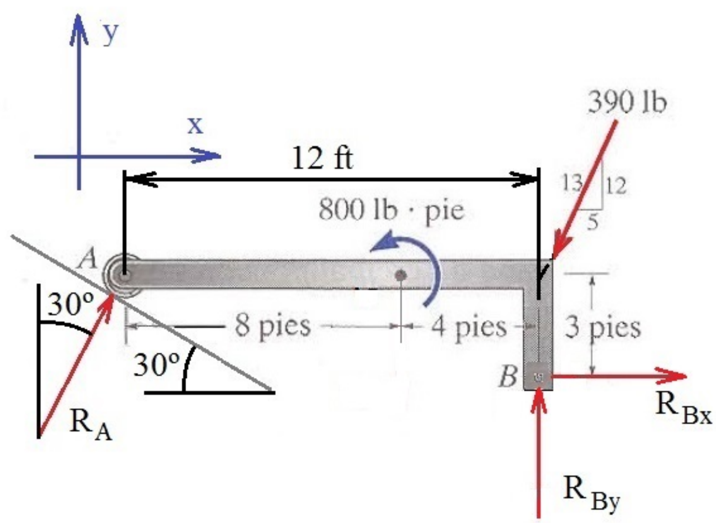
Ejercicio 1.13

Problema 5-2 Hibbeler, Ingeniería mecánica, Estática, 12ª edición, Pearson Prentice Hall, p. 211.

Trace el diagrama de cuerpo libre del elemento *AB,* que se apoya mediante un rodillo en *A* y un pasador en *B*. Explique la importancia de cada fuerza en el diagrama.



Por lo regular, para este tipo de casos se considera que el peso del elemento involucrado es despreciable. Diagrama de cuerpo libre del elemento *AB*:



Las fuerzas en el pasador *B*, para simplificar la resolución de problemas futuros, conviene subdividirlo en una componente en x, R_{Bx}, y una componente en y, R_{By}. Sus sentidos son arbitrarios, en este caso. En caso de resolver el problema, suponiendo que sea de equilibrio, si sus magnitudes son negativas, indican que los sentidos reales son opuestos a los propuestos.
El plano inclinado genera una reacción perpendicular a él con magnitud R_A. Como dicho plano forma 30° con la horizontal, dicha reacción forma un ángulo de 30° con la vertical, con base en el teorema de ángulo entre perpendiculares.
La fuerza indicada de *390 lb* y el momento de *800 lb·ft* aparecen tal como están propuestos.

Ejercicio 1.14

Problema 5-3 Hibbeler, Ingeniería mecánica, Estática, 10ª edición, Pearson Prentice Hall, p. 207.

Trace el diagrama de cuerpo libre de la caja de volteo D del camión, la cual tiene un peso de 5000 lb y centro de gravedad en G. La caja está soportada por un pasador en A y un cilindro hidráulico BC (eslabón corto) conectado mediante un pasador. Explique la importancia de cada barra en el diagrama.

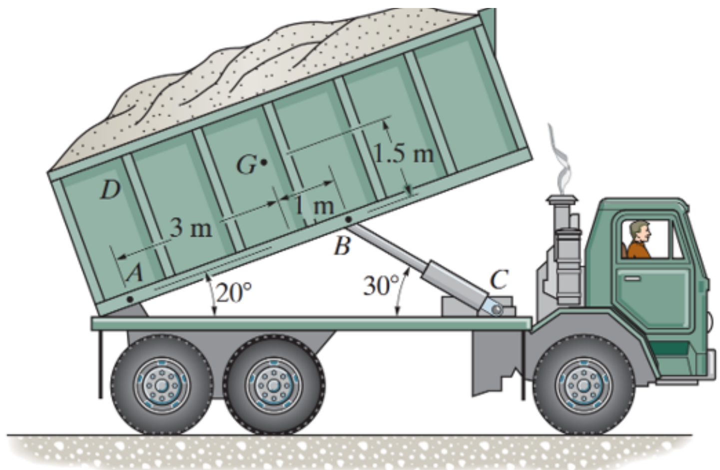
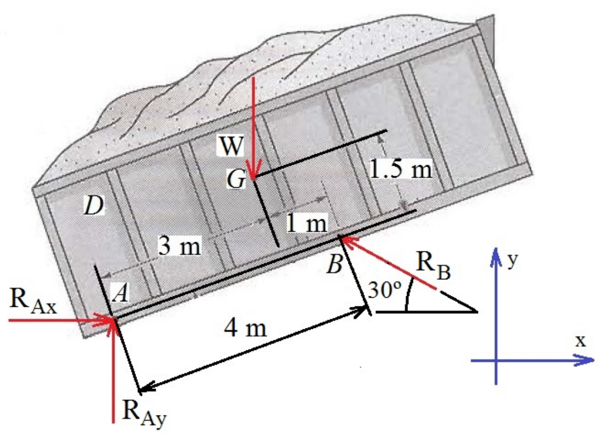


Diagrama de cuerpo libre de la caja de volteo:



Las reacciones en el pasador *A* subdivididos en una componente en x, R_{AX}, *y una componente en y*, R_{Ay} para simplificar la resolución de problemas futuros, en realidad es una sola fuerza oblicua.
El cilindro hidráulico *BC*, considerándolo como eslabón corto, genera una fuerza hacia la caja, con dirección del eje de dicho cilindro.
El peso de la caja, *W = 5000 lb*, actúa en su centro de gravedad, *G*, y es vertical y hacia abajo, tal como se muestra.

Ejercicio 1.15

Problema 5-6 Hibbeler, Ingeniería mecánica, Estática, 10ª edición, Pearson Prentice Hall, p. 208.

Trace el diagrama de cuerpo libre de la pluma *AB* de la grúa, la cual tiene un peso de *650 lb* y centro de gravedad en *G*. La pluma está soportada por un pasador en *A* y un cable *BC*. La carga de *1250 lb* está suspendida de un cable unido en *B*. Explique la importancia de cada fuerza que actúa en el diagrama.

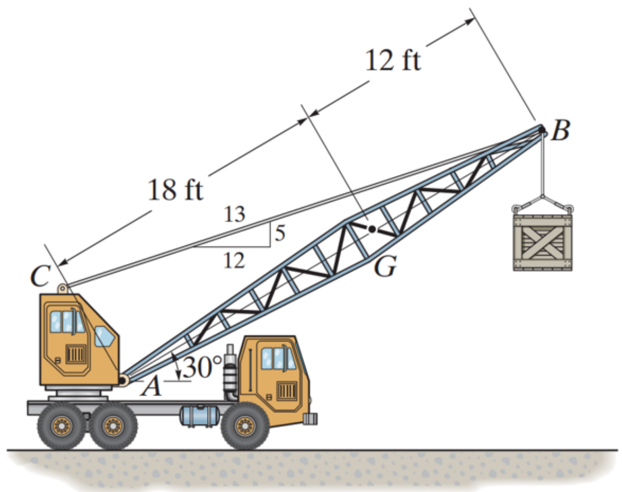
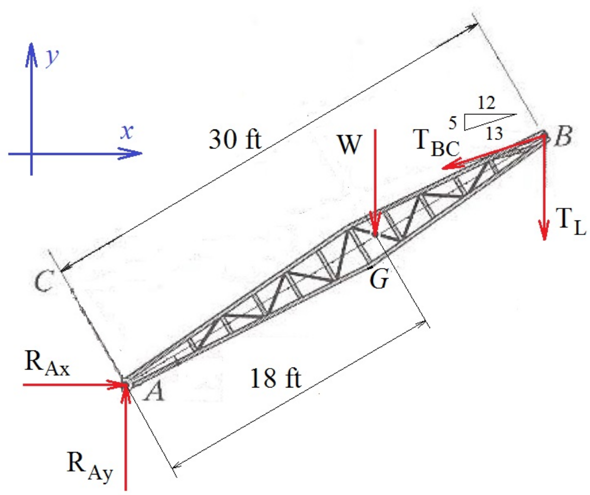


Diagrama de cuerpo libre de la pluma *AB* de la grúa:



Las fuerzas en el pasador *A*, en realidad una sola reacción, para simplificar la resolución de problemas futuros, conviene subdividirlo en una componente en x, R_{AX}, y una componente en y, R_{Ay}.
El cable *BC* genera una fuerza de tensión con magnitud T_{BC} cuya dirección es el del cable BC en sentido de B a C, que tiene una pendiente m = $-\frac{5}{12}$.
El cable que sujeta a la carga de *1250 lb* genera una fuerza de tensión vertical y hacia abajo, con una magnitud T_L.
Finalmente, el peso de la pluma, $W = 650\ lb$, actúa en su centro de gravedad, *G*, y es vertical y hacia abajo, tal como se observa en el diagrama de cuerpo libre anterior.

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Mecánica
Julio de 2022

Yukihiro Minami Koyama
Gloria Ramírez Romero