FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 2 - parte 1:

Representación y modelado de los sistemas de fuerzas

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

M.I Yukihiro Minami Koyama

Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

Tema 2, parte 1
Representación y modelado de los sistemas de fuerzas

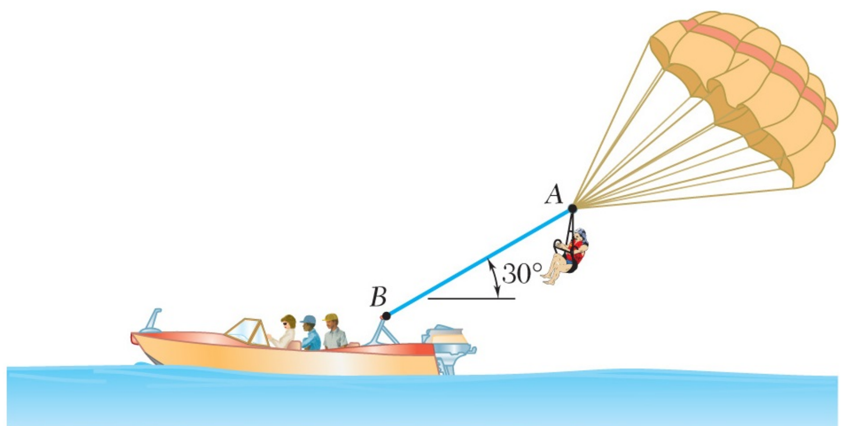
Ejercicio 2.1

Problema 2.47 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 41.

Un bote jala a un paracaídas y su pasajero a una velocidad constante. Si el pasajero pesa 550 N y la fuerza resultante **R** ejercida por el paracaídas sobre la horquilla *A* forma un ángulo de 65° con la horizontal, determine:

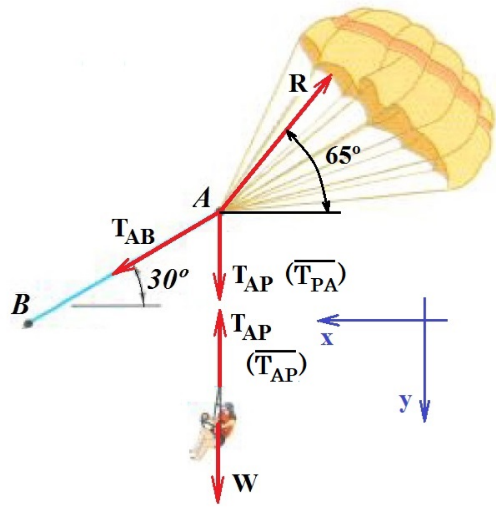
a) la tensión en la cuerda de remolque AB;

b) la magnitud de **R**.



Para resolver el problema, ante todo se dibuja el diagrama de cuerpo libre, tanto de la horquilla A como del pasajero.

Diagrama de cuerpo libre de la horquilla *A* y del pasajero:



a) la tensión en la cuerda de remolque AB

Primero, se expresan todas las fuerzas que actúan en la horquilla y en el pasajero de forma vectorial:

$\overline{R}$ = R {Cos[65°], Sin[65°]}

$\overline{R}$ = {R Cos[65°], R Sin[65°]}

$\overline{T_{AB}}$ = T_{AB} {-Cos[30°], -Sin[30°]}

$\overline{T_{AB}}$ = {-T_{AB} Cos[30°], -T_{AB} Sin[30°]}

$\overline{T_{PA}}$ = {0, −T_{AP}}

$\overline{T_{AP}}$ = {0, T_{AP}}

$\overline{W}$ = {0, -550}

Luego, se establece la ecuación de equilibrio del pasajero:

$\overline{T_{AP}}$ + $\overline{W}$ = {0, 0}

{0, T_{AP}} + {0, -550} = 0

T_{AP} - 550 = 0

T_{AP} = 550 N

Posteriormente se plantea y resuelve la ecuación de equilibrio de la horquilla A:

$\overline{R}$ + $\overline{T_{AB}}$ + $\overline{T_{PA}}$ = {0, 0}

{R Cos[65°], R Sin[65°]} + {-T_{AB} Cos[30°], -T_{AB} Sin[30°]} + {0, −T_{AP}} = {0, 0}

Se sustituye el valor de T_{AP} y se establecen dos ecuaciones escalares a partir de la expresión vectorial anterior:

0.422618 R - 0.866025 T_{AB} = 0

0.906308 R - 0.5 T_{AB} - 550 = 0

Se multiplica la primera ecuación por 0.906308, la segunda por (-0.422618) y se suman miembro a miembro:

0.383022 R - 0.784885 T_{AB} = 0

-0.383022 R + 0.211309 T_{AB} + 232.4399 = 0 +

———————————————————————

-0.573576 T_{AB} + 232.4399 = 0

$0.573576\ T_{AB} = 232.4399$

$T_{AB} = \frac{232.4399}{0.573576}$

$T_{AB} = 405.2469$ N

La tensión en la cuerda de remolque AB es:

$T_{AB} = 405.2469$ N.

b) la magnitud de R

Se sustituye el resultado de la tensión T_{AB} en la primera ecuación escalar:

$0.422618\ \mathrm{R} - 0.866025\ T_{AB} = 0$

$0.422618\ \mathrm{R} - 0.866025\ (405.2469) = 0$

$0.422618\ \mathrm{R} = 350.9540$

$\mathrm{R} = \frac{350.9540}{0.422618}$

$\mathrm{R} = 830.4293$ N

La magnitud de la resultante es:

R = 830.4293 N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

a) la tensión en la cuerda de remolque AB

Representación vectorial de las fuerzas involucradas:

```
R = magR {Cos[65 °], Sin[65 °]}
          coseno     seno
TAB = magTAB {-Cos[30 °], -Sin[30 °]}
              coseno      seno
TPA = {0, -magTAP}
TAP = {0, magTAP}
W = {0, -550}
```

Ecuaciones de equilibrio:

```
ec1 = R + TAB + TPA == {0, 0}
ec2 = TAP + W == {0, 0}
resp1 = Solve[{ec1, ec2}] // N
        resuelve          va
magTABSol = magTAB /. resp1[[1]]
```

b) la magnitud de R

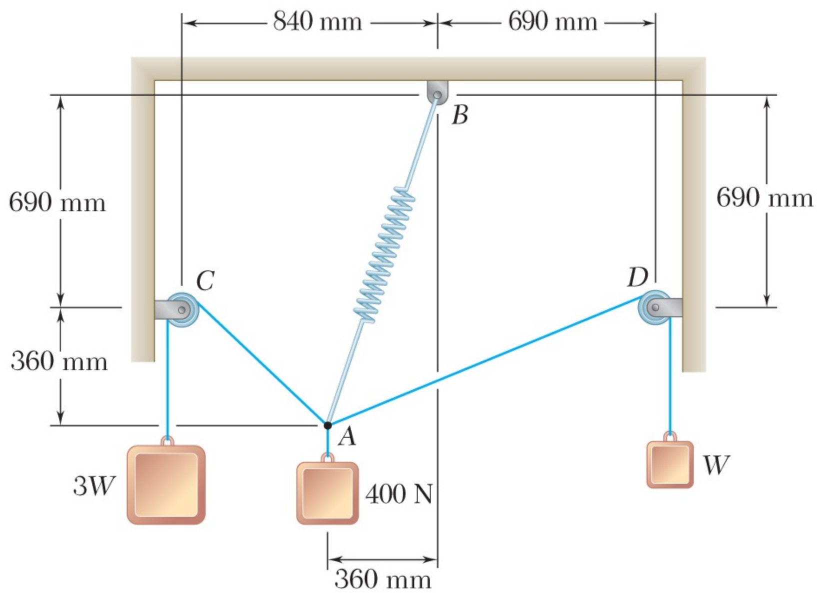
```
magRSol = magR /. resp1[[1]]
```

Ejercicio 2.2

Problema 2.57 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 43.

Una carga con peso de 400 N está suspendida de un resorte y dos cuerdas, las cuales se unen a dos bloques de pesos *3W* y *W* como se muestra en la figura. Si la constante del resorte es de 800 $\frac{N}{m}$, determine:

a) el valor de *W*, *b)* la longitud sin estirar del resorte.



a) el valor de W

Ante todo, se dibujan los diagramas de cuerpo libre del nodo A, en el que confluyen la fuerza del resorte AB y de las cuerdas AC, AD y la que lo une con el bloque de 400 N de peso, así como de los tres bloques. Los triángulos mostrados representan las pendientes del resorte AB y de las cuerdas AC y AD, en los que las medidas de sus catetos están en cm y a partir de las cuales pueden calcularse sus hipotenusas.

Para el triángulo de la tensión $\overline{T_{1A}}$:

$$h_1 = \sqrt{48^2 + 36^2}$$
$$h_1 = \sqrt{2304 + 1296}$$
$$h_1 = \sqrt{3600}$$
$$h_1 = 60$$

Con respecto al triángulo de la fuerza del resorte $\overline{F_k}$:

$$h_k = \sqrt{36^2 + 105^2}$$
$$h_k = \sqrt{1296 + 11\,025}$$
$$h_k = \sqrt{12\,321}$$
$$h_k = 111$$

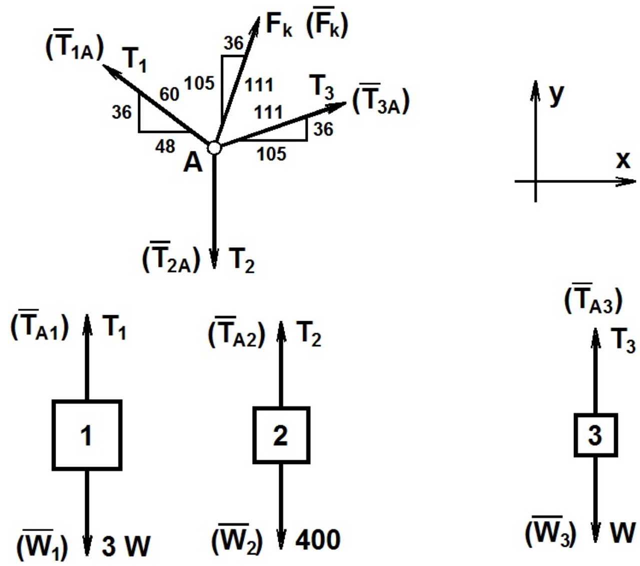
Y en el caso del triángulo de la tensión $\overline{T_{3A}}$:

$h_3 = \sqrt{105^2 + 36^2}$

$h_3 = \sqrt{11\,025 + 1296}$

$h_3 = \sqrt{12\,321}$

$h_3 = 111$



Luego, se obtiene la representación vectorial de las fuerzas que actúan tanto en el nodo A como en cada uno de los bloques. Conviene hacer notar que las magnitudes de las tensiones en las cuerdas AC, AD y la que une al bloque de 400 N de peso identificado con el número 2, son iguales, tanto en cada bloque como en el nodo, pero su representación vectorial es diferente, debido a que tienen orientaciones particulares.

Se encuentran los vectores unitarios de todas las fuerzas que no son paralelas a alguno de los ejes:

$\overline{e_{T_{1A}}} = \left\{-\frac{48}{60}, \frac{36}{60}\right\}$

$\overline{e_{F_k}} = \left\{\frac{36}{111}, \frac{105}{111}\right\}$

$\overline{e_{T_{3A}}} = \left\{\frac{105}{111}, \frac{36}{111}\right\}$

Entonces, la representación vectorial de todas las fuerzas involucradas son:

$\overline{T_{1A}} = T_1\, \overline{e_{T_{1A}}}$

$\overline{T_{1A}} = \left\{-\frac{48}{60}\, T_1, \frac{36}{60}\, T_1\right\}$

$\overline{F_k} = F_k\, \overline{e_{F_k}}$

$\overline{F_k} = \left\{\frac{36}{111}\, F_k, \frac{105}{111}\, F_k\right\}$

$\overline{T_{3A}} = T_3\, \overline{e_{T_{3A}}}$

$\overline{T_{3A}} = \left\{\frac{105}{111}\, T_3, \frac{36}{111}\, T_3\right\}$

$\overline{T_{2A}} = \{0, -T_2\}$

$\overline{T_{A1}} = \{0, T_1\}$

$\overline{W_1} = \{0, -3\text{ W}\}$

$\overline{T_{A2}} = \{0, T_2\}$

$\overline{W_2} = \{0, -400\}$

$\overline{T_{A3}} = \{0, T_3\}$

$\overline{W_3} = \{0, \text{-W}\}$

Posteriormente, se plantean y resuelven las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los tres bloques.

Bloque 1:

$\overline{T_{A1}} + \overline{W_1} = \{0, 0\}$

$\{0, T_1\} + \{0, -3\text{ W}\} = \{0, 0\}$

$T_1 - 3\text{ W} = 0$

$T_1 = 3\text{ W}$

Bloque 2:

$\overline{T_{A2}} + \overline{W_2} = \{0, 0\}$

$\{0, T_2\} + \{0, -400\} = \{0, 0\}$

$T_2 - 400 = 0$

$T_2 = 400\text{ N}$

Bloque 3:

$\overline{T_{A3}} + \overline{W_3} = \{0, 0\}$

$\{0, T_3\} + \{0, -\text{W}\} = \{0, 0\}$

$T_3 - \text{W} = 0$

$T_3 = \text{W}$

Nodo A:

$\overline{T_{1A}} + \overline{F_k} + \overline{T_{3A}} + \overline{T_{2A}} = \{0, 0\}$

$\left\{-\frac{48}{60}\ T_1, \frac{36}{60}\ T_1\right\} + \left\{\frac{36}{111}\ F_k, \frac{105}{111}\ F_k\right\} + \left\{\frac{105}{111}\ T_3, \frac{36}{111}\ T_3\right\} + \{0, -T_2\} = \{0, 0\}$

Se sustituyen los valores conocidos:

$\left\{-\frac{48}{60}\ (3\ W), \frac{36}{60}\ (3\ W)\right\} + \left\{\frac{36}{111}\ F_k, \frac{105}{111}\ F_k\right\} + \left\{\frac{105}{111}\ (\text{W}), \frac{36}{111}\ (W)\right\} + \{0, -400\} = \{0, 0\}$

A partir de la expresión anterior se pueden establecer dos ecuaciones escalares:

$-2.4\text{ W} + 0.3243\ F_k + 0.9459\text{ W} = 0$

$1.8\text{ W} + 0.9459\ F_k + 0.3243\text{ W} - 400 = 0$

Se simplifica la primera ecuación, de la que se despeja F_k:

$-1.4541\text{ W} + 0.3243\ F_k = 0$

$0.3243\ F_k = 1.4541\text{ W}$

$F_k = \frac{1.45414}{0.3243}\text{ W}$

$F_k = 4.4833\text{ W}$

Se sustituye el resultado obtenido en la segunda expresión:

$2.1243\text{ W} + 0.9459\ (4.4833\text{ W}) = 400$

$2.1243\text{ W} + 4.2410\text{ W} = 400$

$6.3653\text{ W} = 400$

$\text{W} = \frac{400}{6.3653}$

$\text{W} = 62.8406\text{ N}$

El valor de W es:

W = 62.8406 N.

b) la longitud sin estirar del resorte

Para determinar la longitud sin estirar del resorte, es necesario calcular primero el valor de F_k.
Se sustituye el valor de W obtenido en la expresión de F_k en función de W:

F_k = 4.4833 W

F_k = 4.4833 (65.8406)

F_k = 281.7352 N

Con base en la ley de Hooke, la fuerza que genera un resorte es proporcional a su elongación, que puede determinarse como la diferencia de la longitud que tiene en la configuración mostrada en la figura y la longitud sin estirar del mismo, es decir:

$F_k = k\,(L - L_0)$

donde k es la constante de proporcionalidad, conocida como constante de rigidez del resorte, L es la longitud del resorte en la configuración mencionada, y L_0 es su longitud sin estirar, también conocido como longitud libre del resorte.
La longitud del resorte en dicha configuración es la hipotenusa del triángulo geométrico de determina el vector unitario de la fuerza $\overline{F_k}$, el cual es:

$L = h_k$

L = 1.11 m

Luego de sustituir los valores conocidos, se obtiene:

$F_k = k\,(L - L_0)$

$281.7352 = 800\,(1.11 - L_0)$

$1.11 - L_0 = \frac{281.7352}{800}$

$L_0 = 1.11 - 0.3522$

L_0 = 0.7578 m

La longitud sin estirar del resorte es:

L_0 = 0.7578 m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

a) el valor de W

```
magW2 = 400;
k = 800;
```

Cálculo de las hipotenusas de los triángulos geométricos de las fuerzas oblicuas:

```
h1 = √(48² + 36²)
hk = √(36² + 105²)
h3 = √(105² + 36²)
```

Vectores unitarios de las fuerzas oblicuas:

$$eT1A = \left\{-\frac{48}{h1}, \frac{36}{h1}\right\}$$
$$eFk = \left\{\frac{36}{hk}, \frac{105}{hk}\right\}$$
$$eT3A = \left\{\frac{105}{h3}, \frac{36}{h3}\right\}$$

Representación vectorial de todas las fuerzas involucradas:

```
T1A = T1 eT1A
Fk = magFk eFk
T3A = T3 eT3A
T2A = {0, -T2}
TA1 = {0, T1}
W1 = {0, -3 W}
TA2 = {0, T2}
W2 = {0, -400}
TA3 = {0, T3}
W3 = {0, -W}
```

Bloque 1 :

```
ec1 = TA1 + W1 == {0, 0}
resp1 = Solve[ec1, T1]
        resuelve
T1Sol = T1 /. resp1[[1]]
```

Bloque 2:

```
ec2 = TA2 + W2 == {0, 0}
resp2 = Solve[ec2]
        resuelve
T2Sol = T2 /. resp2[[1]]
```

Bloque 13:

```
ec3 = TA3 + W3 == {0, 0}
resp3 = Solve[ec3, T3]
        resuelve
T3Sol = T3 /. resp3[[1]]
```

Nodo A:

```
ec4 = (T1A /. T1 → T1Sol) + Fk + (T3A /. T3 → T3Sol) + (T2A /. T2 → T2Sol) == {0, 0}
resp4 = Solve[ec4] // N
        resuelve    valor numérico
WSol = W /. resp4[[1]]
```

b) **la longitud sin estirar del resorte**

```
magFkSol = magFk /. resp4[[1]]
L = h3A
ec5 = magFkSol == k (L - L0)
resp5 = Solve[ec5]
        resuelve
L0Sol = L0 /. resp5[[1]]
```

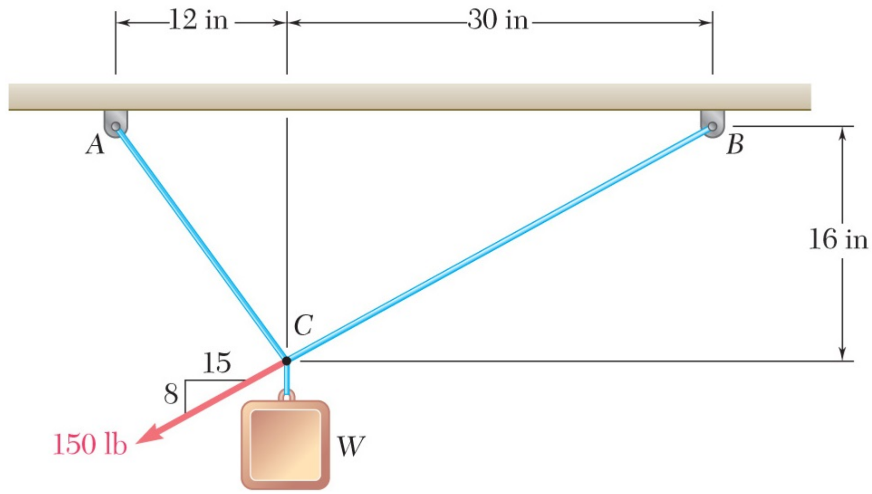
Ejercicio 2.3

Problema 2.55 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 43.

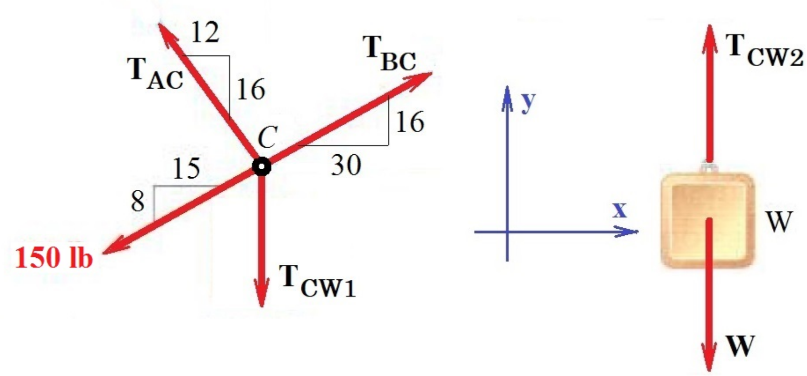
Dos cables se amarran juntos en *C* y son cargados como indica la figura. Si *W* = *190 lb*, determine la tensión en:

a) el cable *AC*;

b) el cable *BC*.



Para resolver el problema, se requiere dibujar el diagrama de cuerpo libre del punto de unión en C, así como del bloque de peso W:



La longitud de las hipotenusas de los triángulos que determinan las pendientes de las tensiones $\overline{T_{AB}}$, $\overline{T_{AC}}$ y la fuerza de 150 lb de magnitud es:

$$h_{AC} = \sqrt{12^2 + 16^2}$$
$$h_{AC} = \sqrt{144 + 256}$$
$$h_{AC} = \sqrt{400}$$
$$h_{AC} = 20$$
$$h_{BC} = \sqrt{30^2 + 16^2}$$
$$h_{BC} = \sqrt{900 + 256}$$

$h_{BC} = \sqrt{1156}$
$h_{BC} = 34$
$h_{150} = \sqrt{15^2 + 8^2}$
$h_{150} = \sqrt{225 + 64}$
$h_{150} = \sqrt{289}$
$h_{150} = 17$

De donde los vectores unitarios correspondientes son:

$\overline{e_{AB}} = \left\{-\frac{12}{20},\ \frac{16}{20}\right\}$
$\overline{e_{BC}} = \left\{\frac{30}{34},\ \frac{16}{34}\right\}$
$\overline{e_{150}} = \left\{-\frac{15}{17},\ -\frac{8}{17}\right\}$

La representación vectorial de las fuerzas que actúan tanto en el punto de unión C como en el bloque de peso E es:

$\overline{T_{AC}} = \text{magT}_{AC}\left\{-\frac{12}{20},\ \frac{16}{20}\right\}$
$\overline{T_{BC}} = \text{magT}_{BC}\left\{\frac{30}{34},\ \frac{16}{34}\right\}$
$\overline{T_{150}} = 150\left\{-\frac{15}{17},\ -\frac{8}{17}\right\}$
$\overline{T_{CW1}} = \text{magT}_{CW}\ \{0, -1\}$
$\overline{T_{CW2}} = \text{magT}_{CW}\ \{0, 1\}$
$\overline{W} = \{0, -\text{magW}\}$

Se establecen las ecuaciones de equilibrio, tanto del punto de unión C como del bloque:

$\overline{T_{AC}} + \overline{T_{BC}} + \overline{T_{150}} + \overline{T_{CW1}} = \{0, 0\}$
$\overline{T_{CW2}} + \overline{W} = \{0, 0\}$
$\left\{-\frac{12}{20}\ \text{magT}_{AC},\ \frac{16}{20}\ \text{magT}_{AC}\right\} + \left\{\text{magT}_{BC}\ \frac{30}{34},\ \text{magT}_{BC}\ \frac{16}{34}\right\} + \{-132.35, -70.59\} + \{0, -\text{magT}_{CW}\} = \{0, 0\}$
$\{0, \text{magT}_{CW}\} + \{0, -190\} = \{0, 0\}$

Para resolver estas ecuaciones vectoriales, se igualan la componentes en x del miembro izquierdo con las correspondientes del miembro derecho, asimismo, con las componentes en y:

$-\frac{12}{20}\ \text{magT}_{AC} + \frac{30}{34}\ \text{magT}_{BC} - 132.35 = 0$
$\frac{16}{20}\ \text{magT}_{AC} + \frac{16}{34}\ \text{magT}_{BC} - 70.59 - \text{magT}_{CW} = 0$
$\text{magT}_{CW} - 190 = 0$

De la tercera ecuación se obtiene:

$\text{magT}_{CW} = 190$ lb

Se sustituye el valor obtenido en la segunda ecuación:

$\frac{16}{20}\ \text{magT}_{AC} + \frac{16}{34}\ \text{magT}_{BC} - 70.59 - 190 = 0$

Se multiplica la primera expresión por 4 y se le suma miembro a miembro la última ecuación multiplicada por 3:

$-\frac{48}{20}\ \text{magT}_{AC} + \frac{120}{34}\ \text{magT}_{BC} - 529.41 = 0$
$\frac{48}{20}\ \text{magT}_{AC} + \frac{48}{34}\ \text{magT}_{BC} - 781.76 = 0 \qquad +$

$0 + \frac{168}{34}\ \text{magT}_{BC} - 1311.17 = 0$

$magT_{BC} = \frac{1311.17\,(34)}{168}$

$magT_{BC} = \frac{44\,579.78}{168}$

$magT_{BC} = 265.36$ lb

Luego de sustituir el resultado obtenido de $magT_{AC}$ en la primera ecuación, se obtiene:

$-\frac{12}{20}\ magT_{AC} + \frac{30}{34}\ 265.36 - 132.35 = 0$

$\frac{12}{20}\ magT_{AC} = \frac{7960.8}{34} - 132.35$

$\frac{12}{20}\ magT_{AB} = 234.14 - 132.35$

$magT_{AC} = \frac{101.79\,(20)}{12}$

$magT_{AC} = \frac{2035.82}{12}$

$magT_{AC} = 169.64$ lb

La magnitud de las tensiones en los cables AC y BC son:

$magT_{AC} = 169.64$ lb y $magT_{BC} = 265.36$ lb.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

```
magW = 190;
magF = 150;
AC = {-12, 16};
BC = {30, 16};
F = {-15, -8};
```

Cálculo de los vectores unitarios:

```
eAC = Normalize[AC]
      normaliza
eBC = Normalize[BC]
      normaliza
eF = Normalize[F]
     normaliza
```

Representación vectorial de las fuerzas:

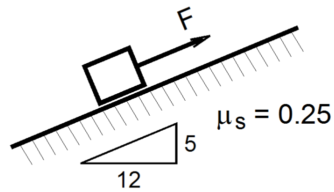
```
TAC = magTAC eAC
TBC = magTBC eBC
F = magF eF
TCW1 = {0, -magTCW}
TCW2 = {0, magTCW}
W = {0, -magW}
```

Ecuaciones de equilibrio:

```
ecEquilibrioC = TAC + TBC + F + TCW1 == {0, 0}
ecEquilibrioW = TCW2 + W == {0, 0}
resp1 = Solve[{ecEquilibrioC, ecEquilibrioW}] // N
        resuelve                                va
magTACSol = magTAC /. resp1⟦1⟧
magTBCSol = magTBC /. resp1⟦1⟧
```

Ejercicio 2.4

El bloque que se muestra en la figura tiene un peso de W = 26 N y se somete a la acción de una fuerza $\overline{F}$ constante aplicada hacia arriba.



Determine:

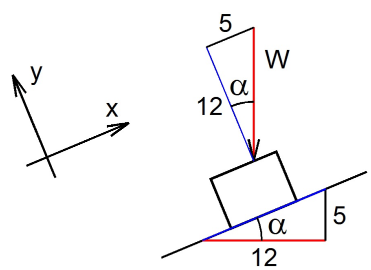
a) la magnitud de la fuerza $\overline{F}$ tal que el bloque esté a punto de descender;

b) la magnitud de la fuerza $\overline{F}$ para el cual el bloque está a punto de ascender.

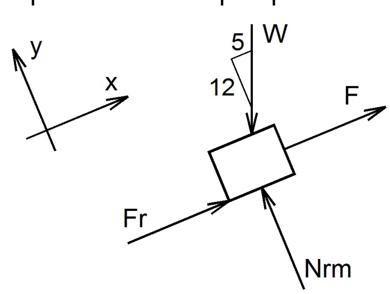
a) la magnitud de la fuerza $\overline{F}$ tal que el bloque esté a punto de descender

Si el bloque está a punto de descender, existe una fuerza que lo evitará y que es la fuerza de fricción y su sentido es para arriba a la derecha.

Dado que el plano inclinado es paralelo al eje x, una paralela al eje y es perpendicular a plano inclinado (líneas de color azul) y, por otra parte la horizontal es perpendicular al vector que representa al peso (líneas de color rojo). Por tanto, con base en el teorema de ángulo entre perpendiculares, se puede verificar que el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal es el mismo que forma el vector del peso con una paralela al eje y, con base en la siguiente figura:



Por consiguiente, el diagrama de cuerpo libre del bloque queda:



Con respecto al triángulo de la pendiente, su hipotenusa tiene un valor:

$$h = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$h = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$h = \sqrt{25 + 144}$$

$$h = \sqrt{169}$$

$$h = 13$$

Los vectores que representan las fuerzas son, entonces:

$\overline{F}$ = magF {1, 0}

$\overline{\text{Fr}}$ = magFr' {1, 0}

$\overline{\text{Nrm}}$ = magN {0, 1}

$\overline{W}$ = magW $\left\{-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\}$

Entonces, la ecuación de equilibrio del bloque queda:

$\overline{F} + \overline{\text{Fr}} + \overline{\text{Nrm}} + \overline{W} = \{0, 0\}$

magW = 26

Dado que el bloque está a punto de moverse, entonces la fuerza de fricción será la límite:

magFr' = μ_s magN

magFr' = 0.25 magN

$\{\text{magF}, 0\} + \{\text{magFr'}, 0\} + \{0, \text{magN}\} + \left\{-\frac{5}{13}\text{magW}, -\frac{12}{13}\text{magW}\right\} = \{0, 0\}$

$\{\text{magF}, 0\} + \{0.25\ \text{magN}, 0\} + \{0, \text{magN}\} + \left\{-\frac{5}{13}(26), -\frac{12}{13}(26)\right\} = \{0, 0\}$

Para resolver esta ecuación vectorial, se iguala la componente en x del miembro izquierdo con la correspondiente del miembro derecho, asimismo, con las componentes en y:

$\text{magF} + 0.25\ \text{magN} + 0 - \frac{5}{13}(26) = 0$

$0 + 0 + \text{magN} - \frac{12}{13}(26) = 0$

De la segunda ecuación se obtiene:

$\text{magN} = \frac{12}{13}(26)$

magN = 24 N

Se sustituye el valor obtenido en la primera ecuación:

$\text{magF} + 0.25\ (24) + 0 - \frac{5}{13}(26) = 0$

magF = -6 + 10

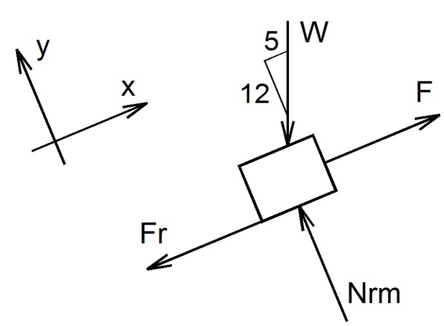
magF = 4 N

La magnitud de la fuerza F tal que el bloque esté a punto de descender es magF = 4 N.

b) la magnitud de la fuerza $\overline{F}$ para el cual el bloque está a punto de ascender

Si el bloque está a punto de ascender, existe una fuerza que lo evitará y que es la fuerza de fricción cuyo sentido es hacia abajo a la izquierda.

Diagrama de cuerpo libre:



Para este caso, lo único que cambia es el sentido de la fuerza de fricción.

$\overline{F}$ = magF{1, 0}

$\overline{\text{Fr}}$ = magFr'{-1, 0}

$\overline{\text{Nrm}}$ = magN{0, 1}

$\overline{W}$ = magW$\left\{-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\}$

$\overline{F} + \overline{\text{Fr}} + \overline{\text{Nrm}} + \overline{W}$ = {0, 0}

magW = 26

Dado que el bloque está a punto de moverse, entonces la fuerza de fricción será la límite:

magFr' = μ_s magN

magFr' = 0.25 magN

{magF, 0} + {-magFr', 0} + {0, magN} + $\left\{-\frac{5}{13}\text{magW}, -\frac{12}{13}\text{magW}\right\}$ = {0, 0}

{magF, 0} + {-0.25 magN, 0} + {0, magN} + $\left\{-\frac{5}{13}(26), -\frac{12}{13}(26)\right\}$ = {0, 0}

Para resolver esta ecuación vectorial, se iguala la componente en x del miembro izquierdo con la correspondiente del miembro derecho, asimismo, con las componentes en y:

magF - 0.25 magN + 0 $-\frac{5}{13}(26) = 0$

0 + 0 + magN $-\frac{12}{13}(26) = 0$

De la segunda ecuación se obtiene:

magN = $\frac{12}{13}(26)$

magN = 24 N

Se sustituye el valor obtenido en la primera ecuación:

magF - 0.25 (24) + 0 $-\frac{5}{13}(26) = 0$

magF = 6 + 10

magF = 16 N

La magnitud de la fuerza F para el cual el bloque está a punto de ascender es magF = 16 N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

a) la magnitud de la fuerza $\overline{F}$ tal que el bloque esté a punto de descender

Datos:

```
magW = 26;
μs = 0.25;
F = magF {1, 0}
Fr1 = magFrLim {1, 0}
Nrm = magN {0, 1}
W = magW {-5/13, -12/13}
```

```
magFrLim = μs magN
ecEquilibrio1 = F + Fr1 + Nrm + W == {0, 0}
resp1 = Solve[ecEquilibrio1]
        resuelve
magFSol = magF /. resp1⟦1⟧
magNSol = magN /. resp1⟦1⟧
```

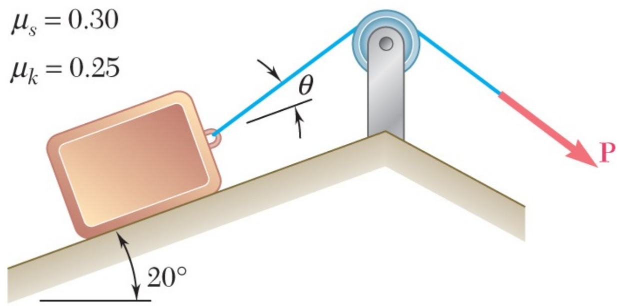
b) la magnitud de la fuerza $\overline{F}$ para el cual el bloque está a punto de ascender

```
Fr2 = magFrLim {-1, 0}
ecEquilibrio2 = F + Fr2 + Nrm + W == {0, 0}
resp2 = Solve[ecEquilibrio2]
        resuelve
magFSol = magF /. resp2⟦1⟧
magNSol = magN /. resp2⟦1⟧
```

Ejercicio 2.5

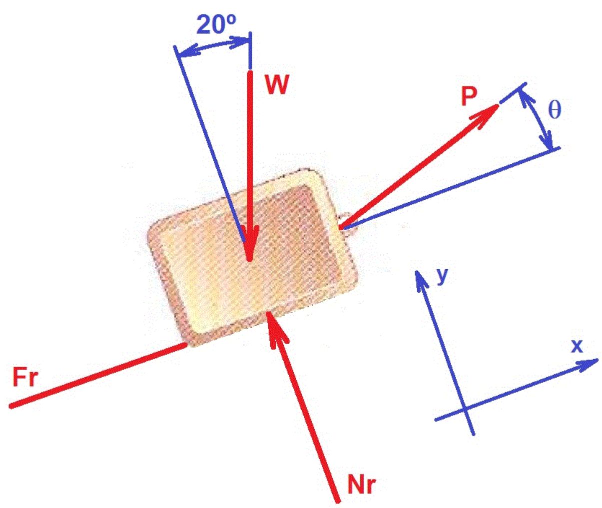
Problema 8.3 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 425.

Determine si el bloque de 10 kg mostrado en la figura está en equilibrio, y encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción cuando P = 40 N y θ = 20°.



En este tipo de problemas, cuando no es posible asegurar si el bloque se tiende a mover hacia abajo a la izquierda o hacia arriba a la derecha, se determina la resultante de todas las fuerzas, considerando que no existe la fuerza de fricción. Si dicha resultante es hacia arriba, implica que el bloque tenderá a moverse hacia arriba, por lo que el sentido de la fuerza de fricción es hacia abajo, y viceversa.

El diagrama de cuerpo libre del bloque queda como se muestra en la figura:



La representación vectorial de las fuerzas aplicadas al bloque es la siguiente:

$\overline{P}$ = magP {Cos [θ], Sin [θ]}

$\overline{\text{Nr}}$ = magN {0, 1}

$\overline{W}$ = magW {-Sin [20°], -Cos [20°]}

Entonces, la resultante queda:

$\overline{R} = \overline{P} + \overline{\text{Nr}} + \overline{W}$

$\overline{R}$ = magP {Cos [θ], Sin [θ]} + magN {0, 1} + magW {-Sin [20°], -Cos [20°]}

Sustituyendo los valores conocidos:

magP = 40 N

θ = 20°

m = 10 kg

magW = 10 (9.81)

magW = 98.1 N

las expresiones quedan:

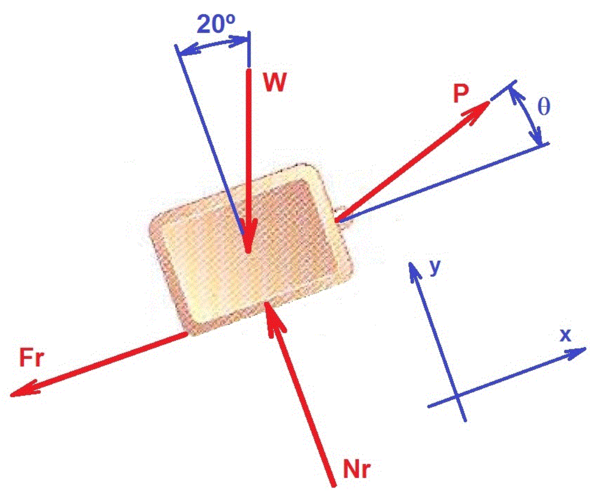
$\overline{R}$ = 40 {Cos [20°], Sin [20°]} + magN {0, 1} + 98.1 {-Sin [20°], -Cos [20°]}

$\overline{R}$ = 40 {0.939693, 0.342020} + {0, magN} + 98.1 {-0.342020, -0.939693}

$\overline{R}$ = {37.5877, 13.6808} + {0, magN} + {-33.5522, -92.1838}

$\overline{R}$ = {4.0355, magN - 78.503}

Dado que en x la resultante $\overline{R}$ tiene componente positiva, implica que el bloque tiende a moverse hacia arriba a la derecha. Entonces, el sentido de la fuerza de fricción es hacia abajo a la izquierda.
Por tanto, es posible dibujar el diagrama de cuerpo libre del bloque, incluyendo a la fuerza de fricción:



La representación vectorial de la fuerza de fricción es:

$\overline{\text{Fr}}$ = magFr {-1, 0}

Entonces, la ecuación de equilibrio del bloque queda como sigue:

$\overline{P}$ + $\overline{\text{Nr}}$ + $\overline{W}$ + $\overline{\text{Fr}}$ = {0, 0}

{37.5877, 13.6808} + {0, magN} + {-33.5522, -92.1838} + {-magFr, 0} = {0, 0}

De la expresión anterior, se puede obtener las siguientes expresiones escalares:

37.5877 - 33.5522 - magFr = 0

13.6808 + magN - 92.1838 = 0

por consiguiente:

magFr = 37.5877 - 33.5522

magFr = 4.0355 N

magN = 78.503 N

La fuerza de fricción límite, en este caso, es:

magFr' = μ_s magN

magFr' = 0.3 (78.503)

magFr' = 23.5509 N

Dado que la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque es menor que la fuerza de fricción límite, se puede asegurar que el bloque está en equilibrio.

La magnitud de la fuerza de fricción es:

magFr = 4.0355 N

con dirección del plano inclinado y sentido hacia abajo a la izquierda.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 10;
g = 9.81;
magP = 40;
θ = 20 °;
μs = 0.3;
```

Vectores representativos de las fuerzas:

```
Nr = magN {0, 1}
W = m g {-Sin[20 °], -Cos[20 °]}
         seno         coseno
P = magP {Cos[θ], Sin[θ]}
          coseno  seno
```

Se hace el análisis de la resultante considerando que no existe fricción:

```
R = Nr + W + P
```

Dado que la resultante tiene una componente en x positiva de R_x = 4.036 N, esta componente será equilibrada por la fuerza de fricción. Por otra parte, dado que dicha componente es positiva, eso quiere decir que de no existir la fricción el bloque tendería a subir, por consiguiente el sentido de la fuerza de fricción debe ser para abajo.

Representación vectorial de la fuerza de fricción:

```
Fr = magFr {-1, 0}
```

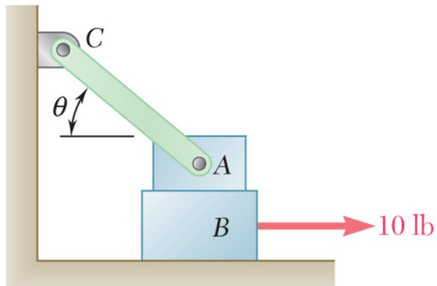
Ecuación de equilibrio:

```
ecEquilibrio = Fr + W + Nr + P == {0, 0}
resp1 = Solve[ecEquilibrio]
        resuelve
magFrSol = magFr /. resp1[[1]]
magNSol = magN /. resp1[[1]]
magFrlim = μs magNSol
```

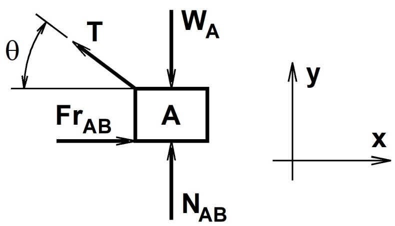
Ejercicio 2.6

Problema 8.13 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 426.

El bloque A de 16 lb está unido al eslabón AC y descansa sobre el bloque B de 24 lb. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.20, y sin tomar en cuenta el peso del eslabón, determine el valor de θ para el cual el movimiento del bloque B es inminente.



Dado que la fuerza de 10 lb tiende a mover al bloque B hacia la derecha, la fuerza de fricción de éste sobre el bloque A hace que este también tienda a moverse a la derecha, por lo que el eslabón AC jalará a A hacia la izquierda. Por tanto, se puede dibujar el siguiente diagrama de cuerpo libre del bloque A:



La representación vectorial de las fuerzas involucradas son:

$\overline{\mathrm{Fr}_{BA}} = \{\mathrm{magFr}_{BA}, 0\}$

$\overline{N_{BA}} = \{0, \mathrm{magN}_{BA}\}$

$\overline{W_A} = \{0, -\mathrm{magW}_A\}$

$\overline{T} = \{-\mathrm{magT\ Cos}[\theta], \mathrm{magT\ Sin}[\theta]\}$

La ecuación de equilibrio del bloque A es:

$\overline{\mathrm{Fr}_{BA}} + \overline{N_{BA}} + \overline{W_A} + \overline{T} = \{0, 0\}$

$\{\mathrm{magFr}_{BA}, 0\} + \{0, \mathrm{magN}_{BA}\} + \{0, -\mathrm{magW}_A\} + \{-\mathrm{magT\ Cos}[\theta], \mathrm{magT\ Sin}[\theta]\} = \{0, 0\}$

De la ecuación vectorial anterior pueden obtenerse las siguientes ecuaciones escalares:

$\mathrm{magFr}_{BA} - \mathrm{magT\ Cos}[\theta] = 0$

$\mathrm{magN}_{BA} - \mathrm{magW}_A + \mathrm{magT\ Sin}[\theta] = 0$

Sustituyendo los valores conocidos:

$\mathrm{magW}_A = 16$

$\mu_s = 0.2$

$\mathrm{magFr}_{BA} = \mu_s\ \mathrm{magN}_{BA}$

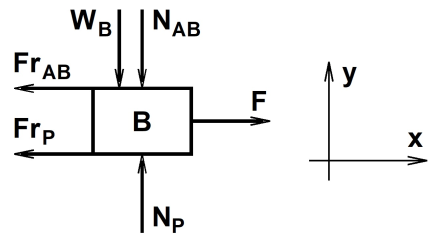
$\mathrm{magFr}_{BA} = 0.2\ \mathrm{magN}_{BA}$

Las ecuaciones anteriores quedan:

$0.2\ \text{magN}_{BA} - \text{magT Cos}[\theta] = 0$

$\text{magN}_{BA} - 16 + \text{magT Sin}[\theta] = 0$

Diagrama de cuerpo libre del bloque B:



La representación vectorial de las fuerzas involucradas son:

$\overline{F} = \{\text{magF}, 0\}$

$\overline{\text{Fr}_{AB}} = \{-\mu_s\ \text{magN}_{AB}, 0\}$

$\overline{\text{Fr}_P} = \{-\mu_s\ \text{magN}_P, 0\}$

$\overline{W_B} = \{0, -\text{magW}_B\}$

$\overline{N_{AB}} = \{0, -\text{magN}_{AB}\}$

$\overline{N_P} = \{0, \text{magN}_P\}$

Los parámetros conocidos, en este caso, son:

$\text{magF} = 10$

$\mu_s = 0.2$

$\text{magW}_B = 24$

De donde se puede establecer la siguiente ecuación de equilibrio para el bloque B:

$\overline{F} + \overline{\text{Fr}_{AB}} + \overline{\text{Fr}_P} + \overline{W_B} + \overline{N_{AB}} + \overline{N_P} = \{0, 0\}$

$\{10, 0\} + \{-0.2\ \text{magN}_{AB}, 0\} + \{-0.2\ \text{magN}_P, 0\} + \{0, -24\} + \{0, -\text{magN}_{AB}\} + \{0, \text{magN}_P\} = \{0, 0\}$

De la ecuación vectorial anterior se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$10 - 0.2\ \text{magN}_{AB} - 0.2\ \text{magN}_P = 0$

$-24 - \text{magN}_{AB} + \text{magN}_P = 0$

Se multiplica la segunda ecuación por 0.2 y se le suma miembro a miembro la primera ecuación:

$(0.2)\ (-24) - 0.2\ \text{magN}_{AB} + 0.2\ \text{magN}_P = 0$

$10 - 0.2\ \text{magN}_{AB} - 0.2\ \text{magN}_P = 0 \qquad +$

$-4.8 + 10 - 0.4\ \text{magN}_{AB} + 0 = 0$

$0.4\ \text{magN}_{AB} = 5.2$

$\text{magN}_{AB} = \frac{5.2}{0.4}$

$\text{magN}_{AB} = 13\ \text{lb}$

Para encontrar el valor de magN_P, se sustituye el resultado anterior en la segunda expresión:

$10 - 0.2\ (13) - 0.2\ \text{magN}_P = 0$

$0.2\ \text{magN}_P = 10 - 2.6$

$\text{magN}_P = \frac{7.4}{0.2}$

$\text{magN}_P = 37\ \text{lb}$

Se puede establecer la siguiente igualdad, con base en la tercera ley de Newton, de la acción y la reacción:

$magN_{BA} = magN_{AB}$

Para obtener el ángulo θ, se sustituye el valor de $magN_{AB}$ en la ecuaciones escalares obtenidas del cuerpo A:

$0.2\ magN_{BA} - magT\ Cos[\theta] = 0$

$magN_{BA} - 16 + magT\ Sin[\theta] = 0$

$0.2\ (13) - magT\ Cos[\theta] = 0$

$13 - 16 + magT\ Sin[\theta] = 0$

De la primera expresión se despeja Cos [θ] y de la segunda Sin [θ]:

$magT\ Cos[\theta] = 2.6 \qquad (1)$

$magT\ Sin[\theta] = 3 \qquad (2)$

Se divide miembro a miembro la ecuación 2 y la 1:

$\frac{magT\ Sin[\theta]}{magT\ Cos[\theta]} = \frac{3}{2.6}$

$Tan[\theta] = 1.153846$

$\theta = ArcTan[1.153846]$

$\theta = 49.085617°$

El ángulo el eslabón para el cual el movimiento del bloque B es inminente es :

$\theta = 49.09°$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magWA = 16;
magWB = 24;
μs = 0.2;
magF = 10;
```

Representación vectorial de las fuerzas $\overline{T}$, $\overline{W_A}$, $\overline{N_{BA}}$ y $\overline{Fr_{BA}}$:

```
T = {-magT Cos[θ], magT Sin[θ]}
          coseno         seno
WA = {0, -magWA}
NBA = {0, magNAB}
FrBA = {magFrAB, 0}
magFrAB = μs magNAB
```

La ecuación de equilibrio del bloque A es:

```
ecuacionEquilibrioA = T + WA + NBA + FrBA == {0, 0}
```

Los vectores $\overline{W_B}$, $\overline{N_{AB}}$, $\overline{\mathrm{Fr}_{AB}}$, $\overline{N_P}$, $\overline{\mathrm{Fr}_P}$ y $\overline{F}$ son, respectivamente:

```
WB = {0, -magWB}
NAB = {0, -magNAB}
FrAB = {-magFrAB, 0}
NP = {0, magNP}
FrP = {-magFrP, 0}
F = {magF, 0}
magFrP = μs magNP
```

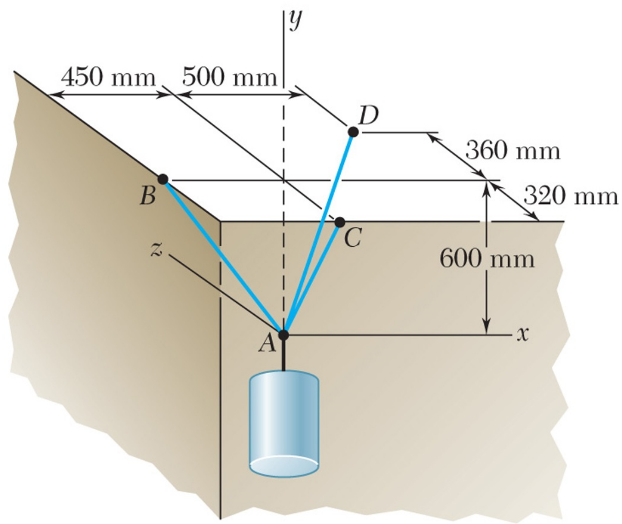
La ecuación de equilibrio del bloque B es:

```
ecuacionEquilibrioB = WB + NAB + FrAB + NP + FrP + F == {0, 0}
resp1 = Solve[ecuacionEquilibrioB]
          resuelve
magNABSol = magNAB /. resp1[[1]]
resp2 = FindRoot[ecuacionEquilibrioA /. magNAB → magNABSol, {{θ, 1}, {magT, 1}}]
          encuentra raíz
θSol = θ /. resp2
θSolDeg = θSol / Degree
                  grado
```

Ejercicio 2.7

Problema 2.101 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^{a} edición, McGraw-Hill, p. 60.

Un contenedor se sostiene por medio de tres cables que están unidos al techo como se muestra en la figura. Determine el peso W del contenedor si la tensión en el cable AB es de 6 kN.



Para la resolución de este problema, primero se dibujan los diagramas de cuerpo libre del punto de unión A así como del contenedor:

Diagrama de cuerpo libre del punto de unión A:

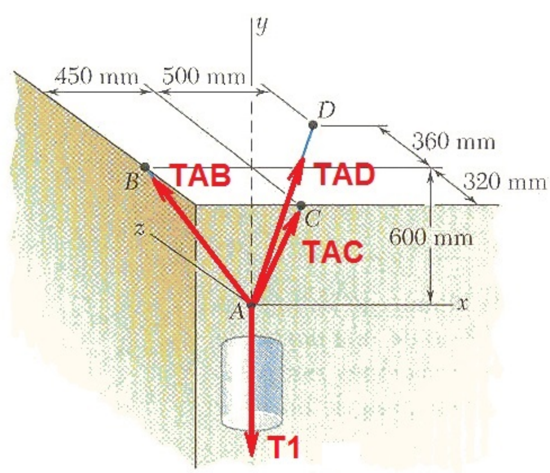
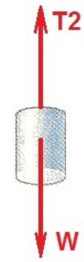


Diagrama de cuerpo libre del contenedor:



Luego, se obtienen los vectores de posición de los puntos A, B, C y D, con objeto de establecer la representación vectorial de las tensiones $\overline{T_{AB}}$, $\overline{T_{AC}}$ y $\overline{T_{AD}}$:

$\overline{r_A} = \{0, 0, 0\}$

$\overline{r_B} = \{-0.45, 0.6, 0\}$

$\overline{r_C} = \{0, 0.6, -0.32\}$

$\overline{r_D} = \{0.5, 0.6, 0.36\}$

Enseguida, se obtienen los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, considerando que $\overline{r_A}$ es el vector nulo:

$\overline{AB} = \overline{r_B}$

$\overline{AB} = \{-0.45, 0.6, 0\}$

$\overline{AC} = \overline{r_C}$

$\overline{AC} = \{0, 0.6, -0.32\}$

$\overline{AD} = \overline{r_D}$

$\overline{AD} = \{0.5, 0.6, 0.36\}$

Posteriormente sus vectores unitarios:

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-0.45)^2 + 0.6^2}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{0.2025 + 0.36}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{0.5625}$

$|\overline{AB}| = 0.75$

$\overline{e_{AB}} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$

$\overline{e_{AB}} = \frac{1}{0.75}\{-0.45, 0.6, 0\}$

$\overline{e_{AB}} = \{-\frac{0.45}{0.75}, \frac{0.6}{0.75}, 0\}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{0.6^2 + (-0.32)^2}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{0.36 + 0.1024}$

$|\overline{AC}| = \sqrt{0.4624}$

$|\overline{AC}| = 0.68$

$\overline{e_{AC}} = \frac{\overline{AC}}{|\overline{AC}|}$

$\overline{e_{AC}} = \frac{1}{0.68}\{0, 0.6, -0.32\}$

$\overline{e_{AC}} = \{0, \frac{0.6}{0.68}, -\frac{0.32}{0.68}\}$

$|\overline{AD}| = \sqrt{0.5^2 + 0.6^2 + 0.36^2}$

$|\overline{AD}| = \sqrt{0.25 + 0.36 + 0.1296}$

$|\overline{AD}| = \sqrt{0.7396}$

$|\overline{AD}| = 0.86$

$\overline{e_{AD}} = \frac{\overline{AD}}{|\ \overline{AD}\ |}$

$\overline{e_{AD}} = \frac{1}{0.86}$ {0.5, 0.6, 0.36}

$\overline{e_{AD}} = \left\{\frac{0.5}{0.86}, \frac{0.6}{0.86}, \frac{0.36}{0.86}\right\}$

Luego, se obtienen las expresiones vectoriales de las tensiones de los cables, primero del cable $\overline{AB}$, $\overline{T_{AB}}$:

$\overline{T_{AB}} = \text{magT}_{AB}\ \overline{e_{AB}}$

$\overline{T_{AB}} = \text{magT}_{AB} \left\{-\frac{0.45}{0.75}, \frac{0.6}{0.75}, 0\right\}$

dado que:

$\text{magT}_{AB} = 6000$

$\overline{T_{AB}} = 6000 \left\{-\frac{0.45}{0.75}, \frac{0.6}{0.75}, 0\right\}$

$\overline{T_{AB}}$ = {-3600, 4800, 0} N

Y las otras dos tensiones son:

$\overline{T_{AC}} = \text{magT}_{AC}\ \overline{e_{AC}}$

$\overline{T_{AC}} = \text{magT}_{AC} \left\{0, \frac{0.6}{0.68}, -\frac{0.32}{0.68}\right\}$

$\overline{T_{AD}} = \text{magT}_{AD}\ \overline{e_{AD}}$

$\overline{T_{AD}} = \text{magT}_{AD} \left\{\frac{0.5}{0.86}, \frac{0.6}{0.86}, \frac{0.36}{0.86}\right\}$

De la tensión $\overline{T_1}$:

$\overline{T_1}$ = magT {0, -1, 0}

Y de la tensión $\overline{T_2}$ así como el peso del contenedor $\overline{W}$:

$\overline{T_2}$ = magT {0, 1, 0}

$\overline{W}$ = magW {0, -1, 0}

Entonces las ecuaciones de equilibrio, tanto del punto de unión A como del contenedor, quedan:

$\overline{T_{AB}} + \overline{T_{AC}} + \overline{T_{AD}} + \overline{T_1} = \overline{0}$

$\overline{T_2} + \overline{W} = \overline{0}$

es decir:

$\{-3600, 4800, 0\} + \left\{0, \frac{0.6}{0.68}\ \text{magT}_{AC}, -\frac{0.32}{0.68}\ \text{magT}_{AC}\right\} + \left\{\frac{0.5}{0.86}\ \text{magT}_{AD}, \frac{0.6}{0.86}\ \text{magT}_{AD}, \frac{0.36}{0.86}\ \text{magT}_{AD}\right\} +$
$+ \{0, -\text{magT}, 0\} = \{0, 0, 0\}$

{0, magT, 0} + {0, -magW, 0} = 0

De ambas ecuaciones de equilibrio se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$-3600 + \frac{0.5}{0.86}\ \text{magT}_{AD} = 0$

$4800 + \frac{0.6}{0.68}\ \text{magT}_{AC} + \frac{0.6}{0.86}\ \text{magT}_{AD} - \text{magT} = 0$

$-\frac{0.32}{0.68}\ \text{magT}_{AC} + \frac{0.36}{0.86}\ \text{magT}_{AD} = 0$

magT - magW = 0

De la primera ecuación se puede obtener magT_{AD}:

$\frac{0.5}{0.86}\ \text{magT}_{AD} = 3600$

$\text{magT}_{AD} = \frac{3600\,(0.86)}{0.5}$

$\text{magT}_{AD} = \frac{3096}{0.5}$

magT_{AD} = 6192 N

Se sustituye el resultado anterior en la tercera expresión:

$$-\frac{0.32}{0.68}\ \text{magT}_{AC} + \frac{0.36}{0.86}\ (6192) = 0$$

$$\frac{0.32}{0.68}\ \text{magT}_{AC} = \frac{2229.12}{0.86}$$

$$\text{magT}_{AC} = \frac{2592\,(0.68)}{0.32}$$

$$\text{magT}_{AC} = \frac{1762.56}{0.32}$$

$$\text{magT}_{AC} = 5508\ \text{N}$$

Luego, se sustituyen en la segunda ecuación los valores de magT_{AC} y magT_{AD}:

$$4800 + \frac{0.6}{0.68}\ (5508) + \frac{0.6}{0.86}\ (6192) - \text{magT} = 0$$

$$\text{magT} = 4800 + \frac{3304.8}{0.68} + \frac{3715.2}{0.86}$$

$$\text{magT} = 4800 + 4860 + 4320$$

$$\text{magT} = 13980\ \text{N}$$

Por consiguiente, de la cuarta ecuación:

$$13980 - \text{magW} = 0$$

$$\text{magW} = 13980\ \text{N}$$

El peso del contenedor es magW = 13,980 N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magTAB = 6 × 10^3;
rA = {0, 0, 0};
rB = {-0.45, 0.6, 0};
rC = {0, 0.6, -0.32};
rD = {0.5, 0.6, 0.36};
```

Valores de los vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente:

```
AB = rB - rA
AC = rC - rA
AD = rD - rA
```

Vectores unitarios correspondientes a $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$:

```
eAB = Normalize[AB]
      normaliza
eAC = Normalize[AC]
      normaliza
eAD = Normalize[AD]
      normaliza
```

Representación vectorial de las fuerzas $\overline{T_{AB}}$, $\overline{T_{AC}}$, $\overline{T_{AD}}$, $\overline{T_1}$, $\overline{T_2}$ y $\overline{W}$:

```
TAB = magTAB eAB
TAC = magTAC eAC
TAD = magTAD eAD
T1 = magT {0, -1, 0}
T2 = magT {0, 1, 0}
W = magW {0, -1, 0}
```

Ecuación de equilibrio del nodo A:

```
ecEquilibrio1 = TAB + TAC + TAD + T1 == {0, 0, 0}
```

Ecuación de equilibrio del contenedor:

```
ecEquilibrio2 = T2 + W == {0, 0, 0}
resp1 = Solve[{ecEquilibrio1, ecEquilibrio2}]
        resuelve
magWSol = magW /. resp1[[1]]
```

Resolución empleando conceptos de matriz de transformación y vector de coordenadas de álgebra lineal

Se considera que la base A es el conjunto de vectores unitarios que corresponden a los tres cables del problema, y la base B es la canónica, formada por los vectores $\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$ y k.

La ecuación que se pretende resolver es:

$$\text{MatrizTransf}_{\text{AB}}\,\text{VectCoord}_A = \text{VectCoord}_B$$

en la cual la matriz de transformación de la base A a la base B está integrada por los vectores unitarios de la base A por columnas, es decir:

$$\text{MatrizTransf}_{\text{AB}} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0 & 0.5874 \\ 0.8 & 0.8824 & 0.6977 \\ 0 & -0.4706 & 0.4186 \end{pmatrix}$$

El vector de coordenadas en la base A es aquel compuesto por las magnitudes de las tensiones en cada uno de los cables:

$$\text{VectCoord}_A = \begin{pmatrix} 6000 \\ \text{magT}_{\text{AC}} \\ \text{magT}_{\text{AD}} \end{pmatrix}$$

Y el vector de coordenadas en la base B es el que representa la fuerza equilibrante del peso, por lo que está formado por el vector W con signo contrario:

$$\text{VectCoord}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{magW} \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la ecuación matricial anterior se puede calcular el vector de coordenadas en la base A, premultiplicando ambos miembros por la inversa de la matriz de transformación:

$\text{VectCoord}_A = \text{MatrizTransf}_{\text{AB}}{}^{-1}\ \text{VectCoord}_B$

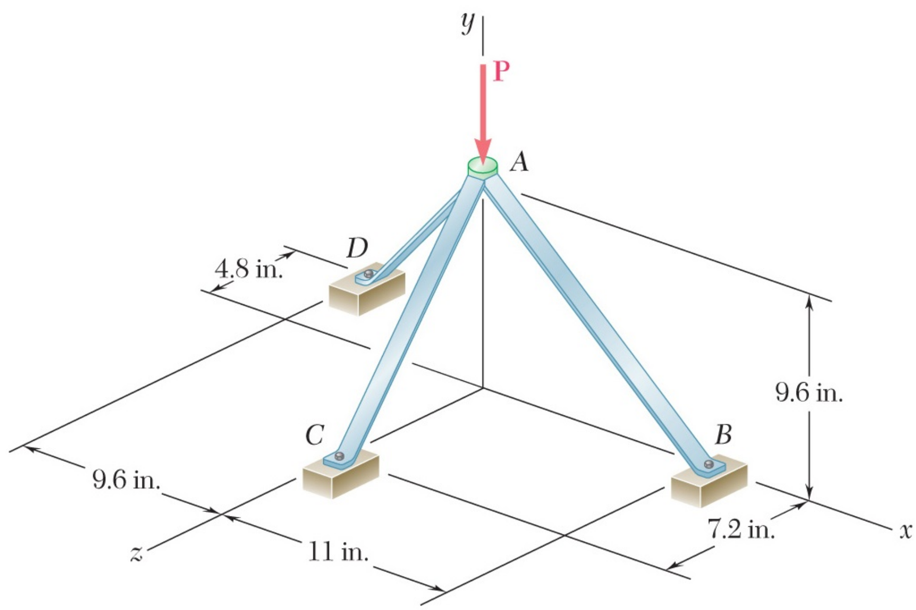
a partir de cuya resolución se pueden obtener los valores solicitados.

```
MatrizTransfAB = Transpose[{eAB, eAC, eAD}]
                 transposición
VectCoordA = {magTAB, magTAC, magTAD}
VectCoordB = {0, magW, 0}
ecMatricial = VectCoordA == Inverse[MatrizTransfAB].VectCoordB
                            matriz inversa
resp2 = Solve[ecMatricial]
        resuelve
```

Ejercicio 2.8

Problema 2.105 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 60.

El montaje de apoyo que se muestra en la figura está atornillado al sitio en B, C y D y soporta en A una fuerza P dirigida hacia abajo. Si las fuerzas presentes en los elementos AB, AC y AD están dirigidas a lo largo de los elementos respectivos, y la fuerza en el elemento AB es de 29.2 lb, determine la magnitud de P.



Datos:

$\overline{r_A} = \{0, 9.6, 0\}$

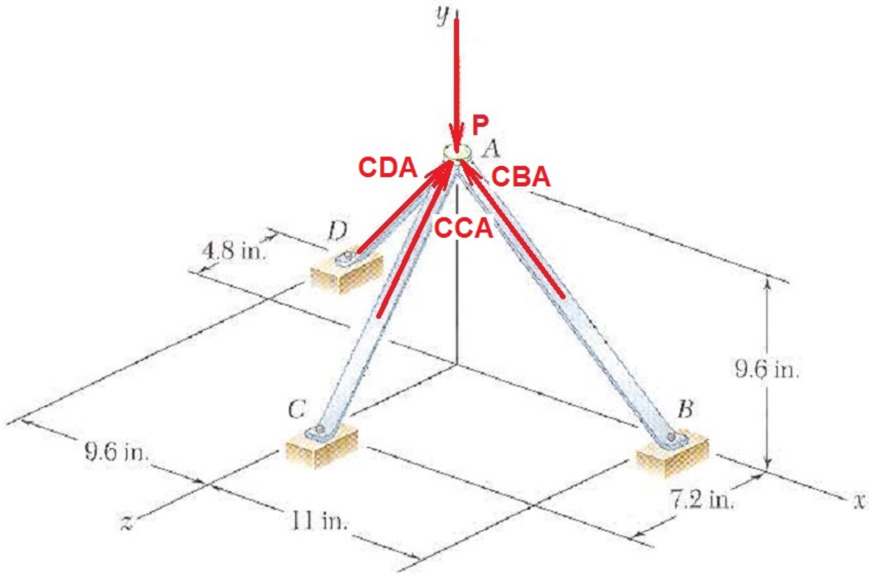
$\overline{r_B} = \{11, 0, 0\}$

$\overline{r_C} = \{0, 0, 7.2\}$

$\overline{r_D} = \{-9.6, 0, -4.8\}$

$magF_{AB} = 29.2$

Diagrama de cuerpo libre del montaje de apoyo:



Se obtienen los vectores que contienen a los que representan las fuerzas, $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ y $\overline{DA}$:

$\overline{BA} = \overline{r_A} - \overline{r_B}$

$\overline{BA} = \{0, 9.6, 0\} - \{11, 0, 0\}$

$\overline{BA} = \{-11, 9.6, 0\}$

$\overline{CA} = \overline{r_A} - \overline{r_C}$

$\overline{CA} = \{0, 9.6, 0\} - \{0, 0, 7.2\}$

$\overline{CA} = \{0, 9.6, -7.2\}$

$\overline{DA} = \overline{r_A} - \overline{r_D}$

$\overline{DA} = \{0, 9.6, 0\} - \{-9.6, 0, -4.8\}$

$\overline{DA} = \{9.6, 9.6, 4.8\}$

Obtención de los módulos de los vectores anteriores:

$|\overline{BA}| = \sqrt{(-11)^2 + 9.6^2}$

$|\overline{BA}| = \sqrt{121 + 92.16}$

$|\overline{BA}| = \sqrt{213.16}$

$|\overline{BA}| = 14.6$

$|\overline{CA}| = \sqrt{9.6^2 + (-7.2)^2}$

$|\overline{CA}| = \sqrt{92.16 + 51.84}$

$|\overline{CA}| = \sqrt{144}$

$|\overline{CA}| = 12$

$|\overline{DA}| = \sqrt{9.6^2 + 9.6^2 + 4.8^2}$

$|\overline{DA}| = \sqrt{92.16 + 92.16 + 23.04}$

$|\overline{DA}| = \sqrt{207.36}$

$|\overline{DA}| = 14.4$

Vectores unitarios de las fuerzas $\overline{F_{BA}}$, $\overline{F_{CA}}$ y $\overline{F_{DA}}$ son:

$\overline{e_{F_{BA}}} = \frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|}$

$\overline{e_{F_{BA}}} = \{-\frac{11}{14.6}, \frac{9.6}{14.6}, 0\}$

$\overline{e_{F_{CA}}} = \frac{\overline{CA}}{|\overline{CA}|}$

$\overline{e_{F_{CA}}} = \{0, \frac{9.6}{12}, -\frac{7.2}{12}\}$

$\overline{e_{F_{DA}}} = \frac{\overline{DA}}{|\overline{DA}|}$

$\overline{e_{F_{DA}}} = \{\frac{9.6}{14.4}, \frac{9.6}{14.4}, \frac{4.8}{14.4}\}$

Vector unitario de la fuerza P:

$\overline{e_P} = \{0, -1, 0\}$

Ecuación de equilibrio:

$\overline{F_{BA}} + \overline{F_{CA}} + \overline{F_{DA}} + \overline{P} = \overline{0}$

$\text{mag}F_{BA}\, \overline{e_{F_{BA}}} + \text{mag}F_{CA}\, \overline{e_{FCA}} + \text{mag}F_{DA}\, \overline{e_{F_{DA}}} + \text{magP}\, \overline{e_P} = \{0, 0, 0\}$

$29.2 \{-\frac{11}{14.6}, \frac{9.6}{14.6}, 0\} + \text{mag}F_{CA} \{0, \frac{9.6}{12}, -\frac{7.2}{12}\} + \text{mag}F_{DA} \{\frac{9.6}{14.4}, \frac{9.6}{14.4}, \frac{4.8}{14.4}\} + \text{magP} \{0, -1, 0\} = \{0, 0, 0\}$

$\{22, 19.2, 0\} + \{0, \frac{4}{5}\text{mag}F_{CA}, -\frac{3}{5}\text{mag}F_{CA}\} + \{\frac{2}{3}\text{mag}F_{DA}, \frac{2}{3}\text{mag}F_{DA}, \frac{1}{3}\text{mag}F_{DA}\} + \{0, -\text{magP}, 0\} = \{0, 0, 0\}$

$\{-22 + 0 + \frac{2}{3}\ \text{mag}F_{DA}, 19.2 + \frac{4}{5}\ \text{mag}F_{CA} + \frac{2}{3}\ \text{mag}F_{DA} - \text{magP}, 0 - \frac{3}{5}\ \text{mag}F_{CA} + \frac{1}{3}\ \text{mag}F_{DA}\} = \{0, 0, 0\}$

La ecuación vectorial de equilibrio puede visualizarse como el siguiente sistema de ecuaciones:

$-22 + 0 + \frac{2}{3}\ \text{mag}F_{DA} = 0$

$19.2 + \frac{4}{5}\ \text{mag}F_{CA} + \frac{2}{3}\ \text{mag}F_{DA} - \text{magP} = 0$

$0 - \frac{3}{5}\ \text{mag}F_{CA} + \frac{1}{3}\ \text{mag}F_{DA} = 0$

Para simplificar la resolución, de la primera expresión se despeja magF_{DA}:

$\frac{2}{3}\ \text{mag}F_{DA} = 22$

$\text{mag}F_{DA} = \frac{3}{2}\ (22)$

$\text{mag}F_{DA} = 33\ \text{lb}$

En seguida, se sustituye el resultado anterior en la tercera ecuación:

$0 - \frac{3}{5}\ \text{mag}F_{CA} + \frac{1}{3}\ (33) = 0$

$\frac{3}{5}\ \text{mag}F_{CA} = 11$

$\text{mag}F_{CA} = \frac{5}{3}\ (11)$

$\text{mag}F_{CA} = \frac{55}{3}$

$\text{mag}F_{CA} = 18.3333\ \text{lb}$

Y se sustituyen los valores de magF_{DA} y magF_{CA} en la segunda expresión, para obtener la magP:

$19.2 + \frac{4}{5}\ (18.3333) + \frac{2}{3}\ (33) - \text{magP} = 0$

$\text{magP} = 19.2 + 14.6667 + 22$

$\text{magP} = 55.8667\ \text{lb}$

Si la magnitud de la fuerza AB es de 29.2 lb, la magnitud de P es:

magP = 55.8667 lb.

Resolución del problema funciones de Mathematica

```
rA = {0, 9.6, 0};
rB = {11, 0, 0};
rC = {0, 0, 7.2};
rD = {-9.6, 0, -4.8};
magFBA = 29.2;
```

```
BA = rA - rB
CA = rA - rC
DA = rA - rD
eFBA = Normalize[BA]
       normaliza
eFCA = Normalize[CA]
       normaliza
eFDA = Normalize[DA]
       normaliza
eP = {0, -1, 0}
FBA = magFBA eFBA
FCA = magFCA eFCA
FDA = magFDA eFDA
P = magP eP
```

```
ecEquilibrio = FBA + FCA + FDA + P == {0, 0, 0}
resp1 = Solve[ecEquilibrio]
        resuelve
magPSol1 = magP /. resp1[[1]]
magFCASol1 = magFCA /. resp1[[1]]
magFDASol1 = magFDA /. resp1[[1]]
```

Resolución con producto mixto

Nota de los autores
El siguiente procedimiento está basado en la siguiente propiedad del producto mixto de vectores: si dos de los vectores operados son iguales, el resultado es cero.
Conviene que los interesados en este método estén familiarizados con el manejo de conceptos del álgebra lineal, con objeto de que no se confundan en su revisión.
Para eliminar una de las incógnitas, en este caso magF_{CA}, se postmultiplica toda la expresión anterior vectorialmente por el vector $\overline{CA}$, debido a que $\overline{CA}\times\overline{CA} = \{0, 0, 0\}$, y para eliminar otra de las incógnitas, para este problema conviene que sea F_{DA}, se premultiplica escalarmente por el vector $\overline{DA}$, de manera que el producto mixto $\overline{DA}\cdot(\overline{DA}\times\overline{CA}) = 0$ debido a que dos de los renglones que se forman en el determinante para calcular el resultado de dicho producto mixto son iguales.

```
magBA = Norm[BA]
        norma
magCA = Norm[CA]
        norma
magDA = Norm[DA]
        norma
```

$$\text{ec2} = \text{DA}.\left(\frac{\text{magFBA}}{\text{magBA}}\ \text{BA}\times\text{CA}\right) + \text{DA}.\left(\frac{\text{magFCA}}{\text{magCA}}\ \text{CA}\times\text{CA}\right) + \text{DA}.\left(\frac{\text{magFDA}}{\text{magDA}}\ \text{DA}\times\text{CA}\right) + \text{DA}.(\text{magP eP}\times\text{CA}) == \text{DA}.(\{0, 0, 0\}\times\text{CA})$$

```
resp2 = Solve[ec2]
        resuelve
magPSol2 = magP /. resp2[[1]]
```

Dado que el segundo término de magPSol es despreciable:

```
magPSol2 = 55.8667
```

Para obtener las magnitudes de las otras dos fuerzas de compresión, se procede cambiando el vector de premultiplicación escalar a $\overline{eP}$ y el vector de postmultiplicación vectorial a $\overline{DA}$:

$$\text{ec3} = \text{eP}.\left(\frac{\text{magFBA}}{\text{magBA}}\ \text{BA}\times\text{DA}\right) + \text{eP}.\left(\frac{\text{magFCA}}{\text{magCA}}\ \text{CA}\times\text{DA}\right) + \text{eP}.\left(\frac{\text{magFDA}}{\text{magDA}}\ \text{DA}\times\text{DA}\right) + \text{eP}.(\text{magP eP}\times\text{DA}) == \text{eP}.(\{0, 0, 0\}\times\text{DA})$$

```
resp3 = Solve[ec3]
        resuelve
```

Se procede de forma similar, ahora para la postmultiplicación vectorial en lugar de $\overline{DA}$ empleando el vector $\overline{CA}$:

$$ec4 = eP.\left(\frac{magFBA}{magBA}\ BA \times CA\right) + eP.\left(\frac{magFCA}{magCA}\ CA \times CA\right) + eP.\left(\frac{magFDA}{magDA}\ DA \times CA\right) + eP.(magPSol\ eP \times CA) == eP.(\{0, 0, 0\} \times CA)$$

```
resp4 = Solve[ec4]
        resuelve
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Mecánica
Julio de 2022

Yukihiro Minami Koyama
Gloria Ramírez Romero