FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 2 - parte 2:

Representación y modelado de los sistemas de fuerzas

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

M.I Yukihiro Minami Koyama

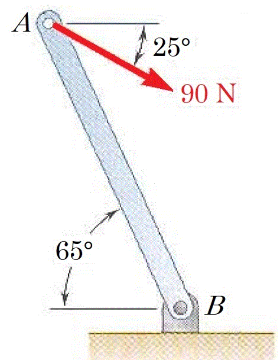
Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

Tema 2, parte 2
Representación y modelado de los sistemas de fuerzas

Ejercicio 2.9

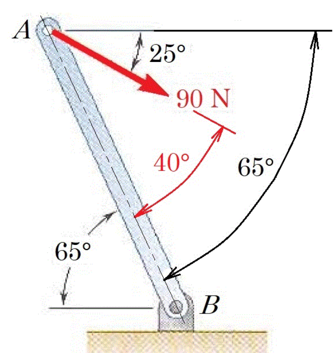
Problema 3.1 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p.89.

Una fuerza de 90 N se aplica a la varilla de control AB como indica la figura. Si la longitud de la varilla es de 225 mm, determine el momento de la fuerza respecto al punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes a lo largo de AB y en una dirección perpendicular a AB.



Primer procedimiento

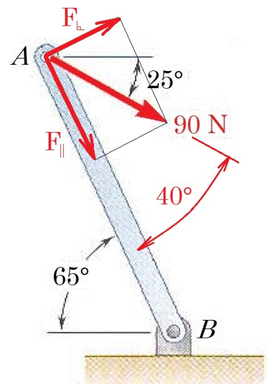
En este caso, se puede obtener con facilidad el momento de la fuerza de 90 N respecto al punto B justamente con la descomposición solicitada en el enunciado de la figura.
Para obtener las componentes, es necesario determinar el ángulo que forma la fuerza de 90 N con la barra *AB*. Para ello, observe la siguiente figura:



Dado el teorema de que los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales, el ángulo que forma la barra AB con la horizontal en B es igual al que forma con la horizontal en A, tal como se indica en la figura anterior.

Con base en este último ángulo, dado que la fuerza de 90 N forma un ángulo de 25° con respecto a la horizontal en A, dicha fuerza debe formar un ángulo de 40° con la barra, de manera que 25° + 40° sea igual a los 65°.

Conocido el ángulo de 40°, es posible obtener las magnitudes de las componentes paralela y perpendicular a la barra AB de la fuerza de 90 N, con base en la figura mostrada a continuación.



Al descomponer la fuerza de 90 N en una componente a lo largo de AB, $F_{||}$, y otra perpendicular a AB, $F_{\llcorner}$, resulta:

$\text{magF}_{||} = 90 \text{ Cos}[40°]$

$\text{magF}_{||} = 90\ (0.7660)$

$\text{magF}_{||} = 68.94 \text{ N}$

$\text{mag}F_{\llcorner} = 90 \text{ Sin}[40°]$

$\text{mag}F_{\llcorner} = 90\ (0.6428)$

$\text{mag}F_{\llcorner} = 57.85 \text{ N}$

Luego se aplica el teorema de Varignon. Dado que la componente paralela a la barra AB pasa por el punto B, con respecto al cual se desea calcular el momento, la distancia entre ellos es cero, por lo que el valor del momento de dicha componente paralela también es cero.

$M_B^{F_{||}} = \text{magF}_{||}\ (0)$

$M_B^{F_{||}} = 0 \text{ N·m}$

Y para el momento de la componente perpendicular a la barra, la distancia es igual al de la barra, es decir, 225 mm que son 0.225 m:

$M_B^{F_{\llcorner}} = \text{magF}_{\llcorner}\ (0.225)$

$M_B^{F_{\llcorner}} = 57.85\ (0.225)$

$M_B^{F_{\llcorner}} = 13.02 \text{ N·m}$

Luego de aplicar el teorema de Varignon, el momento solicitado queda:

$M_B^F = M_B^{F_{\parallel}} + M_B^{F_{\perp}}$

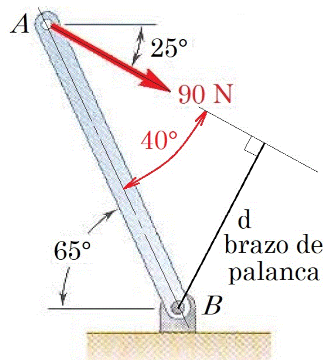
$M_B^F = 13.02$ N·m

El momento de la fuerza de 90 N respecto al punto B es de:

$M_B^F = 13.02$ N·m.

Segundo procedimiento

Este problema también puede resolverse con la determinación del llamado brazo de palanca, es decir, la distancia perpendicular de B a la línea de acción de dicha fuerza, con base en el siguiente diagrama:



Dado que la barra AB tiene una longitud de 0.225 m:

d = 0.225 Sin[40°]

d = 0.225 (0.6428)

d = 0.1446 m

Por consiguiente, en momento de la fuerza de 90 N respecto al punto B es:

$M_B^F = 90$ d

$M_B^F = 90$ (0.1416)

$M_B^F = 13.02$ N·m

El resultado es exactamente el mismo que el obtenido anteriormente, con lo que se verifica la validez del teorema de Varignon.

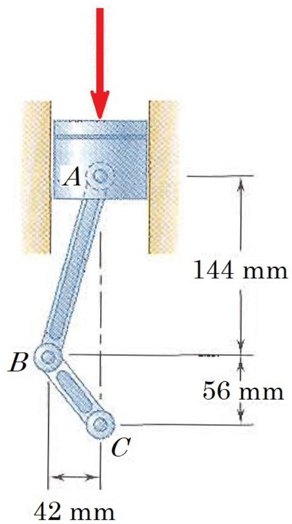
Resolución del problema con funciones de Mathematica

```
magF = 90
longVarilla = 0.225
magFparalela = magF Cos[40 °] // N
magFperpendic = magF Sin[40 °] // N
MFparalelaB = magFparalela (0)
MFperpendicB = magFperpendic (longVarilla)
MFB1 = MFparalelaB + MFperpendicB
dist = longVarilla Sin[40 °]
MFB2 = magF dist
```

Ejercicio 2.10

Problemas 3.12 y 3.13 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 90

La biela *AB* ejerce sobre la manivela *BC* una fuerza de 2.5 kN dirigida hacia abajo y hacia el lado izquierdo a lo largo de la línea central de *AB*. Determine el momento de esa fuerza respecto a *C*, para los dos casos mostrados.



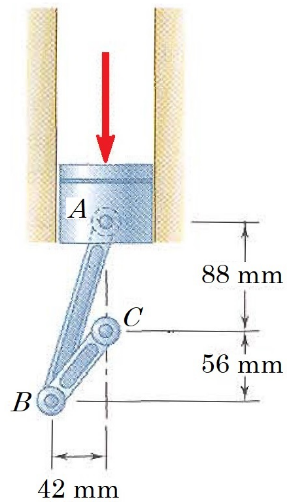
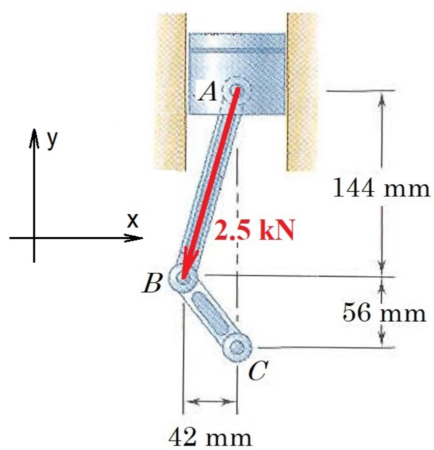


Diagrama de la fuerza de 2.5 kN que ejerce la biela sobre la manivela del primer caso:



Para simplificar la resolución de ambos casos, conviene descomponer la fuerza de 2.5 kN en una componente horizontal y otra vertical, para la cual se obtiene su vector unitario, considerando el punto C como el origen:

$\overline{r_A} = \{0, 0.2\}$

$\overline{r_B} = \{-0.042, 0.056\}$

$\overline{AB} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$

$\overline{AB} = \{-0.042, 0.056\} - \{0, 0.2\}$

$\overline{AB} = \{-0.042, -0.144\}$

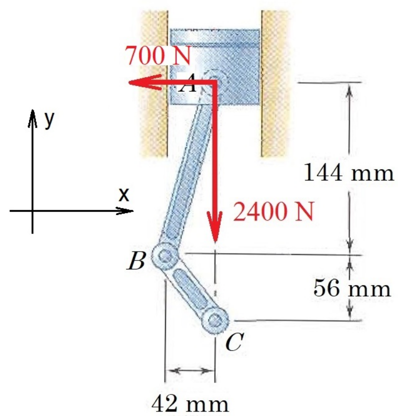
$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-0.042)^2 + (-0.144)^2}$$
$$|\overline{AB}| = \sqrt{0.001764 + 0.020736}$$
$$|\overline{AB}| = \sqrt{0.0225}$$
$$|\overline{AB}| = 0.15$$

Por tanto, el vector unitario de la fuerza de 2.5 kN es:

$$\overline{e_F} = \left\{-\frac{0.042}{0.15}, -\frac{0.144}{0.15}\right\}$$

Por consiguiente, la representación vectorial de dicha fuerza es:

$$\overline{F} = 2500 \left\{-\frac{0.042}{0.15}, -\frac{0.144}{0.15}\right\}$$
$$\overline{F} = \{-700, -2400\}\ \text{N}$$



Finalmente, se aplica el teorema de Varignon para calcular la magnitud del momento de la fuerza de 2.5 kN respecto a C. El momento de la componente horizontal es positivo, debido a que la tendencia a hacer girar la biela es en sentido antihorario; para la componente vertical, el momento es cero, debido a que su línea de acción pasa por C:

$$M_C^F = 700\ (0.144 + 0.056) - 2400\ (0)$$
$$M_C^F = 700\ (0.2)$$
$$M_C^F = 140$$
$$M_C^F = 140\ \text{N·m}$$

También se puede obtener el momento de una fuerza con respecto a un punto, con base en álgebra vectorial, de manera que se obtenga el signo del momento. La expresión es la siguiente:

$$\overline{M_C^F} = \overline{r} \times \overline{F}$$

El vector $\overline{r}$ es aquel que va del punto respecto al que se desea calcular el momento a cualquier punto de la línea de acción de la fuerza. Para este caso, $\overline{r}$ puede ser el que va de C a A:

$$\overline{r_1} = \overline{CA}$$
$$\overline{r_1} = \overline{r_A} - \overline{r_C}$$
$$\overline{r_1} = \{0, 0.2\} - \{0, 0\}$$
$$\overline{r_1} = \{0, 0.2\}$$

También podría ser el vector $\overline{CB}$:

$\overline{r_2} = \overline{CB}$

$\overline{r_2} = \overline{r_B} - \overline{r_C}$

$\overline{r_2} = \{-0.042, 0.056\} - \{0, 0\}$

$\overline{r_2} = \{-0.042, 0.056\}$

Y el vector que representa a la fuerza es:

$\overline{F} = \{-700, -2400\}$

Por consiguiente, el momento respecto al punto C de la fuerza F, con base en álgebra vectorial, es:

$\overline{M_C^F} = \overline{r} \times \overline{F}$

$\overline{M_C^F} = \overline{r_1} \times \overline{F}$

$\overline{M_C^F} = \{0, 0.2\} \times \{-700, -2400\}$

$\overline{M_C^F} = 0.2\,\mathbf{j} \times (-700\,\mathbf{i} - 2400\,\mathbf{j})$

$\overline{M_C^F} = 0.2\,\mathbf{j} \times (-700\,\mathbf{i}) + 0.2\,\mathbf{j} \times (-2400\,\mathbf{j})$

$\overline{M_C^F} = (0.2)\,(-700)\,(-\mathbf{k}) + \overline{0}$

$\overline{M_C^F} = (-140)\,(-\mathbf{k})$

$\overline{M_C^F} = 140\,\mathbf{k}$ N·m

Si se obtiene el producto vectorial por medio del determinante:

$$\overline{M_C^F} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -700 & -2400 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{M_C^F} = \overline{0} - (140\,\mathbf{k})$

$\overline{M_C^F} = 140\,\mathbf{k}$

Este mismo momento se puede obtener con base en el vector $\overline{r_2}$:

$\overline{M_C^F} = \overline{r_2} \times \overline{F}$

$\overline{M_C^F} = \{-0.042, 0.056\} \times \{-700, -2400\}$

En este caso conviene usar el método del determinante:

$$\overline{M_C^F} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -0.042 & 0.056 & 0 \\ -700 & -2400 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{M_C^F} = (-0.042)\,(-2400)\,\mathbf{k} - (-700)\,(0.056)\,\mathbf{k}$

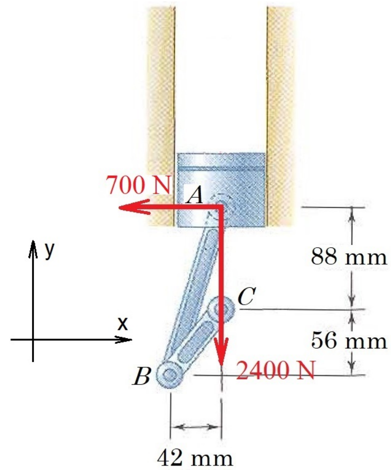
$\overline{M_C^F} = 100.8\,\mathbf{k} + 39.2\,\mathbf{k}$

$\overline{M_C^F} = 140\,\mathbf{k}$ N·m

Para el primer caso, el momento de la fuerza de 2.5 kN respecto al punto C es:

$\overline{M_C^F} = 140\,\mathbf{k}$ N·m.

Para el segundo caso, dado que la fuerza de 2.5 kN tiene la misma pendiente y sentido, el diagrama de dicha fuerza puede simplificarse al mostrado a continuación:



Nuevamente se aplica el teorema de Varignon, recordando que la componente horizontal tiende a hacer girar a la biela en sentido antihorario, por tanto positivo, y la componente vertical también en este caso produce un momento cero debido a que su línea de acción pasa por C:

M_C^F = 700 (0.088) - 2400 (0)

M_C^F = 61.6 N·m

El momento de la fuerza de 2.5 kN respecto a C, para el segundo caso es:

M_C^F = 61.6 N·m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

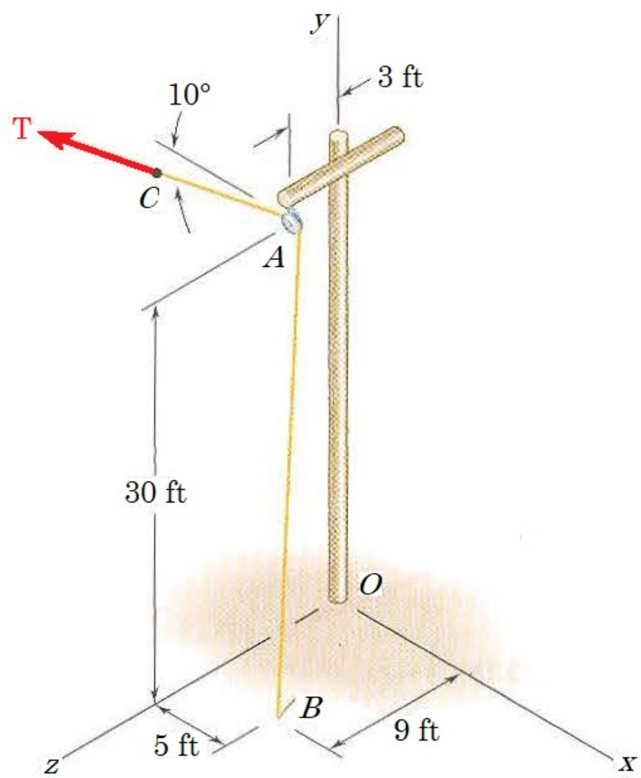
```
magF = 2500;
rA = {0, 0.2, 0};
rB = {-0.042, 0.056, 0};
rC = {0, 0, 0};
r1 = rA - rC
r2 = rB - rC
AB = rB - rA
eAB = Normalize[AB]
F = magF eAB
MFC1 = r1 × F
MFC2 = r2 × F
```

```
rA = {0, 0.088, 0}
rB = {-0.042, -0.056, 0}
r3 = rA - rC
r4 = rB - rC
MFC3 = r3 × F
MFC4 = r4 × F
```

Ejercicio 2.11

Problema 3.23 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 92

Antes de colocar un cable telefónico, la cuerda *BAC* se ata a una estaca situada en *B* y se pasa por una polea en *A*. Si el tramo *AC* de la cuerda pertenece a un plano paralelo al plano *xy*, y la magnitud de la tensión **T** en la cuerda es de 62 lb, determine el momento respecto a *O* de la fuerza resultante ejercida por la cuerda sobre la polea.



Primero se obtienen las representaciones vectoriales de las fuerzas de tensión en los segmentos de cuerda $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{AC}}$ para las cuales se obtienen primero sus vectores unitarios.
En el caso de la cuerda $\overline{\text{AB}}$:

$\overline{r_A} = \{0, 30, 3\}$

$\overline{r_B} = \{5, 0, 9\}$

$\overline{\text{AB}} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$

$\overline{\text{AB}} = \{5, 0, 9\} - \{0, 30, 3\}$

$\overline{\text{AB}} = \{5, -30, 6\}$

$|\overline{\text{AB}}| = \sqrt{5^2 + (-30)^2 + 6^2}$

$|\overline{\text{AB}}| = \sqrt{25 + 900 + 36}$

$|\overline{\text{AB}}| = \sqrt{961}$

$|\overline{\text{AB}}| = 31$

Por tanto, el vector unitario del vector $\overline{\mathrm{AB}}$ es:

$$\overline{e_{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{|\overline{\mathrm{AB}}|}$$

$$\overline{e_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{31}\,\{5, -30, 6\}$$

$$\overline{e_{\mathrm{AB}}} = \left\{\frac{5}{31}, -\frac{30}{31}, \frac{6}{31}\right\}$$

Por consiguiente, la representación vectorial de fuerza de tensión del segmento de cuerda $\overline{\mathrm{AB}}$, cuya magnitud es de 62 lb es:

$$\overline{T_{\mathrm{AB}}} = 62\left\{\frac{5}{31}, -\frac{30}{31}, \frac{6}{31}\right\}$$

$$\overline{T_{\mathrm{AB}}} = \{10, -60, 12\}\ \mathrm{lb}$$

Con respecto a la fuerza de tensión del segmento de cuerda $\overline{\mathrm{AC}}$, con base en el enunciado de este problema, dado que dicho segmento está contenido en el plano paralelo a xy, y su ángulo con respecto al eje x es de 10° hacia abajo, su vector unitario no tiene componente en z y es:

$$\overline{e_{\mathrm{AC}}} = \{-\mathrm{Cos}\,[10°], -\mathrm{Sin}\,[10°], 0\}$$

Entonces, el vector que representa la fuerza de tensión del segmento de cuerda $\overline{\mathrm{AC}}$ es:

$$\overline{T_{\mathrm{AC}}} = 62\,\{-0.9848, -0.1736, 0\}$$

$$\overline{T_{\mathrm{AC}}} = \{-61.06, -10.77, 0\}\ \mathrm{lb}$$

Para obtener el momento respecto al punto O de la fuerza resultante ejercida por la cuerda sobre la polea, se puede aplicar el teorema de Varignon:

$$\overline{M_O^R} = \overline{M_O^{T_{\mathrm{AB}}}} + \overline{M_O^{T_{\mathrm{AC}}}}$$

Por tanto, se calcula primero $\overline{M_O^{T_{\mathrm{AB}}}}$:

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AB}}}} = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{T_{\mathrm{AB}}}$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AB}}}} = \{0, 30, 3\} \times \{10, -60, 12\}$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AB}}}} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 30 & 3 \\ 10 & -60 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AB}}}} = 360\,\mathbf{i} + 30\,\mathbf{j} - (-180\,\mathbf{i} + 300\,\mathbf{k})$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AB}}}} = \{540, 30, -300\}\ \mathrm{lb{\cdot}ft}$$

Luego, se calcula $\overline{M_O^{T_{\mathrm{AC}}}}$:

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AC}}}} = \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{T_{\mathrm{AC}}}$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AC}}}} = \{0, 30, 3\} \times \{-61.0581, -10.7662, 0\}$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AC}}}} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 30 & 3 \\ -61.06 & -10.77 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AC}}}} = -183.17\,\mathbf{j} - (-32.30\,\mathbf{i} - 1831.74\,\mathbf{k})$$

$$\overline{M_O^{T_{\mathrm{AC}}}} = \{32.30, -183.17, 1831.74\}\ \mathrm{lb{\cdot}ft}$$

Por consiguiente, en momento solicitado es:

$\overline{M_O^R} = \overline{M_O^{T_{AB}}} + \overline{M_O^{T_{AC}}}$

$\overline{M_O^R}$ = {540, 30, -300} + {32.30, -183.17, 1831.74}

$\overline{M_O^R}$ = {572.30, -153.17, 1531.74} lb·ft

El momento respecto al punto O de la fuerza resultante ejercida por la cuerda sobre la polea es:

$\overline{M_O^R}$ = {572.30, -153.17, 1531.74} lb·ft.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

```
magT = 62;
rA = {0, 30, 3};
rB = {5, 0, 9};
AB = rB - rA
```

Representación vectorial de la tensión del segmento de cuerda $\overline{AB}$:

```
eAB = Normalize[AB]
TAB = magT eAB
```

Representación vectorial de la tensión del segmento de cuerda $\overline{AB}$:

```
eAC = {-Cos[10 °], -Sin[10 °], 0}
TAC = magT eAC // N
```

Momento de la tensión del segmento de cuerda AB respecto a O:

```
MTABO = rA × TAB
```

Momento de la tensión del segmento de cuerda AB respecto a O:

```
MTACO = rA × TAC
```

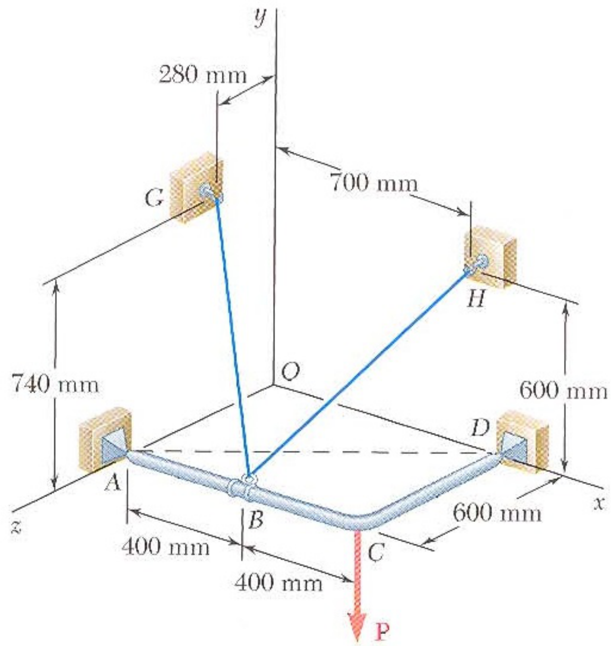
Momento respecto al punto O de la fuerza resultante ejercida por la cuerda sobre la polea es:

```
MRO = MTABO + MTACO
```

Ejercicio 2.12

Problema 3.53 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 105

El marco está articulado en *A* y *D* y se sostiene mediante un cable, el cual pasa por un anillo colocado en *B* y está unido a ganchos en *G* y *H*. Si la tensión en el cable es de 1,125 N, determine el momento, respecto a la diagonal *AD*, de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo *BH* del cable.



Datos:

$\overline{r_A} = \{0, 0, 0.6\}$

$\overline{r_B} = \{0.4, 0, 0.6\}$

$\overline{r_D} = \{0.8, 0, 0\}$

$\overline{r_H} = \{0.7, 0.6, 0\}$

$\text{magT}_{\text{BH}} = 1125$

$\overline{\text{BH}} = \overline{r_H} - \overline{r_B}$

$\overline{\text{BH}} = \{0.7, 0.6, 0\} - \{0.4, 0, 0.6\}$

$\overline{\text{BH}} = \{0.3, 0.6, -0.6\}$

$|\overline{\text{BH}}| = \sqrt{0.3^2 + 0.6^2 + (-0.6)^2}$

$|\overline{\text{BH}}| = \sqrt{0.09 + 0.36 + 0.36}$

$|\overline{\text{BH}}| = \sqrt{0.81}$

$|\overline{\text{BH}}| = 0.9$

$\overline{e_{\text{BH}}} = \frac{1}{|\overline{\text{BH}}|}\,\overline{\text{BH}}$

$\overline{e_{\text{BH}}} = \left\{\frac{0.3}{0.9}, \frac{0.6}{0.9}, -\frac{0.6}{0.9}\right\}$

$\overline{T_{\text{BH}}} = \text{magT}_{\text{BH}}\,\overline{e_{\text{BH}}}$

$\overline{T_{\text{BH}}} = 1125\left\{\frac{0.3}{0.9}, \frac{0.6}{0.9}, -\frac{0.6}{0.9}\right\}$

$\overline{T_{BH}} = \{375, 750, -750\}$

Para obtener el momento de la tensión $\overline{T_{BH}}$ con respecto al eje $\overline{AD}$, primero se obtiene el vector momento de la fuerza, en este caso la tensión $\overline{T_{BH}}$ respecto a algún punto del eje, en este caso el punto A o el punto D y, posteriormente, se obtiene la proyección vectorial de dicho momento sobre el eje $\overline{AD}$.

El vector momento de una fuerza respecto a un punto se obtiene mediante el producto vectorial de un vector que va del punto respecto al que se desea calcular este momento, a un punto de la línea de acción de la fuerza, por el vector que representa a la fuerza.

El momento de la tensión $\overline{T_{BH}}$ respecto a A es:

$$\overline{M_A^{T_{BH}}} = \overline{AB} \times \overline{T_{BH}}$$
$$\overline{AB} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$$
$$\overline{AB} = \{0.4, 0, 0.6\} - \{0, 0, 0.6\}$$
$$\overline{AB} = \{0.4, 0, 0\}$$
$$\overline{M_A^{T_{BH}}} = \{0.4, 0, 0\} \times \{375, 750, -750\}$$
$$\overline{M_A^{T_{BH}}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0.4 & 0 & 0 \\ 375 & 750 & -750 \end{pmatrix}$$
$$\overline{M_A^{T_{BH}}} = 300\,\mathbf{k} - (-300\,\mathbf{j})$$
$$\overline{M_A^{T_{BH}}} = 300\,\mathbf{j} + 300\,\mathbf{k}$$

Posteriormente, se obtiene la proyeccion vectorial del momento calculado sobre el eje, en este caso, $\overline{AD}$, por lo cual se requiere obtener $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \overline{r_D} - \overline{r_A}$$
$$\overline{AD} = \{0.8, 0, 0\} - \{0, 0, 0.6\}$$
$$\overline{AD} = \{0.8, 0, -0.6\}$$

Su vector unitario será:

$$|\,\overline{AD}\,| = \sqrt{0.8^2 + (-0.6)^2}$$
$$|\,\overline{AD}\,| = \sqrt{0.64 + 0.36}$$
$$|\,\overline{AD}\,| = \sqrt{1}$$
$$|\,\overline{AD}\,| = 1$$
$$\overline{e_{AD}} = \{0.8, 0, -0.6\}$$

Luego, para obtener la proyección vectorial del vector momento $\overline{M_A^{T_{BH}}}$ sobre el eje $\overline{AD}$:

$$\overline{M_{AD}^{T_{BH}}} = (\overline{M_A^{T_{BH}}} \cdot \overline{e_{AD}})\,\overline{e_{AD}}$$
$$\overline{M_{AD}^{T_{BH}}} = (\{0, 300, 300\} \cdot \{0.8, 0, -0.6\})\,\{0.8, 0, -0.6\}$$
$$\overline{M_{AD}^{T_{BH}}} = (0 + 0 - 180)\,\{0.8, 0, -0.6\}$$
$$\overline{M_{AD}^{T_{BH}}} = \{-144, 0, 108\}\ \text{N·m}$$

El momento de la fuerza $\overline{T_{BH}}$ con respecto del eje $\overline{AD}$ es:

$$\overline{M_{AD}^{T_{BH}}} = \{-144, 0, 108\}\ \text{N·m.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

```
rA = {0, 0, 0.6};
rB = {0.4, 0, 0.6};
rD = {0.8, 0, 0};
rH = {0.7, 0.6, 0};
magT = 1125;
```

Vectores de la tensión del cable BH:

```
BH = rH - rB
```

Vector unitario de $\overline{\text{BH}}$:

```
eBH = Normalize[BH]
```

Vector representativo de la fuerza de tensión $\overline{T_{\text{BH}}}$:

```
TBH = magT eBH
```

Vectores para el cálculo de los momentos con respecto de los puntos A y D:

```
AB = rB - rA
AH = rH - rA
DB = rB - rD
DH = rH - rD
```

Momento de la tensión $\overline{T_{\text{BH}}}$ con respecto de A y D:

```
MTBHA1 = AB × TBH
MTBHA2 = AH × TBH
MTBHD1 = DB × TBH
MTBHD2 = DH × TBH
```

Vectores representativos del eje $\overline{\text{AD}}$:

```
AD = rD - rA
DA = rA - rD
```

Vectores unitarios representativos del eje $\overline{\text{AD}}$:

```
eAD = Normalize[AD]
eDA = Normalize[DA]
```

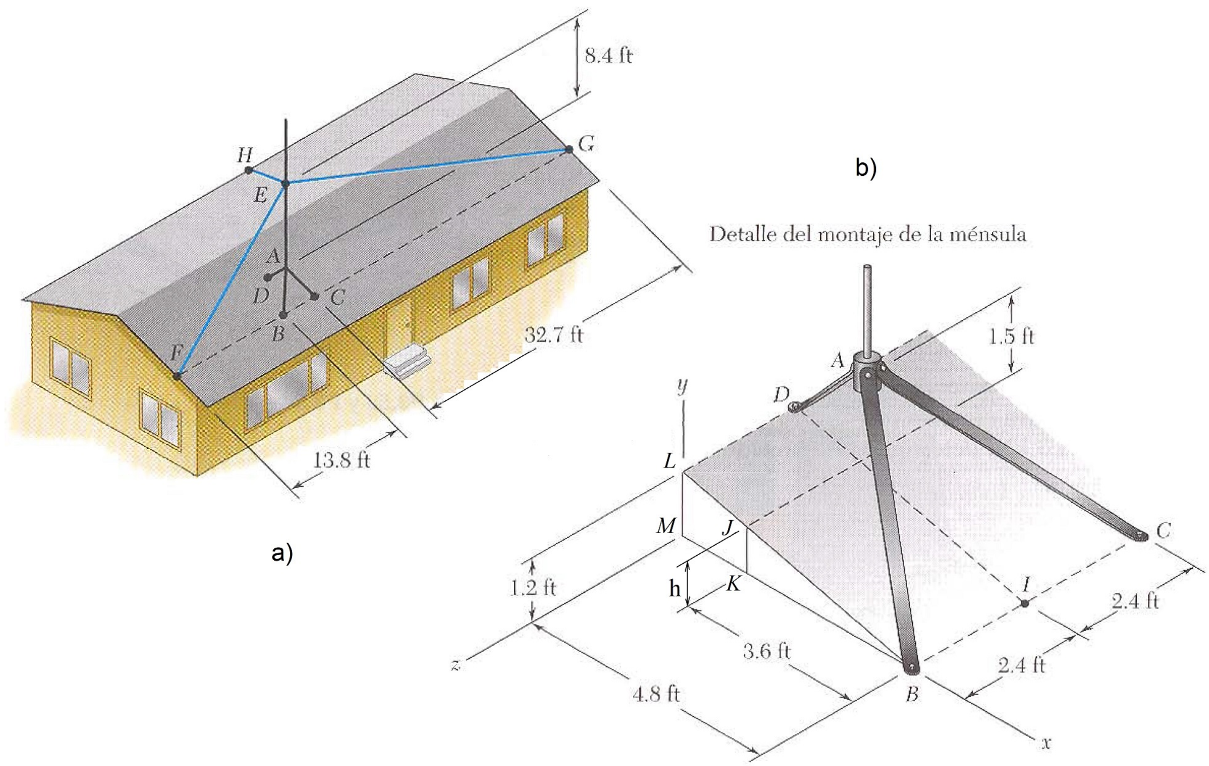
Cálculo del momento de la tensión $\overline{T_{\text{BH}}}$ con respecto del eje $\overline{\text{AD}}$:

```
MTBHAD1 = (MTBHA1.eAD) eAD
MTBHAD2 = (MTBHD1.eAD) eAD
MTBHAD3 = (MTBHA1.eDA) eDA
MTBHAD4 = (MTBHD1.eDA) eDA
```

Ejercicio 2.13

Problema 3.60 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 106

Un mástil se monta sobre el techo de una casa usando la ménsula *ABCD* y lo sostienen los cables *EF*, *EG* y *EH*. Si la fuerza ejercida por el cable *EG* en *E* es de 24.6 lb, determine el momento de esta fuerza respecto a la línea que une los puntos *D* e *I*.

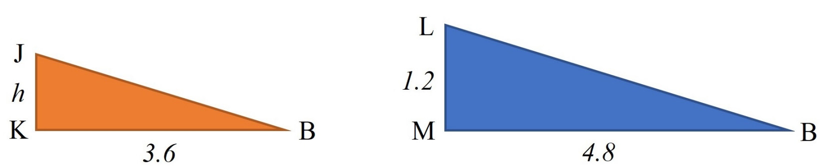


Para obtener la coordenada y del punto E, como se observa en la figura a, el punto E se encuentra 8.4 ft arriba del punto A. Por otro lado, en la figura b se puede verificar que el punto A se ubica a 1.5 ft del techo de la casa y, que a su vez, está elevado una altura h respecto al plano xz.

Por lo anterior:

$$y_E = 8.4 + 1.5 + h$$

Donde *h* se puede calcular con base en el teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de los triángulos semejantes BJK y BLM de la figura b anterior, como se muestra en la siguiente figura:



$$\frac{h}{3.6} = \frac{1.2}{4.8}$$

$$h = \frac{(1.2)(3.6)}{4.8}$$

$$h = \frac{4.32}{4.8}$$

$$h = 0.9 \text{ ft}$$

de donde:

$y_E = 8.4 + 1.5 + 0.9$

$y_E = 10.8$ ft

Datos:

$\text{magF}_{\text{EG}} = 24.6$

$\overline{r_D} = \{0, 1.2, -2.4\}$

$\overline{r_E} = \{1.2, 10.8, -2.4\}$

$\overline{r_G} = \{4.8, 0, -37.5\}$

$\overline{r_I} = \{4.8, 0, -2.4\}$

Vector que contiene a la fuerza del cable EG:

$\overline{\text{EG}} = \overline{r_G} - \overline{r_E}$

$\overline{\text{EG}} = \{4.8, 0, -37.5\} - \{1.2, 10.8, -2.4\}$

$\overline{\text{EG}} = \{3.6, -10.8, -35.1\}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = \sqrt{3.6^2 + (-10.8)^2 + (-35.1)^2}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = \sqrt{12.96 + 116.64 + 1232.01}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = \sqrt{1361.61}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = 36.9$

$\overline{e_{\text{EG}}} = \frac{\overline{\text{EG}}}{|\,\overline{\text{EG}}\,|}$

$\overline{e_{\text{EG}}} = \frac{1}{36.9}\{3.6, -10.8, -35.1\}$

$\overline{e_{\text{EG}}} = \left\{\frac{3.6}{36.9}, -\frac{10.8}{36.9}, -\frac{35.1}{36.9}\right\}$

$\overline{e_{\text{EG}}} = \{0.097561, -0.292683, -0.95122\}$

Por tanto, la representación vectorial de la fuerza $\overline{F_{\text{EG}}}$ es:

$\overline{F_{\text{EG}}} = \text{magF}_{\text{EG}}\, \overline{e_{\text{EG}}}$

$\overline{F_{\text{EG}}} = 24.6\,\{0.097561, -0.292683, -0.95122\}$

$\overline{F_{\text{EG}}} = \{2.4, -7.2, -23.4\}$ lb

Ahora, para determinar el momento que produce la fuerza anterior respecto al eje $\overline{\text{DI}}$, primero se obtiene el vector momento de la fuerza respecto a un punto del eje, en este caso se escoge D:

$\overline{M_D^{F_{\text{EG}}}} = \overline{\text{DG}} \times \overline{F_{\text{EG}}}$

$\overline{\text{DG}} = \overline{r_G} - \overline{r_D}$

$\overline{\text{DG}} = \{4.8, 0, -37.5\} - \{0, 1.2, -2.4\}$

$\overline{\text{DG}} = \{4.8, -1.2, -35.1\}$

$\overline{M_D^{F_{\text{EG}}}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4.8 & -1.2 & -35.1 \\ 2.4 & -7.2 & -23.4 \end{pmatrix}$

$\overline{M_D^{F_{\text{EG}}}} = 28.08\,\mathbf{i} - 84.24\,\mathbf{j} - 34.56\,\mathbf{k} - (252.72\,\mathbf{i} - 112.32\,\mathbf{j} - 2.88\,\mathbf{k})$

$\overline{M_D^{F_{\text{EG}}}} = -224.64\,\mathbf{i} + 28.08\,\mathbf{j} - 31.68\,\mathbf{k}$

Para obtener el vector momento de la fuerza $\overline{F_{EG}}$ respecto al eje $\overline{\text{DI}}$, conviene obtener el vector unitario del eje:

$\overline{\text{DI}} = \overline{r_I} - \overline{r_D}$

$\overline{\text{DI}} = \{4.8, 0, -2.4\} - \{0, 1.2, -2.4\}$

$\overline{\text{DI}} = \{4.8, -1.2, 0\}$

$|\,\overline{\text{DI}}\,| = \sqrt{4.8^2 + (-1.2)^2}$

$|\,\overline{\text{DI}}\,| = \sqrt{23.04 + 1.44}$

$|\,\overline{\text{DI}}\,| = \sqrt{24.48}$

$|\,\overline{\text{DI}}\,| = 4.947727$

Por tanto:

$\overline{e_{\text{DI}}} = \frac{\overline{\text{DI}}}{|\,\overline{\text{DI}}\,|}$

$\overline{e_{\text{DI}}} = \frac{1}{4.947727}\,\{4.8, -1.2, 0\}$

$\overline{e_{\text{DI}}} = \{0.9701, -0.2425, 0\}$

Finalmente, el momento de la fuerza $\overline{F_{EG}}$ respecto al eje $\overline{\text{DI}}$ puede obtenerse como el producto escalar del momento de dicha fuerza respecto a un punto del eje, en este caso D, con el vector unitario del eje, multiplicado con dicho vector unitario, es decir:

$\overline{M_{\text{DI}}^{F_{\text{EG}}}} = (\overline{M_D^{F_{\text{EG}}}} \cdot \overline{e_{\text{DI}}})\, \overline{e_{\text{DI}}}$

$\overline{M_{\text{DI}}^{F_{\text{EG}}}} = (\{-224.64, 28.08, -31{,}68\} \cdot \{0.9701, -0.2425, 0\})\, \{0.9701, -0.2425, 0\}$

$\overline{M_{\text{DI}}^{F_{\text{EG}}}} = (-217.93 - 6.810)\, \{0.9701, -0.2425, 0\}$

$\overline{M_{\text{DI}}^{F_{\text{EG}}}} = -224.74\, \{0.9701, -0.24256, 0\}$

de donde:

$\overline{M_{\text{DI}}^{F_{\text{EG}}}} = -218.03\, \mathbf{i} + 54.51\, \mathbf{j}$

El momento de la fuerza $\overline{F_{EG}}$ con respecto del eje $\overline{\text{DI}}$ es:

$\overline{M_{\text{DI}}^{F_{\text{EG}}}} = -218.03\, \mathbf{i} + 54.51\, \mathbf{j}$ lb·ft.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

```
rD = {0, 1.2, -2.4};
rE = {1.2, 10.8, -2.4};
rG = {4.8, 0, -37.5};
rI = {4.8, 0, -2.4};
magFEG = 24.6;
```

```
EG = rG - rE
eEG = Normalize[EG]
FEG = magFEG eEG
IG = rG - rI
DG = rG - rD
```

Momento de la fuerza FEG con respecto de I:

```
MFEGI = IG × FEG
```

Momento de la fuerza FEG con respecto de D:

```
MFEGD = DG × FEG
```

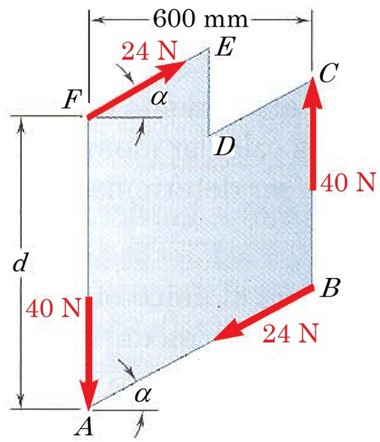
Cálculo del momento de la fuerza FEGI con respecto del eje DI:

```
DI = rI - rD
eDI = Normalize[DI]
ID = rD - rI
eID = Normalize[ID]
MFEGDI1 = (MFEGI.eDI) eDI
MFEGDI2 = (MFEGI.eID) eID
MFEGDI3 = (MFEGD.eDI) eDI
MFEGDI4 = (MFEGD.eID) eID
```

Ejercicio 2.14

Problema 3.68, Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros: Estática, 8^a edición, McGraw-Hill, p. 116.

Una placa de acero está sometida a la acción de dos pares, según muestra la figura. Determine:
a) el momento del par formado por las dos fuerzas de 40 N,
b) el valor de α si $d = 820\ mm$, y la resultante de los dos pares es de 8 N·m en sentido contrario al de las manecillas del reloj,
c) la distancia perpendicular entre las dos fuerzas de 24 N si la resultante de los dos pares es cero.



a) el momento del par formado por las dos fuerzas de 40 N

Datos:

$magF_1 = 40$ N

$d_1 = 0.6$ m

$magF_2 = 24$ N

d = 0.82 m

magMparResultante = +8 N·m

Dado que el par de fuerzas de 40 N tiende a hacer girar a la placa en sentido antihorario, su signo es positivo:

$magMpar_1 = +0.6\ (40)$

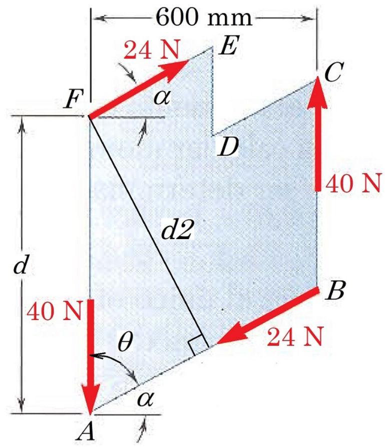
$magMpar_1 = +24$ N·m

El momento del par formado por las dos fuerzas de 40 N es:

$magMpar_1 = 24$ N·m

***b)* el valor de α si d = 820 mm, y la resultante de los dos pares es de 8 N·m en sentido contrario al de las manecillas del reloj**

En este caso, no se conoce la distancia d_2 :



$\theta = 90° - \alpha$

$\text{Sin}[\theta] = \frac{d_2}{d}$

$d_2 = 0.82\ \text{Sin}[\theta]$

$d_2 = 0.82\ \text{Sin}[90° - \alpha]$

$d_2 = 0.82\ \text{Cos}[\alpha]$

$\text{magMpar}_2 = -0.82\ \text{Cos}[\alpha]\ (24)$

$\text{magMparResultante} = \text{magMpar}_1 + \text{magMpar}_2$

$+8 = +24 - 0.82\ \text{Cos}[\alpha]\ (24)$

$0.82\ \text{Cos}[\alpha]\ (24) = 24 - 8$

$\text{Cos}[\alpha] = \frac{16}{19.68}$

$\text{Cos}[\alpha] = 0.8130$

$\alpha = \text{ArcCos}[0.8130]$

$\alpha = 35.61°$

El valor de α con $d = 820\ mm$ para el cual la resultante de los dos pares es 8 N·m en sentido contrario a las manecillas del reloj es:

$\alpha = 35.61°$.

c) la distancia perpendicular, d_3, entre las dos fuerzas de 24 N si la resultante de los dos pares es cero

$$magMparResultante = 0$$
$$magMparResultante = magMpar_1 + magMpar_3$$
$$magMpar_3 = -d_3\ magF_2$$
$$0 = 24 - d_3\ magF_2$$
$$24\ d_3 = 24$$
$$d_3 = 1\ \text{m}$$

La distancia perpendicular entre las dos fuerzas de 24 N si la resultante de los dos pares es cero es:

$d_3 = 1$ m.

Cálculo del vector momento del par de fuerzas con magnitud de 24 N

Para obtener con el empleo de vectores el momento que produce un par de fuerzas, se obtiene el producto vectorial, producto cruz, del vector que va de un punto de una de las fuerzas del par a un punto de la otra fuerza, por el vector que representa a la segunda fuerza.

En este caso, el primer vector es $\overline{AF}$:

$$\overline{AF} = \{0, 0.82, 0\}$$
$$\overline{F_2} = 24\ \{\text{Cos}[\alpha], \text{Sin}[\alpha], 0\}$$
$$\overline{F_2} = 24\ \{\text{Cos}[35.61°], \text{Sin}[35.61°], 0\}$$
$$\overline{F_2} = 24\ \{0.8130, 0.5823, 0\}$$
$$\overline{F_2} = \{19.51, 13.97, 0\}\ \text{N}$$
$$\overline{Mpar_2} = \overline{AF} \times \overline{F_2}$$
$$\overline{Mpar_2} = \{0, 0.82, 0\} \times \{19.51, 13.97, 0\}$$
$$\overline{Mpar_2} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0.82 & 0 \\ 19.51 & 13.97 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overline{Mpar_2} = -(0.82)\ (19.51)\ \mathbf{k}$$
$$\overline{Mpar_2} = -16\ \mathbf{k}\ \text{N·m}$$

Se puede verificar que el resultado es el mismo que el considerado en el inciso *b)*, sólo que de forma vectorial.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

a) el momento del par formado por las dos fuerzas de 40 N

```
magF1 = 40;
d1 = 0.6;
magF2 = 24;
d = 0.82;
magMparResultante2 = 8;
magMparResultante3 = 0;
magMpar1 = d1 magF1
```

b) el valor de α si d = 820 mm, y la resultante de los dos pares es de 8 N·m en sentido contrario al de las manecillas del reloj

```
ec1 = θ == 90 ° - α
ec2 = d2 == d Sin[θ]
d2 = d Cos[α]
magMpar21 = -d2 magF2
ec3 = magMparResultante2 == magMpar1 + magMpar21
resp1 = Solve[ec3]
αSol = α /. resp1⟦2⟧
αSolDeg = αSol / °
```

c) la distancia perpendicular, d_3, entre las dos fuerzas de 24 N si la resultante de los dos pares es cero

```
ec4 = magMparResultante3 == magMpar1 + magMpar3
magMpar3 = -d3 magF2
resp2 = Solve[ec4]
d3Sol = d3 /. resp2⟦1⟧
```

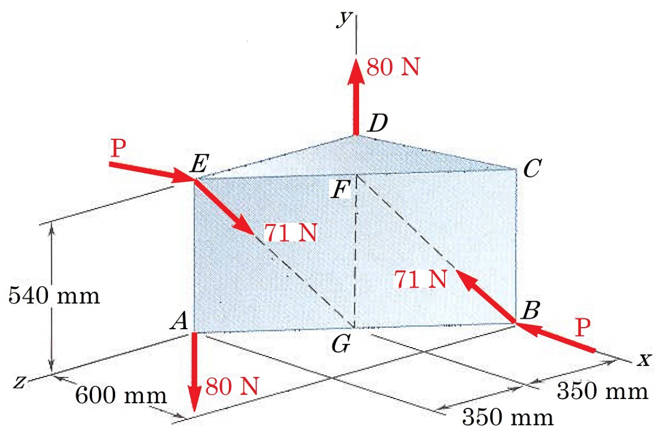
Cálculo del vector momento del par de fuerzas con magnitud de 24 N

```
AF = {0, 0.82, 0};
F2 = magF2 {Cos[αSolDeg °], Sin[αSolDeg °], 0} // N
Mpar22 = AF × F2
```

Ejercicio 2.15

Problema 3.75 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 117.

Si P = 90 N, reemplace los tres pares por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.



Para resolver este problema, conviene recordar que el vector momento de un par de fuerzas se puede obtener como el producto vectorial del vector que va de un punto de una de las fuerzas del par a un punto de la otra fuerza, y el vector que representa esta segunda fuerza.

Para obtener el vector momento del par de fuerzas de 80 N de magnitud, se establece, primero, el vector que va de A a D:

$\overline{r_A} = \{0, 0, 0.7\}$

$\overline{r_D} = \{0, 0.54, 0\}$

$\overline{\text{AD}} = \overline{r_D} - \overline{r_A}$

$\overline{\text{AD}} = \{0, 0.54, 0\} - \{0, 0, 0.7\}$

$\overline{\text{AD}} = \{0, 0.54, -0.7\}$

En cuyo caso, se requiere obtener el producto cruz de este vector y el vector que representa a la fuerza de 80 N que pasa por el punto D, y que se denomina $\overline{F_1}$:

$\overline{e_1} = \{0, 1, 0\}$

$\overline{F_1} = \text{magF}_1\, \overline{e_1}$

$\overline{F_1} = 80\, \{0, 1, 0\}$

$\overline{F_1} = \{0, 80, 0\}$ N

Ahora, se obtiene el producto vectorial de $\overline{\text{AD}}$ y la fuerza $\overline{F_1}$:

$\overline{M^{\text{par}_1}} = \overline{\text{AD}} \times \overline{F_1}$

$\overline{M^{\text{par}_1}} = \{0, 0.54, -0.7\} \times \{0, 80, 0\}$

$\overline{M^{\text{par}_1}} = 56\, \mathbf{i}$

Se puede verificar este resultado con el cálculo del determinante asociado a este producto vectorial:

$\overline{M^{par_1}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0.54 & -0.7 \\ 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}$

$\overline{M^{par_1}}$ = -(-56 **i**)

$\overline{M^{par_1}}$ = 56 **i**

En seguida, se obtiene el vector momento del par de fuerzas de 90 N de magnitud, para lo que se establece el vector que va de B a E:

$\overline{r_B}$ = {0.6, 0, 0}

$\overline{r_E}$ = {0, 0.54, 0.7}

$\overline{\text{BE}} = \overline{r_E} - \overline{r_B}$

$\overline{\text{BE}}$ = {0, 0.54, 0.7} - {0.6, 0, 0}

$\overline{\text{BE}}$ = {-0.6, 0.54, 0.7}

Luego, se calcula el producto cruz de este vector y el vector que representa a la fuerza de 90 N que pasa por el punto E, y que se denomina $\overline{F_2}$:

$\overline{e_2}$ = {1, 0, 0}

$\overline{F_2} = \text{magF}_2\, \overline{e_2}$

$\overline{F_1}$ = 90 {1, 0, 0}

$\overline{F_2}$ = {90, 0, 0} N

Ahora, se obtiene el producto vectorial de $\overline{\text{AD}}$ y la fuerza $\overline{F_1}$:

$\overline{M^{par_2}} = \overline{\text{BE}} \times \overline{F_2}$

$\overline{M^{par_2}}$ = {-0.6, 0.54, 0.7} × {90, 0, 0}

$\overline{M^{par_2}}$ = 63 **j** - 48.6 **k**

Se puede verificar este resultado con el cálculo del determinante asociado a este producto vectorial:

$\overline{M^{par_2}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -0.6 & 0.54 & 0.7 \\ 90 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\overline{M^{par_2}}$ = 63 **j** - (48.6 **k**)

$\overline{M^{par_2}}$ = 63 **j** - 48.6 **k**

Por último, se obtiene el vector momento del par de fuerzas que tiene 71 N de magnitud y al que se denomina $\overline{F_3}$.

Dado que una de las fuerzas de dicho par, $\overline{F_3}$ pasa por los puntos E y G, y este último es el punto medio de A y B, por lo que el vector de posición de G es el promedio aritmético de los vectores de posición de A y de B:

$\overline{r_A}$ = {0, 0, 0.7}

$\overline{r_B}$ = {0.6, 0, 0}

$\overline{r_G} = \frac{\overline{r_A}+\overline{r_B}}{2}$

$\overline{r_G} = \frac{1}{2}$ ({0, 0, 0.7} + {0.6, 0, 0})

$\overline{r_G} = \frac{1}{2}$ ({0.6, 0, 0.7}

$\overline{r_G} = \{0.3, 0, 0.35\}$

De donde, la representación vectorial de $\overline{F_3}$ es su magnitud, 71 N, por el vector unitario de $\overline{\text{EG}}$:

$\overline{\text{EG}} = \overline{r_G} - \overline{r_E}$

$\overline{\text{EG}} = \{0.3, 0, 0.35\} - \{0, 0.54, 0.7\}$

$\overline{\text{EG}} = \{0.3, -0.54, -0.35\}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = \sqrt{0.3^2 + (-0.54)^2 + (-0.35)^2}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = \sqrt{0.09 + 0.2916 + 0.1225}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = \sqrt{0.5041}$

$|\,\overline{\text{EG}}\,| = 0.71$

$\overline{e_{\text{EG}}} = \frac{\overline{\text{EG}}}{|\,\overline{\text{EG}}\,|}$

$\overline{e_{\text{EG}}} = \frac{1}{0.71}\,\{0.3, -0.54, -0.35\}$

$\overline{F_3} = \frac{71}{0.71}\,\{0.3, -0.54, -0.35\}$

$\overline{F_3} = \{30, -54, -35\}$

Para obtener el vector momento del par de fuerzas de 71 N de magnitud, se establece el vector que va de F a G, donde F es el punto medio de C y E:

$\overline{r_C} = \{0.6, 0.54, 0\}$

$\overline{r_E} = \{0, 0.54, 0.7\}$

$\overline{r_F} = \frac{\overline{r_C} + \overline{r_E}}{2}$

$\overline{r_F} = \frac{1}{2}\,(\{0.6, 0.54, 0\} + \{0, 0.54, 0.7\})$

$\overline{r_F} = \frac{1}{2}\,\{0.6, 1.08, 0.7\}$

$\overline{r_F} = \{0.3, 0.54, 0.35\}$

$\overline{r_G} = \{0.3, 0, 0.35\}$

$\overline{\text{FG}} = \overline{r_G} - \overline{r_F}$

$\overline{\text{FG}} = \{0.3, 0, 0.35\} - \{0.3, 0.54, 0.35\}$

$\overline{\text{FG}} = \{0, -0.54, 0\}$

Ahora, se obtiene el producto vectorial de $\overline{\text{FG}}$ y la fuerza $\overline{F_3}$:

$\overline{M^{\text{par}_3}} = \overline{\text{FG}} \times \overline{F_3}$

$\overline{M^{\text{par}_3}} = \{0, -0.54, 0\} \times \{30, -54, -35\}$

$\overline{M^{\text{par}_3}} = 16.2\,\mathbf{k} + 18.9\,\mathbf{i}$

Se puede verificar este resultado con el cálculo del determinante asociado a este producto vectorial:

$$\overline{M^{\text{par}_3}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -0.54 & 0 \\ 30 & -54 & -35 \end{pmatrix}$$

$\overline{M^{\text{par}_3}} = 18.9\,\mathbf{i} - (-16.2\,\mathbf{k})$

$\overline{M^{\text{par}_3}} = 18.9\,\mathbf{i} + 16.2\,\mathbf{k}$

Por último, el momento del par equivalente es la suma de los tres vectores momento obtenidos:

$\overline{M^R} = \overline{M^{par_1}} + \overline{M^{par_2}} + \overline{M^{par_3}}$

$\overline{M^R} = 56\,\mathbf{i} + 63\,\mathbf{j} - 48.6\,\mathbf{k} + 18.9\,\mathbf{i} + 16.2\,\mathbf{k}$

$\overline{M^R} = 74.9\,\mathbf{i} + 63\,\mathbf{j} - 32.4\,\mathbf{k}$

El vector momento del par equivalente a los tres pares de fuerzas es:

$\overline{M^R} = 74.9\,\mathbf{i} + 63\,\mathbf{j} - 32.4\,\mathbf{k}$.

Dado que se requiere obtener tanto la magnitud como la dirección de este último vector, su magnitud se puede obtener con el módulo respectivo:

$|\,\overline{M^R}\,| = \sqrt{74.9^2 + 63^2 + (-32.4)^2}$

$|\,\overline{M^R}\,| = \sqrt{5610.01 + 3969 + 1049.76}$

$|\,\overline{M^R}\,| = \sqrt{10\,628.77}$

$|\,\overline{M^R}\,| = 103.096$ N·m

La magnitud del momento del par equivalente es de 103.096 N.m.

La dirección del vector del momento del par equivalente se obtiene con base en el vector unitario:

$\overline{e_{M^R}} = \frac{\overline{M^R}}{|\,\overline{M^R}\,|}$

$\overline{e_{M^R}} = \frac{1}{103.096}\,\{74.9, 63, -32.4\}$

$\overline{e_{M^R}} = \{0.7265, 0.6111, -0.3143\}$

Por consiguiente, los ángulos directores serán los ángulos cuyo coseno son las componentes del vector unitario obtenido:

α = ArcCos [0.7265]

$\alpha = 43.41°$

β = ArcCos [0.6111]

$\beta = 52.33°$

γ = ArcCos [-0.3143]

$\gamma = 108.32°$

Los ángulos directores del vector del momento del par equivalente son:

$\alpha = 43.41°$, $\beta = 52.33°$ y $\gamma = 108.32°$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
F1 = {0, 80, 0};
F2 = {90, 0, 0};
magF3 = 71;
rA = {0, 0, 0.7};
rB = {0.6, 0, 0};
rC = {0.6, 0.54, 0};
rD = {0, 0.54, 0};
rE = {0, 0.54, 0.7};
rF = (rC + rE)/2
rG = (rA + rB)/2
```

Momento del par de fuerzas de 80 N de magnitud:

```
AD = rD - rA
Mpar1 = AD × F1
```

Momento del par de fuerzas de 90 N de magnitud:

```
BE = rE - rB
Mpar2 = BE × F2
```

Vector que contiene a la fuerza de 71 N:

```
EG = rG - rE
eEG = Normalize[EG]
F3 = magF3 eEG
```

Momento del par de fuerzas de 71 N de magnitud:

```
FG = rG - rF
Mpar3 = FG × F3
```

Momento equivalente de los tres pares:

```
Mres = Mpar1 + Mpar2 + Mpar3
```

Magnitud del momento equivalente:

```
magMres = Norm[Mres]
```

Vector unitario del momento equivalente, para calcular los cosenos directores de su vector:

```
eMres = Normalize[Mres]
```

Cálculo de los ángulos directores del vector del momento equivalente, en radianes:

```
Ángulos = ArcCos[eMres]
```

Ángulos directores, en grados sexagesimales:

```
ÁngulosGrados = Ángulos / °
```

Verificación del momento del par de fuerzas de la fuerza de 71 N, con base en el vector que va del punto B al punto E:

```
BE = rE - rB
MparF3Nvo = BE × F3
```

Ejercicio 2.16

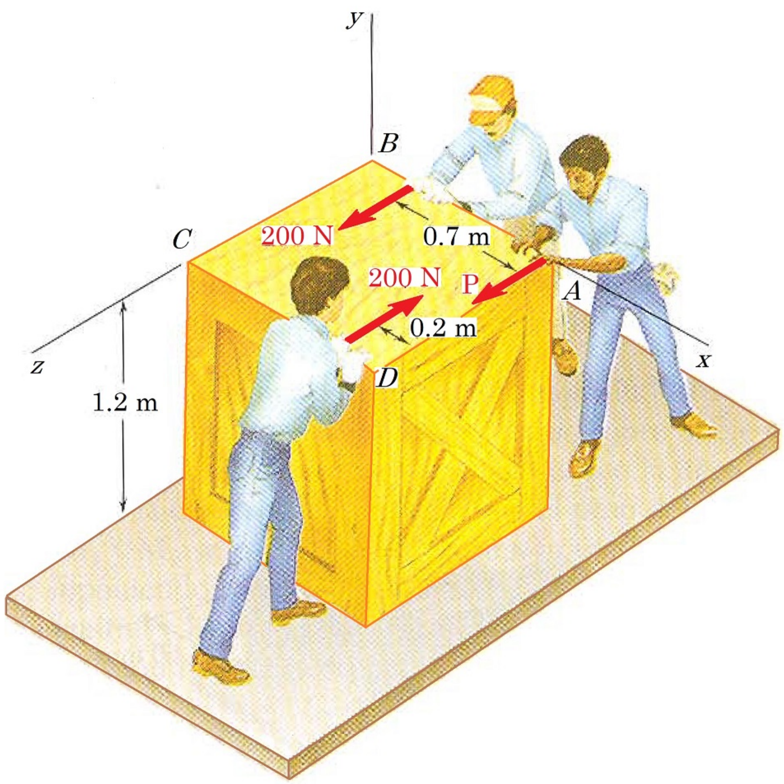
Problema 3.85, Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 119.

Tres trabajadores tratan de mover una caja de madera de 1 × 1 × 1.2 m aplicando las tres fuerzas horizontales que se muestran en la figura.

a) Si *P = 240 N*, reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza-par equivalente en *A*.

b) Reemplace el sistema fuerza-par del inciso *a)* por una sola fuerza, y determine el lugar del lado *AB* sobre el que debería aplicarse.

c) Determine la magnitud de **P**, de tal forma que las tres fuerzas puedan reemplazarse por una sola fuerza aplicada en *B*.



a) Si P = 240 N, reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza-par equivalente en *A*

En este caso, puede observarse que las fuerzas de 200 N forman un par de fuerzas y, por consiguiente, la fuerza a considerar para el sistema equivalente es $\overline{P}$:

$\overline{R_1} = \{0, 0, 240\}$ N

Con respecto al momento equivalente en A, es la suma del momento del par de fuerzas y el que genera la fuerza $\overline{P}$ respecto al punto A. Dado que dicha fuerza pasa por A, su momento es nulo:

$\overline{M_A^P} = \overline{0}$

de donde:

$\overline{M^R} = \overline{M^{\text{par}}}$

El momento del par de fuerzas se calcula como el producto cruz del vector que va del punto de aplicación de la fuerza de 200 N cercano al punto D, cuyo vector de posición se le denominará $\overline{r_E}$, al punto de aplicación de la otra fuerza de 200 N cercano a B, punto F, por el vector que representa a esta última fuerza $\overline{F_2}$:

$\overline{r_E} = \{1 - 0.2, 0, 1\}$

$\overline{r_F} = \{1 - 0.7, 0, 0\}$

$\overline{F_2} = \{0, 0, 200\}$ N

$\overline{M^{par}} = \overline{EF} \times \overline{F_2}$

$\overline{EF} = \overline{r_F} - \overline{r_E}$

$\overline{EF} = \{0.3, 0, 0\} - \{0.8, 0, 1\}$

$\overline{EF} = \{-0.5, 0, -1\}$

$\overline{M^{par}} = \{-0.5, 0, -1\} \times \{0, 0, 200\}$

Aplicando la distributividad del producto cruz:

$\overline{M^{par}} = (-0.5\,\mathbf{i}) \times (200\,\mathbf{k}) + (-\mathbf{k}) \times (200\,\mathbf{k})$

$\overline{M^{par}} = -100\,(-\mathbf{j}) + \overline{0}$

$\overline{M^{par}} = 100\,\mathbf{j}$

Por tanto:

$\overline{M_1^R} = 100\,\mathbf{j}$ N·m

El sistema fuerza-par equivalente en el punto A al mostrado en la figura es: $\overline{R_1} = \{0, 0, 240\}$ N con un momento $\overline{M^R} = 100\,\mathbf{j}$ N·m.

b) Reemplace el sistema fuerza-par del inciso *a)* por una sola fuerza, y determine el lugar del lado *AB* sobre el que debería aplicarse

Dado que si dos sistemas de fuerzas son equivalentes, la resultante de fuerzas de ambos sistemas deben ser iguales, así como la resultante de momentos con respecto al mismo punto, el sistema equivalente buscado tendrá la misma resultante que el anterior:

$\overline{R_2} = \overline{R_1}$

$\overline{R_2} = \{0, 0, 240\}$ N

Si el momento de este sistema equivalente es nulo, entonces el momento que debe producir esta resultante $\overline{R_2}$ respecto a A debe ser igual al momento resultante del sistema anterior $\overline{M_1^R}$. Si se desea determinar un punto de la recta que pasa por los puntos A y B en la que se interseque la línea de acción de $\overline{R_2}$, dicho punto desconocido tendrá el siguiente vector de posición:

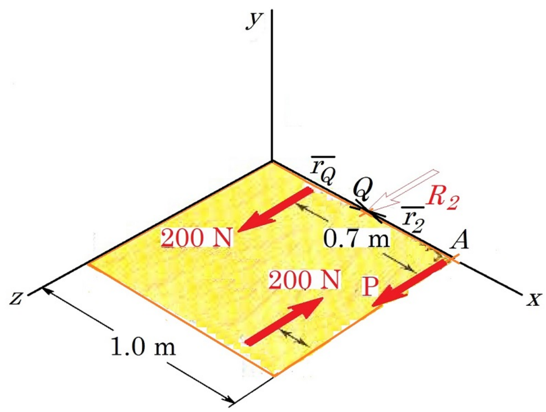
$\overline{r_Q} = \{x, 0, 0\}$

Por lo que el vector para calcular el momento respecto a A es:

$\overline{r_2} = \overline{r_Q} - \overline{r_A}$

$\overline{r_2} = \{x, 0, 0\} - \{1, 0, 0\}$

$\overline{r_2} = \{x - 1, 0, 0\}$



Entonces, el momento de $\overline{R_2}$ respecto a A es:

$\overline{M_A^{R_2}} = \overline{r_2} \times \overline{R_2}$

$\overline{M_A^{R_2}} = \{x - 1, 0, 0\} \times \{0, 0, 240\}$

$\overline{M_A^{R_2}} = (x - 1)\,\mathbf{i} \times (240\,\mathbf{k})$

$\overline{M_A^{R_2}} = 240\,(x - 1)\,(-\mathbf{j})$

$\overline{M_A^{R_2}} = (240 - 240\,x)\,\mathbf{j}$

Dado que este último momento debe ser igual al momento del sistema anterior, $\overline{M_1^R}$, se puede establecer la siguiente expresión:

$(240 - 240\,x)\,\mathbf{j} = 100\,\mathbf{j}$

$240 - 240\,x = 100$

$240\,x = 240 - 100$

$x = \frac{140}{240}$

$x = 0.5833$ m

El sistema mostrado en la figura es equivalente a una sola fuerza:

$\overline{R_2} = 240\,\mathbf{k}$ N

aplicada a 0.5833 m a la derecha del punto B (origen) sobre la recta que pasa por los puntos A y B.

c) Determine la magnitud de P, de tal forma que las tres fuerzas puedan reemplazarse por una sola fuerza aplicada en *B*

Si el sistema mostrado en la figura cuya fuerza resultante tenga una magnitud **P** desconocida aplicada en A, sea equivalente a una sola fuerza aplicada en B, implica que esa sola fuerza también debe tener una magnitud **P**, y el momento que produzca esa fuerza respecto a A sea igual al momento resultante del primer sistema de fuerzas, es decir, al momento generado por el par de fuerzas. Entonces, dado que la representación vectorial de dicha fuerza resultante es:

$\overline{R_3} = \{0, 0, P\}$

su momento respecto a A es:

$\overline{M_A^{R_3}} = \overline{AB} \times \overline{R_3}$

Dado que $\overline{AB}$ es:

$\overline{AB} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$

y B es el origen, es decir, $\overline{r_B} = \overline{0}$, entonces:

$\overline{AB} = -\overline{r_A}$

$\overline{M_A^{R_3}} = \{-1, 0, 0\} \times \{0, 0, P\}$

$\overline{M_A^{R_3}} = (-\mathbf{i}) \times (P\ \mathbf{k})$

$\overline{M_A^{R_3}} = (-P)\ (-\mathbf{j})$

$\overline{M_A^{R_3}} = P\ \mathbf{j}$

Por tanto:

$\overline{M_A^{R_3}} = \overline{M^{\text{par}}}$

$P\ \mathbf{j} = 100\ \mathbf{j}$

P = 100 N

La magnitud **P** de la única fuerza aplicada en B tal que sea equivalente al sistema de fuerzas mostrado en la figura es:

P = 100 N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

a) Si P = 240 N, reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza-par equivalente en *A*

```
R1 = {0, 0, 240};
rE = {1 - 0.2, 0, 1};
rF = {1 - 0.7, 0, 0};
F2 = {0, 0, 200};
EF = rF - rE
Mpar = EF × F2
MR1A = Mpar
```

b) Reemplace el sistema fuerza - par del inciso a) por una sola fuerza, y determine el lugar del lado AB sobre el que debería aplicarse

```
R2 = R1
rA = {1, 0, 0}
rQ = {x, 0, 0}
r2 = rQ - rA
MR2A = r2 × R2
ecMRA1 = MR1A == MR2A
resp1 = Solve[ecMRA1]
xSol = x /. resp1[[1]]
```

c) Determine la magnitud de P, de tal forma que las tres fuerzas puedan reemplazarse por una sola fuerza aplicada en *B*

```
R3 = {0, 0, P};
rB = {0, 0, 0};
AB = rB - rA
MR3A = AB × R3
ecMRA2 = MR1A == MR3A
resp1 = Solve[ecMRA2]
PSol = P /. resp1⟦1⟧
```

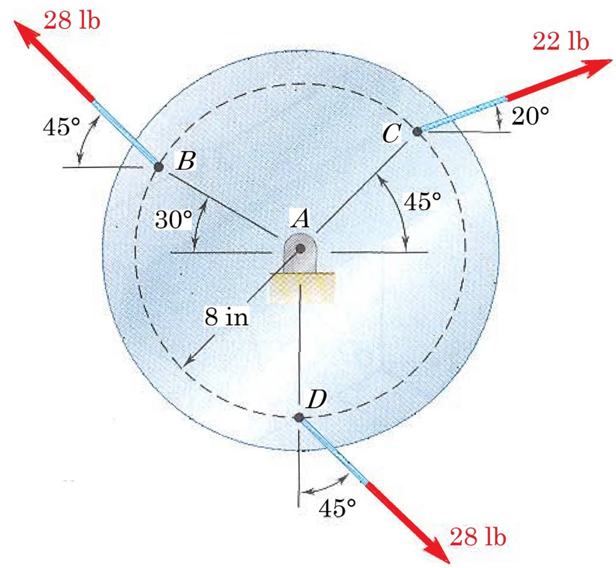
Ejercicio 2.17

Problema 3.87 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8^{a} edición, McGraw-Hill, p. 119.

Tres cables conectados a un disco ejercen sobre éste las fuerzas indicadas en la figura.

a) Reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza - par equivalente en A.

b) Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza - par obtenido en el inciso *a)*, y especifique su punto de aplicación sobre la línea que pasa por los puntos A y D.



Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si la resultante de fuerzas del primer sistema es igual a la resultante correspondiente del segundo y, además, la resultante de momentos respecto a un punto (cualquier punto) del primer sistema es igual a la resultante de momentos respecto al mismo punto del segundo.

a) Reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza - par equivalente en A

En este caso, se puede considerar que las tres fuerzas son "individuales". La resultante de fuerzas de sistema se puede obtener suponiendo que pasan por el mismo punto, y entonces, solo se requiere sumar los vectores que representan a cada una de ellas.

La representación vectorial de las fuerzas es la siguiente:

$\overline{F_B} = 28\,\{-\text{Cos}\,[45°],\ \text{Sin}\,[45°],\ 0\}$

$\overline{F_B} = 28\,\{-0.7071,\ 0.7071,\ 0\}$

$\overline{F_B} = \{-19.80,\ 19.80,\ 0\}$ lb

$\overline{F_C} = 22\,\{\text{Cos}\,[20°],\ \text{Sin}\,[20°],\ 0\}$

$\overline{F_C} = 22\,\{0.9397,\ 0.3420,\ 0\}$

$\overline{F_C} = \{20.67,\ 7.52,\ 0\}$ lb

$\overline{F_D} = 28\,\{\text{Sin}\,[45°],\ -\text{Cos}[45°],\ 0\}$

$\overline{F_D} = 28\,\{0.7071,\ -0.7071,\ 0\}$

$\overline{F_D} = \{19.80,\ -19.80,\ 0\}$ lb

De donde la resultante de fuerzas del primer sistema es:

$\overline{R_1} = \overline{F_B} + \overline{F_C} + \overline{F_D}$

$\overline{R_1}$ = {-19.80, 19.80, 0} + {20.67, 7.52, 0} + {19.80, -19.80, 0}

$\overline{R_1}$ = {20.67, 7.52, 0} lb

A continuación, se obtiene el momento resultante del primer sistema de fuerzas respecto al punto A:

$\overline{\text{AB}}$ = 8 {-Cos[30°], Sin[30°], 0}

$\overline{\text{AB}}$ = 8 {-0.8660, 0.5, 0}

$\overline{\text{AB}}$ = {-6.93, 4, 0} in

$\overline{M_A^{F_B}} = \overline{\text{AB}} \times \overline{F_B}$

$\overline{M_A^{F_B}}$ = {-6.93, 4, 0} × {-19.80, 19.80, 0}

$$\overline{M_A^{F_B}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -6.93 & 4 & 0 \\ -19.80 & 19.80 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{M_A^{F_B}}$ = -137.17 **k** - (-79.20 **k**)

$\overline{M_A^{F_B}}$ = -57.97 **k** lb·in

Para obtener el momento respecto a A de la fuerza $\overline{F_C}$, se establece primero el vector que va de A a C:

$\overline{\text{AC}}$ = 8 {Cos [45°], Sin [45°], 0}

$\overline{\text{AC}}$ = {5.66, 5.66, 0} in

Por tanto:

$\overline{M_A^{F_C}} = \overline{\text{AC}} \times \overline{F_C}$

$\overline{M_A^{F_C}}$ = {5.66, 5.66, 0} × {20.67, 7.52, 0}

$$\overline{M_A^{F_C}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5.66 & 5.66 & 0 \\ 20.67 & 7.52 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{M_A^{F_C}}$ = 42.57 **k** - (116.95 **k**)

$\overline{M_A^{F_C}}$ = -74.38 **k** lb·in

Ahora, se obtiene el momento respecto a A de la fuerza $\overline{F_D}$, considerando el vector que va de A a D:

$\overline{\text{AD}}$ = 8 {0, -1, 0}

$\overline{\text{AD}}$ = {0, -8, 0} in

por consiguiente:

$\overline{M_A^{F_D}} = \overline{\text{AD}} \times \overline{F_D}$

$\overline{M_A^{F_D}}$ = {0, -8, 0} × {19.80, -19.80, 0}

$$\overline{M_A^{F_D}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -8 & 0 \\ 19.80 & -19.80 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{M_A^{F_D}}$ = - (-158.39 **k**)

$\overline{M_A^{F_D}}$ = 158.39 **k** lb·in

De donde el momento resultante del primer sistema simplemente es la suma de los tres momentos anteriores:

$$\overline{M_A^{R_1}} = \overline{M_A^{F_B}} + \overline{M_A^{F_C}} + \overline{M_A^{F_D}}$$

$$\overline{M_A^{R_1}} = -57.98\ \mathbf{k} - 74.38\ \mathbf{k} + 158.39\ \mathbf{k}$$

$$\overline{M_A^{R_1}} = 26.04\ \mathbf{k}\ \text{lb·in}$$

El sistema fuerza par resultante en el punto A es el siguiente:

$\overline{R_1} = \{20.67, 7.52, 0\}$ lb y $\overline{M_A^R} = 26.04\ \mathbf{k}$ lb·in.

b) **Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza - par obtenido en el inciso a), y especifique su punto de aplicación sobre la línea que pasa por los puntos A y D**

La fuerza resultante de este otro sistema debe ser la resultante del primero:

$$\overline{R_2} = \{20.6732, 7.5244, 0\}\ \text{lb}$$

El momento respecto al punto A que produzca esta resultante, $\overline{R_2}$, debe ser igual al momento resultante del primer sistema, $\overline{M_A^{R_1}}$, para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes:

$$\overline{M_A^{R_2}} = \overline{M_A^{R_1}}$$

Para determinar el segundo momento, se puede considerar que pasa por un punto del segmento AD cuyas coordenadas son (0, y, 0), por consiguiente:

$$\overline{M_A^{R_2}} = \{0, y, 0\} \times \overline{R_2}$$

$$\overline{M_A^{R_2}} = \text{Det}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & y & 0 \\ 20.67 & 7.52 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_A^{R_2}} = -(20.67\ y\ \mathbf{k})$$

$$\overline{M_A^{R_2}} = -20.67\ y\ \mathbf{k}$$

De donde:

$$\overline{M_A^{R_2}} = \overline{M_A^{R_1}}$$

$$-20.67\ y\ \mathbf{k} = 26.04\ \mathbf{k}$$

$$y = \frac{26.04}{-20.62}$$

$$y = -1.26\ \text{in}$$

La fuerza única que es equivalente al sistema fuerza-par anterior es:

$\overline{R_2} = \{20.67, 7.52, 0\}$ lb

y su punto de aplicación sobre la recta que pasa por los puntos A y D está a 1.26 in debajo del punto A.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

a) Reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza - par equivalente en A

Datos :

```
rB = 8 {-Cos[30 °], Sin[30 °], 0}
rC = 8 {Cos[45 °], Sin[45 °], 0}
rD = {0, -8, 0}
FB = N[28 {-Cos[45 °], Sin[45 °], 0}]
FC = N[22 {Cos[20 °], Sin[20 °], 0}]
FD = N[28 {Sin[45 °], -Cos[45 °], 0}]
```

Considerando una fuerza y un par de fuerzas, la fuerza es:

```
R11 = FC
```

Momento del par de fuerzas:

```
DB = rB - rD
Mpar = DB × FB
```

Momento de FC con respecto de A:

```
MFCA = rC × FC
```

Momento del sistema fuerza-par equivalente en A:

```
Mequiv11 = Mpar + MFCA
```

Cálculo de los momentos respecto a A de cada una de las fuerzas, considerando las tres fuerzas por separado:

```
MFBA = rB × FB
MFCA = rC × FC
MFDA = rD × FD
```

Cálculo del momento del par equivalente :

```
Mequiv12 = MFBA + MFCA + MFDA
```

Cálculo de la fuerza resultante :

```
R12 = FB + FC + FD
```

b) **Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza - par obtenido en el inciso *a)*, y especifique su punto de aplicación sobre la línea que pasa por los puntos A y D**

```
rP = {0, y, 0}
Mequiv2 = rP × R12
```

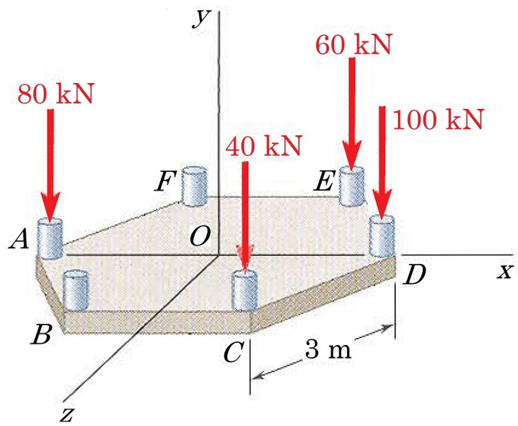
Para que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes, la suma de fuerzas deben ser iguales, así como la suma de momentos con respecto del mismo punto, por consiguiente, para que los sistemas 2 y 3 sean equivalentes, se debe cumplir la siguiente ecuación :

```
ecuación = Mequiv12 == Mequiv2
resp = Solve[ecuación]
rRes = y /. resp〚1〛
```

Ejercicio 2.18

Problema 3.123 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 142

Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 3 m soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como indica la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.



Con base en el concepto de que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si la resultante de fuerzas y la resultante de momentos respecto a algún punto de un sistema es igual a la resultante de fuerzas y de momentos respecto al mismo punto, respectivamente, del segundo sistema, se determinan dichas resultantes. Primero, se obtiene la resultante de las fuerzas, suponiendo que todas son concurrentes en el origen.

$\overline{F_A} = \{0, -80{,}000, 0\}$

$\overline{F_C} = \{0, -40{,}000, 0\}$

$\overline{F_D} = \{0, -100{,}000, 0\}$

$\overline{F_E} = \{0, -60{,}000, 0\}$

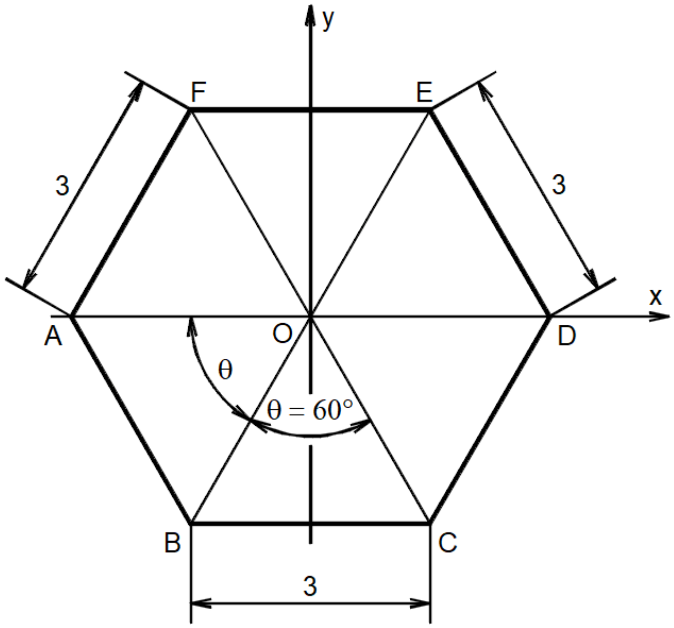
$\overline{R_1} = \overline{F_A} + \overline{F_C} + \overline{F_D} + \overline{F_E}$

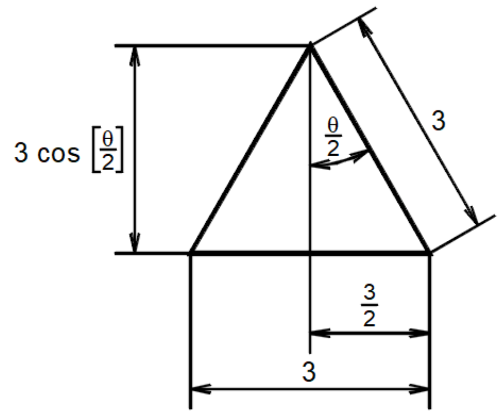
$\overline{R_1} = \{0, -80{,}000, 0\} + \{0, -40{,}000, 0\} + \{0, -100{,}000, 0\} + \{0, -60{,}000, 0\}$

$\overline{R_1} = \{0, -280{,}000, 0\}$ N

En el caso de los momentos, corresponden a los denominados pares de transporte, que son aquellos que teóricamente se requiere agregar para hacer que todas las fuerzas sean concurrentes en el punto respecto al que se obtienen dichos momentos y, de esta manera, sea posible sumar las fuerzas mencionadas. En este caso se escogió el origen.

Dado que la base de concreto tiene la forma de un hexágono regular, este se puede subdividir en seis triángulos equiláteros, por lo que todos los lados de dichos triángulos son iguales; asimismo, su altura es igual al coseno de la mitad del ángulo central de 60° por la longitud de dicho lado, tal como se muestra en la siguiente figura:





Por consiguiente, los vectores de posición de los puntos de interés son:

$\overline{r_A} = \{-3, 0, 0\}$

$\overline{r_C} = \{\frac{3}{2}, 0, 3\ \text{Cos}\left[\frac{60\,°}{2}\right]\}$

$\overline{r_C} = \{1.5, 0, 3\ (0.8660)\}$

$\overline{r_C} = \{1.5, 0, 2.60\}$

$\overline{r_D} = \{3, 0, 0\}$

$\overline{r_E} = \{\frac{3}{2}, 0, -3\ \text{Cos}\left[\frac{60\,°}{2}\right]\}$

$\overline{r_E} = \{1.5, 0, -2.60\}$

De donde el momento de $\overline{F_A}$ respecto al origen es:

$\overline{M_O^{F_A}} = \overline{r_A} \times \overline{F_A}$

$\overline{M_O^{F_A}} = \{-3, 0, 0\} \times \{0, -80{,}000, 0\}$

Con base en la distributividad del producto vectorial:

$\overline{M_O^{F_A}} = (-3\ \mathbf{i}) \times (-80{,}000\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{F_A}} = 240{,}000\ \mathbf{k}$

El momento de $\overline{F_C}$ respecto al origen es:

$\overline{M_O^{F_C}} = \overline{r_C} \times \overline{F_C}$

$\overline{M_O^{F_C}} = \{1.5, 0, 2.60\} \times \{0, -40{,}000, 0\}$

$\overline{M_O^{F_C}} = (1.5\ \mathbf{i}) \times (-40{,}000\ \mathbf{j}) + (2.60\ \mathbf{k}) \times (-40{,}000\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{F_C}} = -60{,}000\ \mathbf{k} + (-103{,}900)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_C}} = 103{,}900\ \mathbf{i} - 60{,}000\ \mathbf{k}$

En el caso del momento de $\overline{F_D}$ respecto al origen:

$\overline{M_O^{F_D}} = \overline{r_D} \times \overline{F_D}$

$\overline{M_O^{F_D}} = \{3, 0, 0\} \times \{0, -100{,}000, 0\}$

$\overline{M_O^{F_D}} = (3\ \mathbf{i}) \times (-100{,}000\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{F_D}}$ = (-300,000) (**k**)

$\overline{M_O^{F_D}}$ = -300,000 **k**

Finalmente, el momento de $\overline{F_E}$ respecto al origen es:

$\overline{M_O^{F_E}} = \overline{r_E} \times \overline{F_E}$

$\overline{M_O^{F_E}}$ = {1.5, 0, -2.60} × {0, -60,000, 0}

$\overline{M_O^{F_E}}$ = (1.5 **i**) × (-60,000 **j**) + (-2.60 **k**) × (-60,000 **j**)

$\overline{M_O^{F_E}}$ = (-90,000 **k**) + (155,900) (-**i**)

$\overline{M_O^{F_E}}$ = -155,900 **i** - 90,000 **k**

Entonces, la resultante de momentos respecto al origen es:

$\overline{M_O^{R_1}} = \overline{M_O^{F_A}} + \overline{M_O^{F_C}} + \overline{M_O^{F_D}} + \overline{M_O^{F_E}}$

$\overline{M_O^{R_1}}$ = 240,000 **k** + 103,900 **i** - 60,000 **k** + (-300,000 **k**) + (-155,900 **i** - 90,000 **k**)

$\overline{M_O^{R_1}}$ = -52,000 **i** - 210,000 **k**

A partir de los resultados obtenidos, se requiere obtener un sistema equivalente formado por una sola fuerza resultante, igual a $\overline{R_1}$, por tanto:

$\overline{R_2} = \overline{R_1}$

$\overline{R_2}$ = {0, -280,000, 0} N

Con respecto al momento resultante, el que produzca $\overline{R_2}$ aplicada en un punto específico de la base de concreto, debe ser igual a $\overline{M_O^{R_1}}$. Entonces, si dicho punto desconocido, que se le bautiza como P, está sobre dicho cuerpo, su vector de posición es:

$\overline{r_P}$ = {x, 0, z}

Por lo que el momento de $\overline{R_2}$ respecto al origen es:

$\overline{M_O^{R_2}} = \overline{r_P} \times \overline{R_2}$

$\overline{M_O^{R_2}}$ = {x, 0, z} × {0, -280,000, 0}

Con base en la distributividad del producto cruz, se obtiene:

$\overline{M_O^{R_2}}$ = (x **i**) × (-280,000 **j**) + (z **k**) × (-280,000 **j**)

$\overline{M_O^{R_2}}$ = (-280,000 x) (**k**) + (-280,000 z) (-**i**)

$\overline{M_O^{R_2}}$ = 280,000 z **i** - 280,000 x **k**

Dado que este momento debe ser igual al del sistema original, $\overline{M_O^{R_1}}$:

$\overline{M_O^{R_2}} = \overline{M_O^{R_1}}$

280,000 z **i** - 280,000 x **k** = -52,000 **i** - 210,000 **k**

De donde:

$280{,}000\ z = -52{,}000$

$z = \frac{-52{,}000}{280{,}000}$

$z = -0.1857$ m

$-280{,}000\ x = -\ 210{,}000$

$x = \frac{-210{,}000}{-280{,}000}$

$x = 0.75$ m

La magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas originales es:

$R_2 = 280{,}000$ N, y

P(0.75, 0, -0.1857) m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
rA = 3 {-1, 0, 0};
rC = 3 {Sin[30 °], 0, Cos[30 °]}
rD = 3 {1, 0, 0};
rE = 3 {Sin[30 °], 0, -Cos[30 °]}
```

```
FA = 80 × 10^3 {0, -1, 0};
FC = 40 × 10^3 {0, -1, 0};
FD = 100 × 10^3 {0, -1, 0};
FE = 60 × 10^3 {0, -1, 0};
```

Cálculo de los momentos de los pares de transporte al origen:

```
MFAO = rA × FA
MFCO = rC × FC
MFDO = rD × FD
MFEO = rE × FE
```

Cálculo del sistema fuerza-par equivalente en el origen:

```
R1 = FA + FC + FD + FE
MRO1 = MFAO + MFCO + MFDO + MFEO // N
```

El sistema equivalente de fuerzas mínimo es una sola fuerza (la fuerza resultante) igual a R1, aplicada en un punto P(x, 0, z):

```
R2 = R1
rP = {x, 0, z}
MRO2 = rP × R2
```

Para que el sistema de fuerzas 2 y el sistema de fuerzas 1 sean equivalentes, MRO1 = MRO2, por consiguiente:

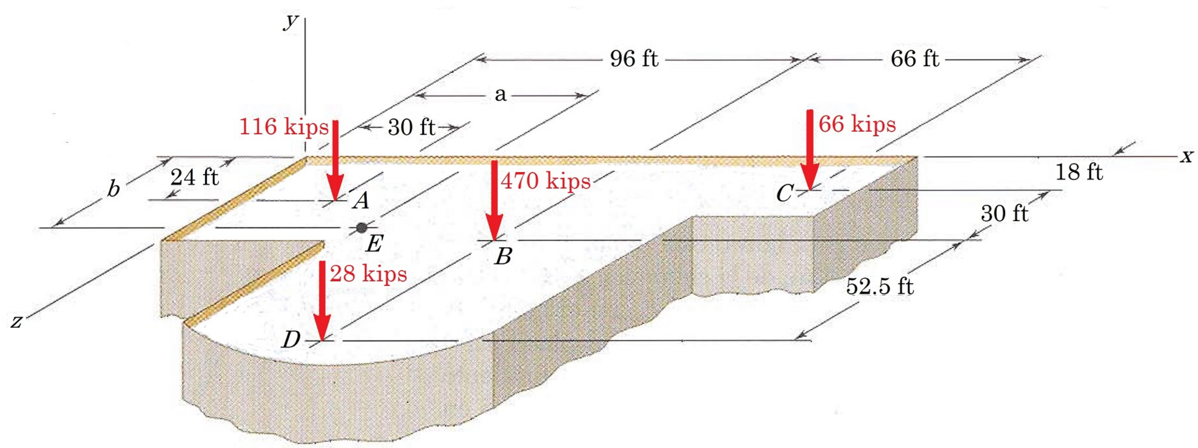
```
ec1 = MRO1 == MRO2
resp1 = Solve[ec1]
xSol = x /. resp1⟦1⟧ // N
zSol = z /. resp1⟦1⟧ // N
magR2 = Norm[R2]
MRO1
MRO2 /. {x → xSol, z → zSol}
```

Se puede verificar que los valores de MRO2 y MRO3 efectivamente son iguales.

Ejercicio 2.19

Problema 3.126 Beer, Johnston & Eisenberg, Mecánica vectorial para ingenieros, Estática, 8ª edición, McGraw-Hill, p. 142

Las fuerzas mostradas en la figura son la resultante de las cargas verticales hacia abajo ejercidas sobre las secciones del techo plano de una construcción, y se deben a la nieve acumulada. Si la nieve representada por la fuerza de 116 kips se remueve de manera que actúe en el punto E, determine *a* y *b* si el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas está entonces en B.



Este problema se puede resolver de dos maneras lógicas.
La primera es igualar el momento resultante respecto al origen del sistema de las cuatro cargas verticales con la fuerza de 116 kips ya ubicada en el punto E, al momento respecto al origen de la resultante de las cuatro cargas aplicada en el punto B.
Con base en este razonamiento, si todas las cargas se "transportan" al origen, los momentos de los pares de transporte son justamente los momentos de cada carga respecto al origen. Por consiguiente, la resultante es:

$$\overline{R_1} = \overline{F_B} + \overline{F_C} + \overline{F_D} + \overline{F_E}$$

donde:

$$\overline{F_B} = \{0, -470, 0\} \text{ kips}$$
$$\overline{F_C} = \{0, -66, 0\} \text{ kips}$$
$$\overline{F_D} = \{0, -28, 0\} \text{ kips}$$
$$\overline{F_E} = \{0, -116, 0\} \text{ kips}$$

Por consiguiente:

$$\overline{R_1} = \{0, -470, 0\} + \{0, -66, 0\} + \{0, -28, 0\} + \{0, -116, 0\}$$
$$\overline{R_1} = \{0, -680, 0\} \text{ kips}$$

Para calcular el momento resultante, se requiere conocer los vectores con respecto al origen, en este caso iguales a los vectores de posición, de los puntos de aplicación de las cargas B, C, D y E:

$\overline{r_B}$ = {96, 0, 48} ft

$\overline{r_C}$ = {162, 0, 18} ft

$\overline{r_D}$ = {96, 0, 100.5} ft

$\overline{r_E}$ = {a, 0, b} ft

Por tanto:

$\overline{M_O^{F_B}} = \overline{r_B} \times \overline{F_B}$

$\overline{M_O^{F_B}}$ = {96, 0, 48} × {0, -470, 0}

Con base en la distributividad del producto cruz se obtiene:

$\overline{M_O^{F_B}} = (96\ \mathbf{i}) \times (-470\ \mathbf{j}) + (48\ \mathbf{k}) \times (-470\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{F_B}} = (-45{,}120)\ (\mathbf{k}) + (-22{,}560)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_B}} = 22{,}560\ \mathbf{i} - 45{,}120\ \mathbf{k}$

Con respecto al momento de la fuerza $\overline{F_C}$, se tiene:

$\overline{M_O^{F_C}} = \overline{r_C} \times \overline{F_C}$

$\overline{M_O^{F_C}}$ = {162, 0, 18} × {0, -66, 0}

$\overline{M_O^{F_C}} = (162\ \mathbf{i}) \times (-66\ \mathbf{j}) + (18\ \mathbf{k}) \times (-66\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{F_C}} = (-10{,}692)\ (\mathbf{k}) + (-1{,}188)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_C}} = 1{,}188\ \mathbf{i} - 10{,}692\ \mathbf{k}$

El momento de $\overline{F_D}$ respecto al origen es:

$\overline{M_O^{F_D}} = \overline{r_D} \times \overline{F_D}$

$\overline{M_O^{F_D}}$ = {96, 0, 100.5} × {0, -28, 0}

$\overline{M_O^{F_D}} = (96\ \mathbf{i}) \times (-28\ \mathbf{j}) + (100.5\ \mathbf{k}) \times (-28\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{F_D}} = (-2{,}688)\ (\mathbf{k}) + (-2{,}814)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_D}} = 2{,}814\ \mathbf{i} - 2{,}688\ \mathbf{k}$

Por último, se obtiene el momento de $\overline{F_E}$:

$\overline{M_O^{F_E}} = \overline{r_E} \times \overline{F_E}$

$\overline{M_O^{F_E}}$ = {a, 0, b} × {0, -116, 0}

$\overline{M_O^{F_E}} = (a\ \mathbf{i}) \times (-116\ \mathbf{j}) + (b\ \mathbf{k}) \times (-116\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{F_E}} = (-116\ a)\ (\mathbf{k}) + (-116\ b)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_E}} = 116\ b\ \mathbf{i} - 116\ a\ \mathbf{k}$

Entonces, el momento resultante respecto al origen es:

$\overline{M_O^{R_1}} = \overline{M_O^{F_B}} + \overline{M_O^{F_C}} + \overline{M_O^{F_D}} + \overline{M_O^{F_E}}$

$\overline{M_O^{R_1}} = 22{,}560\ \mathbf{i} - 45{,}120\ \mathbf{k} + 1{,}188\ \mathbf{i} - 10{,}692\ \mathbf{k} + 2{,}814\ \mathbf{i} - 2{,}688\ \mathbf{k} + 116\ b\ \mathbf{i} - 116\ a\ \mathbf{k}$

$\overline{M_O^{R_1}} = (26{,}562 + 116\ b)\ \mathbf{i} - (58{,}500 + 116\ a)\ \mathbf{k}$

Dado que la resultante del sistema formado por una sola carga aplicada en B es igual a la resultante del sistema anterior:

$\overline{R_2} = \overline{R_1}$

$\overline{R_2} = \{0, -680, 0\}$ kips

Y su momento respecto al origen es:

$\overline{M_O^{R_2}} = \overline{r_B} \times \overline{R_2}$

$\overline{M_O^{R_2}} = \{96, 0, 48\} \times \{0, -680, 0\}$

$\overline{M_O^{R_2}} = (96\ \mathbf{i}) \times (-680\ \mathbf{j}) + (48\ \mathbf{k}) \times (-680\ \mathbf{j})$

$\overline{M_O^{R_2}} = (-65{,}280)\ (\mathbf{k}) + (-32{,}640)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{R_2}} = 32{,}640\ \mathbf{i} - 65{,}280\ \mathbf{k}$

Como este último momento debe ser igual al del sistema original:

$\overline{M_O^{R_2}} = \overline{M_O^{R_1}}$

$32{,}640\ \mathbf{i} - 65{,}280\ \mathbf{k} = (26{,}562 + 116\ b)\ \mathbf{i} - (58{,}500 + 116\ a)\ \mathbf{k}$

$32{,}640 = 26{,}562 + 116\ b$

$116\ b = 32{,}640 - 26{,}562$

$b = \frac{6{,}078}{116}$

$b = 52.40$ ft

$-65{,}280 = -\ (58{,}500 + 116\ a)$

$65{,}280 = 58{,}500 + 116\ a$

$116\ a = 65{,}280 - 58{,}500$

$a = \frac{6{,}780}{116}$

$a = 58.45$ ft

El punto de aplicación de la carga de 116 kips debe estar en:
E(58.45, 0, 52.40) ft
para que el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas esté en B.

La segunda forma, más sencilla que la primera, es obtener los momentos de las cuatro cargas respecto a B e igualarla a cero, debido a que si la resultante de dichas cargas pasa por B, su momento respecto a dicho punto es nulo. En este caso, es necesario obtener los vectores que van de B al punto de aplicación de las otras tres cargas:

$\overline{BC} = \overline{r_C} - \overline{r_B}$

$\overline{BC} = \{162, 0, 18\} - \{96, 0, 48\}$

$\overline{BC} = \{66, 0, -30\}$ ft

$\overline{BD} = \overline{r_C} - \overline{r_B}$

$\overline{BD} = \{96, 0, 100.5\} - \{96, 0, 48\}$

$\overline{BD} = \{0, 0, 52.5\}$ ft

$\overline{BE} = \overline{r_C} - \overline{r_B}$

$\overline{BE} = \{a, 0, b\} - \{96, 0, 48\}$

$\overline{BE} = \{a - 96, 0, b - 48\}$ ft

Y los momentos de las cargas respecto a B son:

$\overline{M_B^{F_B}} = \overline{0} \times \overline{F_B}$

$\overline{M_B^{F_B}} = \overline{0}$

El de la carga $\overline{F_C}$ es:

$\overline{M_B^{F_C}} = \overline{BC} \times \overline{F_C}$

$\overline{M_B^{F_C}} = \{66, 0, -30\} \times \{0, -66, 0\}$

$\overline{M_B^{F_C}} = (66\ \mathbf{i}) \times (-66\ \mathbf{j}) + (-30\ \mathbf{k}) \times (-66\ \mathbf{j})$

$\overline{M_B^{F_C}} = (-4{,}356)\ (\mathbf{k}) + (1{,}980)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_B^{F_C}} = -1{,}980\ \mathbf{i} - 4{,}356\ \mathbf{k}$

El momento de la carga $\overline{F_D}$ respecto a B es:

$\overline{M_B^{F_D}} = \overline{BD} \times \overline{F_D}$

$\overline{M_B^{F_D}} = \{0, 0, 52.5\} \times \{0, -28, 0\}$

$\overline{M_B^{F_D}} = (52.5\ \mathbf{k}) \times (-28\ \mathbf{j})$

$\overline{M_B^{F_D}} = (-1{,}470)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_B^{F_D}} = 1{,}470\ \mathbf{i}$

Finalmente, el momento de la carga $\overline{F_E}$ es:

$\overline{M_B^{F_E}} = \overline{BE} \times \overline{F_E}$

$\overline{M_B^{F_E}} = \{a - 96, 0, b - 48\} \times \{0, -116, 0\}$

$\overline{M_B^{F_E}} = (a - 96)\ \mathbf{i} \times (-116\ \mathbf{j}) + (b - 48)\ \mathbf{k} \times (-116\ \mathbf{j})$

$\overline{M_B^{F_E}} = (11{,}136 - 116\ a)\ (\mathbf{k}) + (5{,}568 - 116\ b)\ (-\mathbf{i})$

$\overline{M_B^{F_E}} = (116\ b - 5{,}568)\ \mathbf{i} + (11{,}136 - 116\ a)\ \mathbf{k}$

Dado que la suma de estos momentos debe ser igual a cero:

$\overline{0} + -1{,}980\ \mathbf{i} - 4{,}356\ \mathbf{k} + 1{,}470\ \mathbf{i} + (116\ b - 5{,}568)\ \mathbf{i} + (11{,}136 - 116\ a)\ \mathbf{k} = \overline{0}$

Al igualar las componentes en x, por un lado, y las de z, por otro, se obtiene:

$-1{,}980 + 1{,}470 + 116\ b - 5{,}568 = 0$

$116\ b = 1{,}980 - 1{,}470 + 5{,}568$

$b = \frac{6{,}078}{116}$

$b = 52.40$ ft

$-4{,}356 + 11{,}136 - 116\ a = 0$

$116\ a = 6{,}780$

$a = \frac{6{,}780}{116}$

$a = 58.45$ ft

Como se puede observar, los valores de a y b son exactamente los mismos que los obtenidos con el desarrollo anterior.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
FB = {0, -470, 0};
FC = {0, -66, 0};
FD = {0, -28, 0};
FE = {0, -116, 0};
```

Cálculo de la resultante de las cuatro cargas:

```
R1 = FB + FC + FD + FE
```

Cálculo de los momentos de los pares de transporte al origen:

```
rB = {96, 0, 48};
rC = {162, 0, 18};
rD = {96, 0, 100.5};
rE = {a, 0, b};
MFBO = rB × FB
MFCO = rC × FC
MFDO = rD × FD
MFEO = rE × FE
```

Cálculo del momento resultante respecto al origen:

```
MRO1 = MFBO + MFCO + MFDO + MFEO // N
```

Cálculo del momento de la carga resultante respecto al origen:

```
R2 = R1
MRO2 = rB × R2
```

Este último momento resultante debe ser igual al correspondiente al sistema original:

```
ec1 = MRO1 == MRO2
resp1 = Solve[ec1]
aSol1 = a /. resp1⟦1⟧
bSol1 = b /. resp1⟦1⟧
```

Segunda forma de resolución:

```
BC = rC - rB
BD = rD - rB
BE = rE - rB
MFBB = {0, 0, 0} × FB
MFCB = BC × FC
MFDB = BD × FD
MFEB = BE × FE
```

El momento resultante respecto al punto B debe ser igual al vector nulo:

```
ec2 = MFBB + MFCB + MFDB + MFEB == {0, 0, 0}
resp2 = Solve[ec2]
aSol2 = a /. resp2[[1]] // N
bSol2 = b /. resp2[[1]]
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Mecánica
Julio de 2022

Yukihiro Minami Koyama
Gloria Ramírez Romero