FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 3:

Determinación experimental del centroide de un cuerpo

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

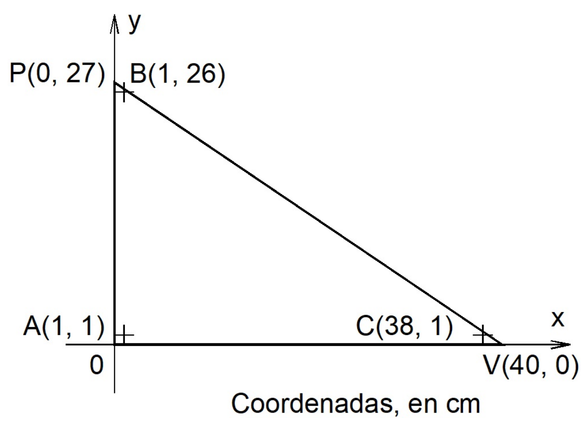
M.I Yukihiro Minami Koyama

Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

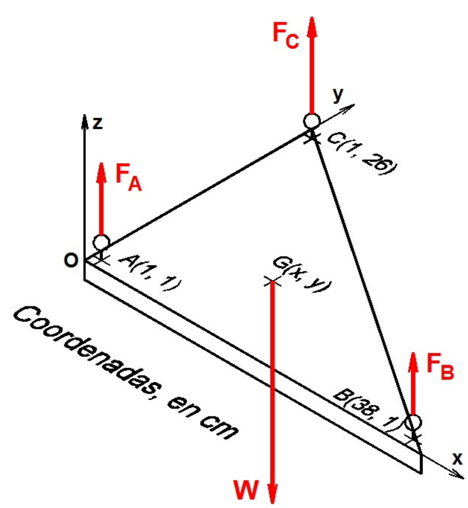
Tema 3
Determinación experimental del centroide de un cuerpo

Ejercicio 3.1

Obtenga la posición del centro de gravedad de una tabla con forma de triángulo rectángulo, como el mostrado en la figura, si se cuelga al cuerpo de tres armellas y cuerdas de manera que quede en posición horizontal y se miden las tensiones en cada cuerda, las cuales fueron en todos los casos de 2 N. Las armellas se localizarán cerca de los vértices del triángulo. Para simplificar la verificación de la posición de dicho centro de gravedad, establezca un marco de referencia formado por los ejes x e y coincidentes con los catetos del triángulo.



El centro de gravedad de un cuerpo es el punto en el que puede considerarse que está concentrado todo el peso del cuerpo.
En la siguiente figura se muestra el diagrama de cuerpo libre de la tabla, en el que no se conoce la ubicación del centro de gravedad G(x, y) de la misma.



Dado que la tabla está en equilibrio, pueden aplicarse las ecuaciones de equilibrio, es decir, que tanto la resultante de fuerzas como la resultante de momentos respecto a cualquier punto debe ser igual a cero.

Se escriben las ecuaciones de equilibrio, primero con la resultante de fuerzas, con base en la enunciado del problema, en el que se establece que todas las fuerzas tienen una magnitud de 2 N:

$\overline{F_A}$ = {0, 0, 2} N

$\overline{F_B}$ = {0, 0, 2} N

$\overline{F_C}$ = {0, 0, 2} N

$\overline{W}$ = {0, 0, -magW}

$\overline{F_A} + \overline{F_B} + \overline{F_C} + \overline{W} = \overline{0}$

{0, 0, 2} + {0, 0, 2} + {0, 0, 2} + {0, 0, -magW} = {0, 0, 0}

De donde se puede deducir la siguiente ecuación escalar:

2 + 2 + 2 - magW = 0

magW = 6 N

Ahora, se establece la resultante de momentos de las fuerzas respecto a algún punto. Por facilidad se escoge el origen, por lo que se requiere determinar el producto vectorial del vector de posición de un punto por donde pasa la fuerza con esta misma:

$\overline{r_A}$ = {1, 1, 0} cm

$\overline{r_B}$ = {38, 1, 0} cm

$\overline{r_C}$ = {1, 26, 0} cm

$\overline{r_G}$ = {x, y, 0}

$\overline{M_O^{F_A}} = \overline{r_A} \times \overline{F_A}$

$\overline{M_O^{F_A}}$ = {1, 1, 0} × {0, 0, 2}

$\overline{M_O^{F_A}} = (\mathbf{i}) \times (2\,\mathbf{k}) + (\mathbf{j}) \times (2\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{F_A}} = (2)\,(-\mathbf{j}) + (2)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_A}} = 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$ N·m

$\overline{M_O^{F_B}} = \overline{r_B} \times \overline{F_B}$

$\overline{M_O^{F_B}}$ = {38, 1, 0} × {0, 0, 2}

$\overline{M_O^{F_B}} = (38\,\mathbf{i}) \times (2\,\mathbf{k}) + (\mathbf{j}) \times (2\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{F_B}} = (76)\,(-\mathbf{j}) + (2)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_B}} = 2\,\mathbf{i} - 76\,\mathbf{j}$ N·m

$\overline{M_O^{F_C}} = \overline{r_C} \times \overline{F_C}$

$\overline{M_O^{F_C}}$ = {1, 26, 0} × {0, 0, 2}

$\overline{M_O^{F_C}} = (\mathbf{i}) \times (2\,\mathbf{k}) + (26\,\mathbf{j}) \times (2\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{F_C}} = (2)\,(-\mathbf{j}) + (52)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_C}} = 52\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$ N·m

$\overline{M_O^{W}} = \overline{r_G} \times \overline{W}$

$\overline{M_O^{W}}$ = {x, y, 0} × {0, 0, -6}

$\overline{M_O^W} = (x\,\mathbf{i}) \times (-6\,\mathbf{k}) + (y\,\mathbf{j}) \times (-6\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^W} = (-6\,x)\,(-\mathbf{j}) + (-6\,y)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^W} = -6\,y\,\mathbf{i} + 6\,x\,\mathbf{j}$

Por consiguiente:

$\overline{M_O^{F_A}} + \overline{M_O^{F_B}} + \overline{M_O^{F_C}} + \overline{M_O^W} = \overline{0}$

$2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{i} - 76\,\mathbf{j} + 52\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 6\,y\,\mathbf{i} + 6\,x\,\mathbf{j} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j}$

De donde se pueden establecer las siguientes ecuaciones escalares:

$2 + 2 + 52 - 6\,y = 0$

$-2 - 76 - 2 + 6\,x = 0$

Por tanto:

$56 - 6\,y = 0$

$6\,y = 56$

$y = \frac{56}{6}$

$y = 9.33$ cm

$-80 + 6\,x = 0$

$6\,x = 80$

$x = \frac{80}{6}$

$x = 13.33$ cm

Las coordenadas del centro de gravedad, G, de la tabla con forma de triángulo rectángulo son:

G(13.33, 9.33, 0) cm.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
FA = {0, 0, 2};
FB = {0, 0, 2};
FC = {0, 0, 2};
W = {0, 0, -magW};
```

Cálculo de la resultante de las cuatro cargas:

```
ecEquilibrio1 = FA + FB + FC + W == {0, 0, 0}
resp1 = Solve[ecEquilibrio1]
        resuelve
magWSol = magW /. resp1[[1]]
```

Cálculo de los momentos de los pares de transporte al origen:

```
rA = {1, 1, 0};
rB = {38, 1, 0};
rC = {1, 26, 0};
rG = {x, y, 0};
MFAO = rA × FA
MFBO = rB × FB
MFCO = rC × FC
MWO = rG × W /. magW → magWSol
```

Cálculo del momento resultante respecto al origen:

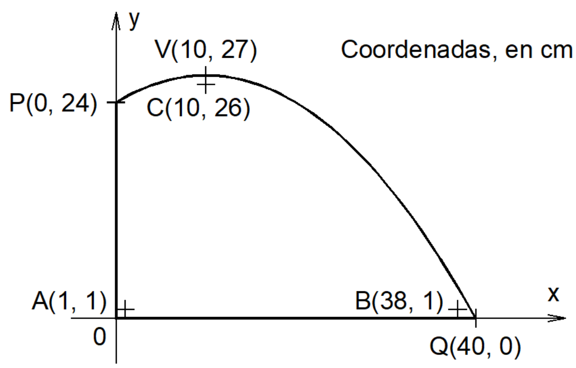
```
ecEquilibrio2 = MFAO + MFBO + MFCO + MWO == {0, 0, 0}
```

Solución de la ecuación de equilibrio de momentos:

```
resp2 = Solve[ecEquilibrio2]
        resuelve
xSol = x /. resp2[[1]]
ySol = y /. resp2[[1]]
```

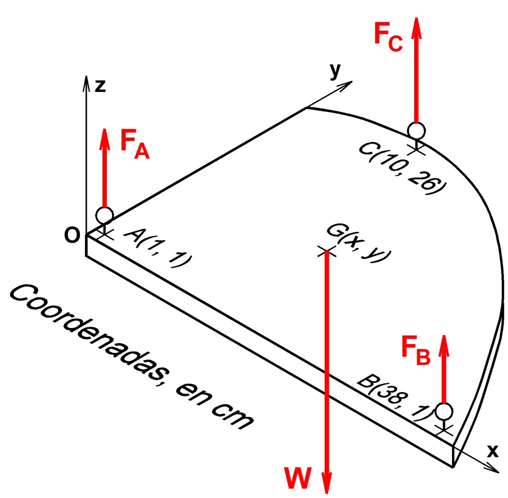
Ejercicio 3.2

Obtenga las coordenadas del centro de gravedad de una tabla con perfil parabólico, como el mostrado en la figura, si se cuelga al cuerpo de tres armellas y cuerdas, de manera que quede en posición horizontal y se miden las tensiones en cada cuerda, las cuales fueron, en la armella A de 2.8 N, en la B de 2.4 N y en la armella C de 3.8 N.
Para simplificar la verificación de la posición de dicho centro de gravedad, se propone un marco de referencia formado por los ejes x e y, el primero coincidente con el lado recto mencionado, y el origen en el vértice inferior izquierdo.



Aquí conviene recordar que el centro de gravedad de un cuerpo es el punto en el que puede considerarse que está concentrado todo el peso del cuerpo. Es el sistema equivalente mínimo en que todas las fuerzas diferenciales que componen cada partícula del cuerpo se sustituyen por una sola fuerza aplicada en dicho punto y, por consiguiente, el momento resultante respecto a este centro de gravedad es nulo.
Para este problema, dado que la tabla está en equilibrio, también pueden aplicarse las ecuaciones de equilibrio, es decir, que tanto la resultante de fuerzas como la resultante de momentos respecto a cualquier punto debe ser igual a cero.

Las fuerzas que actúan sobre la tabla son las tres fuerzas de tensión aplicada en cada una de las armellas y el peso de dicho cuerpo, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre siguiente:



Entonces, se establecen las ecuaciones de equilibrio, primero con la resultante de fuerzas:

$\overline{F_A} = \{0, 0, 2.8\}$ N

$\overline{F_B} = \{0, 0, 2.4\}$ N

$\overline{F_C} = \{0, 0, 3.8\}$ N

$\overline{W} = \{0, 0, -\text{magW}\}$

$\overline{F_A} + \overline{F_B} + \overline{F_C} + \overline{W} = \overline{0}$

$\{0, 0, 2.8\} + \{0, 0, 2.4\} + \{0, 0, 3.8\} + \{0, 0, -\text{magW}\} = \{0, 0, 0\}$

De donde se puede deducir la siguiente ecuación escalar:

$2.8 + 2.4 + 3.8 - \text{magW} = 0$

$\text{magW} = 9.0$ N

Posteriormente, se calculan los momentos de las tres fuerzas, $\overline{F_A}$, $\overline{F_B}$ y $\overline{F_C}$, así como del peso, $\overline{W}$, respecto al origen:

$\overline{r_A} = \{1, 1, 0\}$ cm

$\overline{r_B} = \{38, 1, 0\}$ cm

$\overline{r_C} = \{10, 26, 0\}$ cm

$\overline{r_G} = \{x, y, 0\}$

$\overline{M_O^{F_A}} = \overline{r_A} \times \overline{F_A}$

$\overline{M_O^{F_A}} = \{1, 1, 0\} \times \{0, 0, 2.8\}$

$\overline{M_O^{F_A}} = (\mathbf{i}) \times (2.8\,\mathbf{k}) + (\mathbf{j}) \times (2.8\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{F_A}} = (2.8)\,(-\mathbf{j}) + (2.8)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_A}} = 2.8\,\mathbf{i} - 2.8\,\mathbf{j}$ N·m

$\overline{M_O^{F_B}} = \overline{r_B} \times \overline{F_B}$

$\overline{M_O^{F_B}} = \{38, 1, 0\} \times \{0, 0, 2.4\}$

$\overline{M_O^{F_B}} = (38\,\mathbf{i}) \times (2.4\,\mathbf{k}) + (\mathbf{j}) \times (2.4\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{F_B}} = (91.2)\,(-\mathbf{j}) + (2.4)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_B}} = 2.4\,\mathbf{i} - 91.2\,\mathbf{j}$ N·m

$\overline{M_O^{F_C}} = \overline{r_C} \times \overline{F_C}$

$\overline{M_O^{F_C}} = \{10, 26, 0\} \times \{0, 0, 3.8\}$

$\overline{M_O^{F_C}} = (10\,\mathbf{i}) \times (3.8\,\mathbf{k}) + (26\,\mathbf{j}) \times (3.8\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{F_C}} = (38)\,(-\mathbf{j}) + (98.8)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{F_C}} = 98.8\,\mathbf{i} - 38\,\mathbf{j}$ N·m

$\overline{M_O^{W}} = \overline{r_G} \times \overline{W}$

$\overline{M_O^{W}} = \{x, y, 0\} \times \{0, 0, -9\}$

$\overline{M_O^{W}} = (x\,\mathbf{i}) \times (-9\,\mathbf{k}) + (y\,\mathbf{j}) \times (-9\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{W}} = (-9\,x)\,(-\mathbf{j}) + (-9\,y)\,(\mathbf{i})$

$\overline{M_O^{W}} = -9\,y\,\mathbf{i} + 9\,x\,\mathbf{j}$

Se establece la ecuación de equilibrio de los momentos respecto al origen:

$$\overline{M_O^{F_A}} + \overline{M_O^{F_B}} + \overline{M_O^{F_C}} + \overline{M_O^{W}} = \overline{0}$$

$$2.8\,\mathbf{i} - 2.8\,\mathbf{j} + 2.4\,\mathbf{i} - 91.2\,\mathbf{j} + 98.8\,\mathbf{i} - 38\,\mathbf{j} - 9\,y\,\mathbf{i} + 9\,x\,\mathbf{j} = \{0, 0, 0\}$$

A partir de la ecuación vectorial anterior, se determinan las siguientes ecuaciones escalares:

$$2.8 + 2.4 + 98.8 - 9\,y = 0$$

$$-2.8 - 91.2 - 38 + 9\,x = 0$$

De donde:

$$9\,y = 104$$

$$y = \frac{104}{9}$$

$$y = 11.56\text{ cm}$$

$$9\,x = 132$$

$$x = \frac{132}{9}$$

$$x = 14.67\text{ cm}$$

Las coordenadas del centro de gravedad, G, de la tabla con perfil parabólico son: G(14.67, 11.56, 0) cm.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
FA = {0, 0, 2.8};
FB = {0, 0, 2.4};
FC = {0, 0, 3.8};
W = {0, 0, -magW};
```

Cálculo de la resultante de las cuatro cargas:

```
ecEquilibrio1 = FA + FB + FC + W == {0, 0, 0}
resp1 = Solve[ecEquilibrio1]
        resuelve
magWSol = magW /. resp1[[1]]
```

Cálculo de los momentos de los pares de transporte al origen:

```
rA = {1, 1, 0};
rB = {38, 1, 0};
rC = {10, 26, 0};
rG = {x, y, 0};
MFAO = rA × FA
MFBO = rB × FB
MFCO = rC × FC
MWO = rG × W /. magW → magWSol
```

Cálculo del momento resultante respecto al origen:

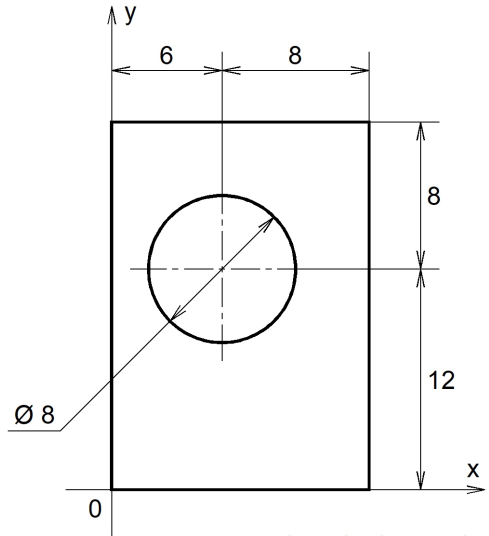
```
ecEquilibrio2 = MFAO + MFBO + MFCO + MWO == {0, 0, 0}
```

Solución de la ecuación de equilibrio de momentos:

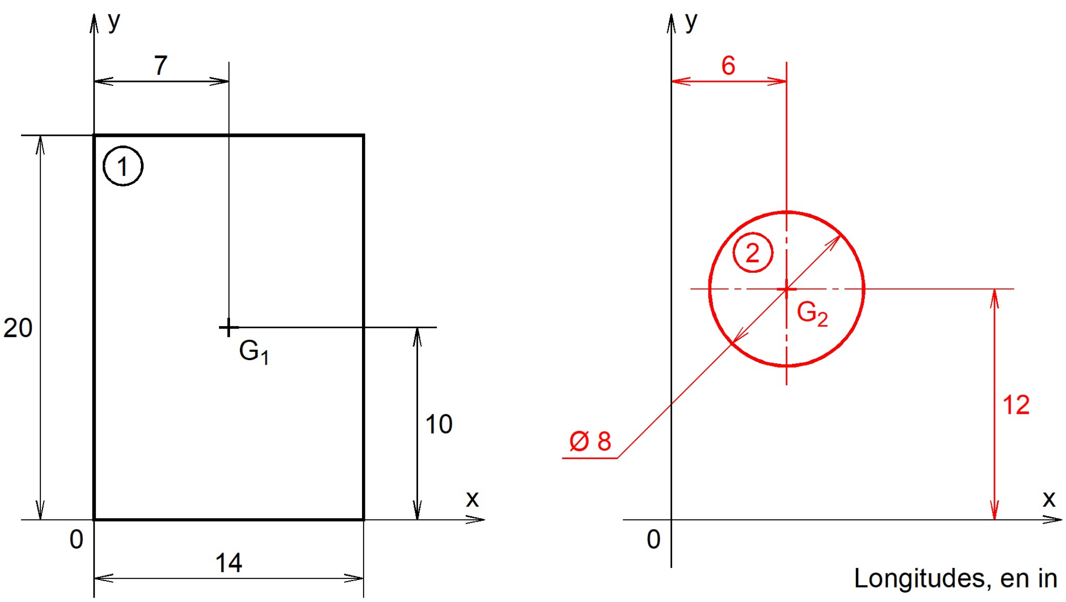
```
resp2 = Solve[ecEquilibrio2]
        resuelve
xSol = x /. resp2[[1]]
ySol = y /. resp2[[1]]
```

Ejercicio 3.3

Determine el centro de masa G(x, y), de una placa de madera homogénea y de espesor constante, cortada como se muestra en la figura, con base en el marco de referencia proporcionado.



Para obtener el centro de masa de la placa de madera, el cual es el mismo que el centroide de la figura plana debido a que es homogénea y de espesor constante, se puede subdividir en dos figuras primitivas, la primera el rectángulo de 14 x 20 in, y la segunda el círculo vacío de 8 in de diámetro. Los centroides de dichas primitivas, G_1 y G_2, se muestran en la siguiente figura:



Las áreas de dichas primitivas son, para el rectángulo:

$b_1 = 14$

$h_1 = 20$

$A_1 = b_1\, h_1$

$A_1 = (14)\,(20)$

$A_1 = 280\ \text{in}^2$

Para el círculo, dado que es vacío, se considera que es negativa:

$\varnothing_2 = 8$

$R_2 = 4$

$A_2 = -\pi R^2$

$A_2 = -\pi\, 4^2$

$A_2 = -\pi\,(16)$

$A_2 = -50.27\ \text{in}^2$

Para determinar las coordenadas centroidales de la placa de madera, es necesario calcular los productos de las áreas por las coordenadas centroidales de cada una de las primitivas.
Para simplificar su obtención, conviene emplear la siguiente tabla, en la que se incluya el identificador de cada primitiva, su área, sus coordenadas centroidales y los productos antes mencionados, así como la suma de las áreas y de los citados productos:

i	A_i	$\tilde{x}_{G,i}$	$\tilde{y}_{G,i}$	$A_i\,\tilde{x}_{G,i}$	$A_i\,\tilde{y}_{G,i}$
1	280	7	10	1960	2800
2	-50.27	6	12	-301.59	-603.19
Σ	229.73	–	–	1658.41	2196.81

Las coordenadas centroidales de la placa de madera se pueden encontrar con base en las siguientes expresiones:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i\,\tilde{x}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

$$x_G = \frac{1658.41}{229.73}$$

$$x_G = 7.22\ \text{in}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i\,\tilde{y}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

$$y_G = \frac{2196.81}{229.73}$$

$$y_G = 9.56\ \text{in}$$

Las coordenadas del centro de masa, G, de la placa de madera son:
G(7.22, 9.56) in.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos, en in:

```
b1 = 14;
h1 = 20;
d2 = 8;
```

Área y centroide de la figura 1:

```
A[1] = b1 h1
```

$$r[1] = \left\{\frac{b1}{2}, \frac{h1}{2}\right\}$$

Área y centroide de la figura 2:

$$A[2] = -\pi \left(\frac{d2}{2}\right)^2$$

```
r[2] = {6, 12}
```

Procedimiento auxiliar para obtener las coordenadas centroidales:

```
PrimerRenglón = {"i", "A[i]", "x[i]", "y[i]", "A[i]x[i]", "A[i]y[i]"}
SubTabla =
 Table[{i, A[i], r[i][[1]], r[i][[2]], A[i] × r[i][[1]], A[i] × r[i][[2]]}, {i, 1, 2}] // N
 tabla                                                                                   va
ÚltimoRenglón = {"-", Sum[A[i], {i, 1, 2}], "-", "-",
                      suma
   Sum[A[i] × r[i][[1]], {i, 1, 2}], Sum[A[i] × r[i][[2]], {i, 1, 2}]} // N
   suma                              suma                               valor numérico
Cuadro = {PrimerRenglón, SubTabla[[1]], SubTabla[[2]], ÚltimoRenglón}
```

Tabla para el cálculo de las coordenadas centroidales:

```
Tabla = MatrixForm[{PrimerRenglón, SubTabla[[1]], SubTabla[[2]], ÚltimoRenglón}]
        forma de matriz
```

Cálculo de las coordenadas centroidales:

```
SumaAi = Cuadro[[4]][[2]]
SumaAxi = Cuadro[[4]][[5]]
SumaAyi = Cuadro[[4]][[6]]
```

$$xG = \frac{SumaAxi}{SumaAi}$$

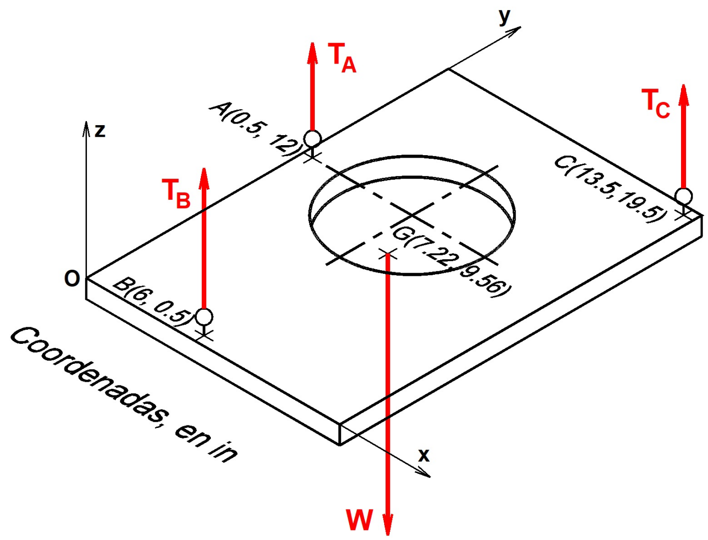
$$yG = \frac{SumaAyi}{SumaAi}$$

Ejercicio 3.4:

Si la placa de madera del ejercicio anterior se cuelga de tres cables en los puntos A(0.5, 12), B(6, 0.5) y C(13.5, 19.5) in y se hace que permanezca completamente horizontal, paralela al plano x-y, determine las tensiones en cada uno de los cables, T_A, T_B y T_C. Considere que el peso de la placa es de 50 lb.

Del ejercicio anterior, se sabe que el centro de masa de la placa se encuentra en G(7.22, 9.56) in.

Diagrama de cuerpo libre de la placa:



Dado que la placa está en equilibrio, se deben cumplir las condiciones de resultante de fuerzas igual a cero y resultante de momentos con respecto a cualquier punto también igual a cero.
Respecto a la resultante de fuerzas, se puede establecer la siguiente ecuación vectorial:

$$\overline{T_A} + \overline{T_B} + \overline{T_C} + \overline{W} = \overline{0}$$

donde:

$$\overline{T_A} = \{0, 0, \text{magT}_A\}$$

$$\overline{T_B} = \{0, 0, \text{magT}_B\}$$

$$\overline{T_C} = \{0, 0, \text{magT}_C\}$$

$$\overline{W} = \{0, 0, -50\}\ \text{lb}$$

Por tanto:

$$\{0, 0, \text{magT}_A\} + \{0, 0, \text{magT}_B\} + \{0, 0, \text{magT}_C\} + \{0, 0, -50\} = \{0, 0, 0\}$$

de donde:

$$\text{magT}_A + \text{magT}_B + \text{magT}_C - 50 = 0 \qquad (1)$$

En relación con la resultante de momentos, se escoge por facilidad el origen para su cálculo:

$$\overline{M_O^{T_A}} = \overline{r_A} \times \overline{T_A}$$

$$\overline{M_O^{T_A}} = \{0.5, 12, 0\} \times \{0, 0, \text{magT}_A\}$$

Empleando la propiedad de distributividad del producto vectorial:

$$\overline{M_O^{T_A}} = 0.5\,\mathbf{i} \times \text{magT}_A\,\mathbf{k} + 12\,\mathbf{j} \times \text{magT}_A\,\mathbf{k}$$

$$\overline{M_O^{T_A}} = 0.5\,\text{magT}_A\,(-\mathbf{j}) + 12\,\text{magT}_A\,\mathbf{i}$$

$$\overline{M_O^{T_A}} = 12\,\text{magT}_A\,\mathbf{i} - 0.5\,\text{magT}_A\,\mathbf{j}$$

De forma similar:

$\overline{M_O^{T_B}} = \overline{r_B} \times \overline{T_B}$

$\overline{M_O^{T_B}} = \{6, 0.5, 0\} \times \{0, 0, \mathrm{magT}_B\}$

$\overline{M_O^{T_B}} = 6\,\mathbf{i} \times \mathrm{magT}_B\,\mathbf{k} + 0.5\,\mathbf{j} \times \mathrm{magT}_B\,\mathbf{k}$

$\overline{M_O^{T_B}} = 6\,\mathrm{magT}_B\,(-\mathbf{j}) + 0.5\,\mathrm{magT}_B\,\mathbf{i}$

$\overline{M_O^{T_B}} = 0.5\,\mathrm{magT}_B\,\mathbf{i} - 6\,\mathrm{magT}_B\,\mathbf{j}$

Para la tensión $\overline{T_C}$ y el peso $\overline{W}$, sus momentos con respecto al origen quedan:

$\overline{M_O^{T_C}} = \overline{r_C} \times \overline{T_C}$

$\overline{M_O^{T_C}} = \{13.5, 19.5, 0\} \times \{0, 0, \mathrm{magT}_C\}$

$\overline{M_O^{T_C}} = 13.5\,\mathbf{i} \times \mathrm{magT}_C\,\mathbf{k} + 19.5\,\mathbf{j} \times \mathrm{magT}_C\,\mathbf{k}$

$\overline{M_O^{T_C}} = 13.5\,\mathrm{magT}_C\,(-\mathbf{j}) + 19.5\,\mathrm{magT}_C\,\mathbf{i}$

$\overline{M_O^{T_C}} = 19.5\,\mathrm{magT}_C\,\mathbf{i} - 13.5\,\mathrm{magT}_C\,\mathbf{j}$

$\overline{M_O^{W}} = \overline{r_G} \times \overline{W}$

$\overline{M_O^{W}} = \{7.22, 9.56, 0\} \times \{0, 0, -50\}$

$\overline{M_O^{W}} = 7.22\,\mathbf{i} \times (-50\,\mathbf{k}) + 9.56\,\mathbf{j} \times (-50\,\mathbf{k})$

$\overline{M_O^{W}} = -361\,(-\mathbf{j}) - 478\,\mathbf{i}$

$\overline{M_O^{W}} = -478\,\mathbf{i} + 361\,\mathbf{j}$

La resultante de momentos con respecto al origen debe ser igual a cero:

$\overline{M_O^{T_A}} + \overline{M_O^{T_B}} + \overline{M_O^{T_C}} + \overline{M_O^{W}} = \overline{0}$

$$12\,\mathrm{magT}_A\,\mathbf{i} - 0.5\,\mathrm{magT}_A\,\mathbf{j} + 0.5\,\mathrm{magT}_B\,\mathbf{i} - 6\,\mathrm{magT}_B\,\mathbf{j} + 19.5\,\mathrm{magT}_C\,\mathbf{i} - 13.5\,\mathrm{magT}_C\,\mathbf{j} + {} - 478\,\mathbf{i} + 361\,\mathbf{j} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j}$$

De la ecuación anterior, las ecuaciones escalares que pueden establecerse son:

$$12\,\mathrm{magT}_A + 0.5\,\mathrm{magT}_B + 19.5\,\mathrm{magT}_C - 478 = 0 \qquad (2)$$

$$-0.5\,\mathrm{magT}_A - 6\,\mathrm{magT}_B - 13.5\,\mathrm{magT}_C + 361 = 0 \qquad (3)$$

Se resuelve es sistema de ecuaciones formado por las expresiones 1, 2 y 3.

De 1, se despeja magT_A:

$\mathrm{magT}_A + \mathrm{magT}_B + \mathrm{magT}_C - 50 = 0$

$$\mathrm{magT}_A = 50 - \mathrm{magT}_B - \mathrm{magT}_C \qquad (4)$$

Se sustituye 4 en 2:

$12\,(50 - \mathrm{magT}_B - \mathrm{magT}_C) + 0.5\,\mathrm{magT}_B + 19.5\,\mathrm{magT}_C - 478 = 0$

$600 - 12\,\mathrm{magT}_B - 12\,\mathrm{magT}_C + 0.5\,\mathrm{magT}_B + 19.5\,\mathrm{magT}_C - 478 = 0$

$-11.5\,\mathrm{magT}_B + 7.5\,\mathrm{magT}_C = 478 - 600$

$-11.5\,\mathrm{magT}_B + 7.5\,\mathrm{magT}_C = -122$

$$11.5\,\mathrm{magT}_B - 7.5\,\mathrm{magT}_C = 122 \qquad (5)$$

Se sustituye 4 en 3:

$-0.5\ (50 - magT_B - magT_C) - 6\ magT_B - 13.5\ magT_C + 361 = 0$

$-25 + 0.5\ magT_B + 0.5\ magT_C - 6\ magT_B - 13.5\ magT_C + 361 = 0$

$-5.5\ magT_B - 13\ magT_C = -361 + 25$

$-5.5\ magT_B - 13\ magT_C = -336$

$5.5\ magT_B + 13\ magT_C = 336$ (6)

Se multiplica 5 por 13, 6 por 7.5, para eliminar $magT_C$, y se suman los resultados:

$(11.5\ magT_B - 7.5\ magT_C = 122) \times 13$

$(5.5\ magT_B + 13\ magT_C = 336) \times 7.5$

$149.5\ magT_B - 97.5\ magT_C = 1586$

$41.25\ magT_B + 97.5\ magT_C = 2520 \quad +$

____

$190.75\ magT_B = 4106$

$magT_B = \frac{4106}{190.75}$

$magT_B = 21.53$ lb (7)

Se sustituye 7 en 5:

$11.5\ magT_B - 7.5\ magT_C = 122$

$11.5\ (21.53) - 7.5\ magT_C = 122$

$247.54 - 7.5\ magT_C = 122$

$-247.54 + 7.5\ magT_C = -122$

$7.5\ magT_C = -122 + 247.54$

$magT_C = \frac{125.54}{7.5}$

$magT_C = 16.74$ lb (8)

Finalmente, se sustituyen 7 y 8 en 4:

$magT_A = 50 - magT_B - magT_C$

$magT_A = 50 - 21.53 - 16.74$

$magT_A = 50 - 38.27$

$magT_A = 11.73$ lb

Las tensiones de cada uno de los cables de los que se cuelga horizontalmente la placa de madera son:

$magT_A = 11.73$ lb, $magT_B = 21.53$ lb y $magT_C = 16.74$ lb.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magW = 50;
rA = {0.5, 12, 0};
rB = {6, 0.5, 0};
rC = {13.5, 19.5, 0};
rG = {7.22, 9.56, 0};
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
TA = {0, 0, magTA}
TB = {0, 0, magTB}
TC = {0, 0, magTC}
W = {0, 0, -magW}
```

Resultante de fuerzas igualada a cero:

```
ec1 = TA + TB + TC + W == {0, 0, 0}
```

Cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto al origen:

```
MTAO = rA × TA
MTBO = rB × TB
MTCO = rC × TC
MWO = rG × W
```

Momento resultante igualado a cero:

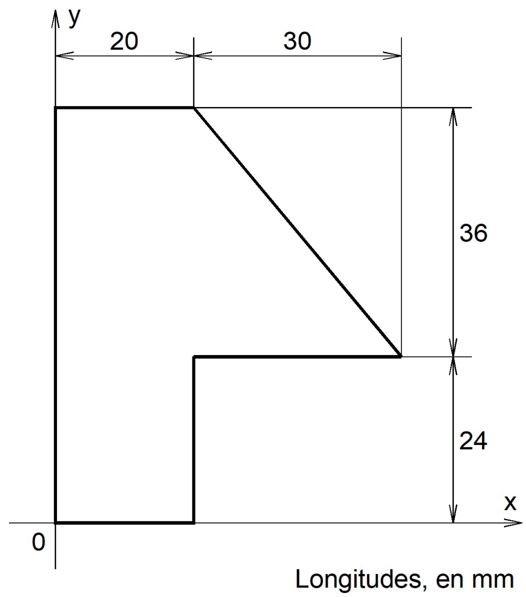
```
ec2 = MTAO + MTBO + MTCO + MWO == {0, 0, 0}
```

Resolución del sistema de ecuaciones vectoriales:

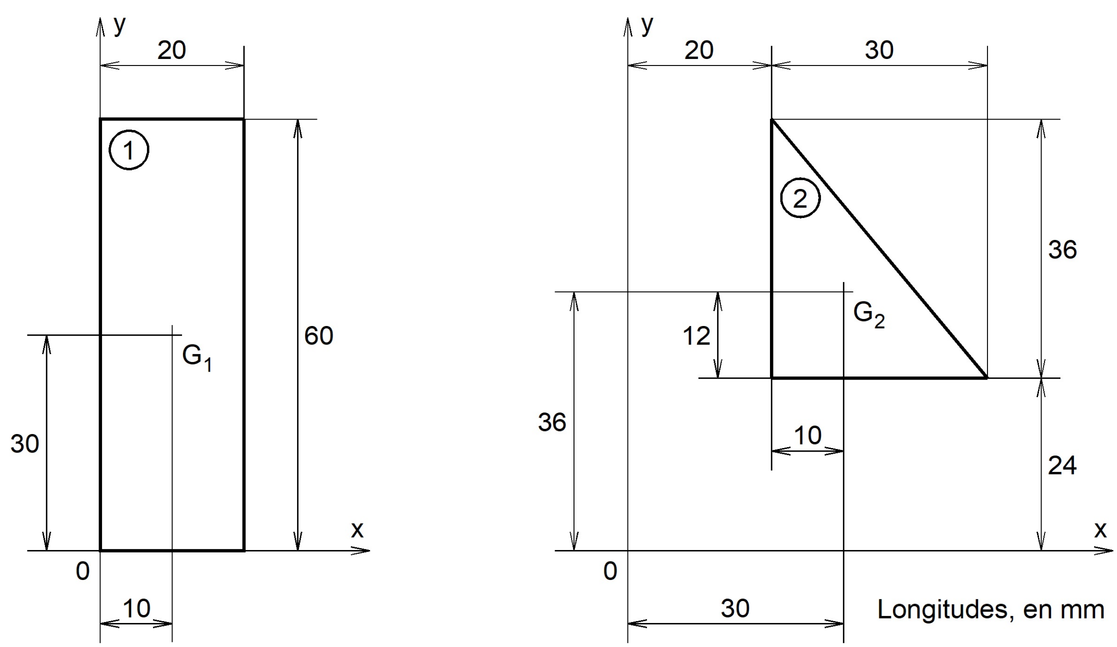
```
resp1 = Solve[{ec1, ec2}]
        resuelve
magTAsol = magTA /. resp1[[1]]
magTBsol = magTB /. resp1[[1]]
magTCsol = magTC /. resp1[[1]]
```

Ejercicio 3.5

Una placa de madera homogénea y de espesor constante y cortada como se muestra en la figura, pesa 300 N y se cuelga de tres cables en A(2, 2), B(48, 25) y C(19, 58) mm.
Si la placa permanece completamente horizontal, paralelo al plano x-y de referencia, determine las magnitud de las tensiones en los cables, magT_A, magT_B y magT_C



Primero, es necesario obtener el centro de masa de la placa.
Dado que la placa es homogénea y de espesor constante, su centro de masa es el mismo que su centro geométrico o centroide.
Para su obtención, se subdivide a la figura plana de la placa en primitivas, la primera el rectángulo de 20 x 60 mm, y la segunda el triángulo rectángulo de 30 x 36 mm, tal como se muestra en la siguiente figura:



Se puede verificar que el centroide de un rectángulo se localiza en su centro, ubicado a la mitad de su base así como de su altura, y que el centro geométrico de un triángulo rectángulo está a la tercera parte del cateto horizontal medido desde el ángulo recto, y a la tercera parte del cateto vertical, también medido desde el ángulo recto.

Las áreas de las figuras primitivas son la siguientes. Para el rectángulo:

$b_1 = 20$

$h_1 = 60$

$A_1 = b_1 h_1$

$A_1 = (20)(60)$

$A_1 = 1200 \text{ mm}^2$

Para el triángulo rectángulo:

$b_2 = 30$

$h_2 = 36$

$A_2 = \frac{1}{2} b_2 h_2$

$A_2 = \frac{1}{2} (30)(36)$

$A_2 = \frac{1}{2} 1080$

$A_2 = 540 \text{ mm}^2$

Para simplificar la obtención de las coordenadas centroidales de la placa, se emplea una tabla en la que se muestra el identificador, el área, las coordenadas centroidales y los productos del área por cada una de las coordenadas centroidales de cada una de las primitivas, con objeto de obtener las sumas requeridas:

i	A_i	$\tilde{x}_{G,i}$	$\tilde{y}_{G,i}$	$A_i \tilde{x}_{G,i}$	$A_i \tilde{y}_{G,i}$
1	1200	10	30	12 000	36 000
2	540	30	36	16 200	19 440
Σ	1740	–	–	28 200	55 440

Se obtienen las coordenadas centroidales de la placa de madera, con base en las siguientes expresiones:

$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \tilde{x}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$

$x_G = \frac{28\,200}{1740}$

$x_G = 16.21 \text{ mm}$

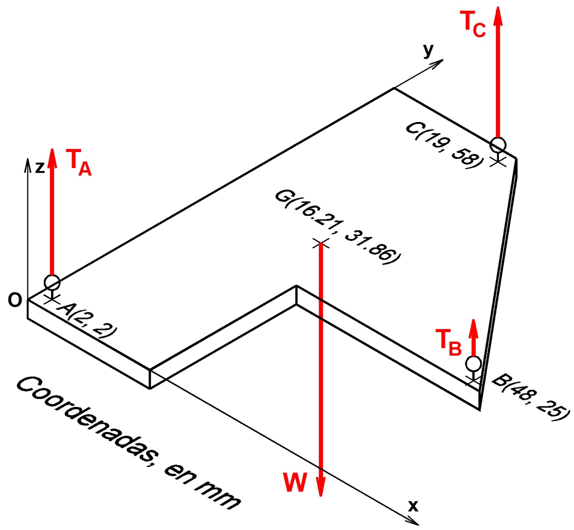
$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i \tilde{y}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$

$y_G = \frac{55\,440}{1740}$

$y_G = 31.86 \text{ mm}$

Las coordenadas del centro de masa, G, de la placa de madera son:
G(16.21, 31.86) mm.

Ahora, para determinar la tensión de las cuerdas que sujetan a esta placa de madera en los puntos A, B y C dados, primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de dicha placa:



Luego, se establece la ecuación de equilibrio de fuerzas, para lo cual primero se obtiene la representación vectorial de cada una:

$\overline{T_A} = \{0, 0, \text{magT}_A\}$

$\overline{T_B} = \{0, 0, \text{magT}_B\}$

$\overline{T_C} = \{0, 0, \text{magT}_C\}$

$\overline{W} = \{0, 0, \text{-}300\}$ lb

Dado que:

$\overline{T_A} + \overline{T_B} + \overline{T_C} + \overline{W} = \overline{0}$

$\{0, 0, \text{magT}_A\} + \{0, 0, \text{magT}_B\} + \{0, 0, \text{magT}_C\} + \{0, 0, -300\} = \{0, 0, 0\}$

de donde:

$$\text{magT}_A + \text{magT}_B + \text{magT}_C - 300 = 0 \qquad (1)$$

Ahora, se obtiene la resultante de momentos de las cuatro fuerzas involucradas con respecto a algún punto. Para simplificar la resolución del sistema de ecuaciones que resulte, se obtienen los momentos con respecto al punto A y, por tanto, será necesario determinar los vectores que van de A a cada uno de los puntos de aplicación de las fuerzas:

$\overline{M_A^{T_A}} = \overline{0}$

$\overline{M_A^{T_B}} = \overline{\text{AB}} \times \overline{T_B}$

Dado que:

$\overline{r_A} = \{2, 2, 0\}$

$\overline{r_B} = \{48, 25, 0\}$

$\overline{\text{AB}} = \overline{r_B} - \overline{r_A}$

$\overline{\text{AB}} = \{48, 25, 0\} - \{2, 2, 0\}$

$\overline{\text{AB}} = \{46, 23, 0\}$ mm

Entonces:

$\overline{M_A^{T_B}} = \{46, 23, 0\} \times \{0, 0, \text{magT}_B\}$

$\overline{M_A^{T_B}} = 46\, \mathbf{i} \times \text{magT}_B\, \mathbf{k} + 23\, \mathbf{j} \times \text{magT}_B\, \mathbf{k}$

$\overline{M_A^{T_B}} = 46\, \text{magT}_B\, (-\mathbf{j}) + 23\, \text{magT}_B\, \mathbf{i}$

$\overline{M_A^{T_B}} = 23\, \text{magT}_B\, \mathbf{i} - 46\, \text{magT}_B\, \mathbf{j}$

Para la tensión $\overline{T_C}$:

$\overline{M_A^{T_C}} = \overline{\text{AC}} \times \overline{T_C}$

$\overline{r_C} = \{19, 58, 0\}$

$\overline{\text{AC}} = \overline{r_C} - \overline{r_A}$

$\overline{\text{AC}} = \{19, 58, 0\} - \{2, 2, 0\}$

$\overline{\text{AC}} = \{17, 56, 0\}$ mm

Por consiguiente:

$\overline{M_A^{T_C}} = \{17, 56, 0\} \times \{0, 0, \text{magT}_C\}$

$\overline{M_A^{T_C}} = 17\, \mathbf{i} \times \text{magT}_C\, \mathbf{k} + 56\, \mathbf{j} \times \text{magT}_C\, \mathbf{k}$

$\overline{M_A^{T_C}} = 17\, \text{magT}_C\, (-\mathbf{j}) + 56\, \text{magT}_C\, \mathbf{i}$

$\overline{M_A^{T_C}} = 56\, \text{magT}_C\, \mathbf{i} - 17\, \text{magT}_C\, \mathbf{j}$

Para el peso, $\overline{W}$:

$\overline{M_A^{W}} = \overline{\text{AG}} \times \overline{W}$

$\overline{r_G} = \{16.21, 31.86, 0\}$

$\overline{\text{AG}} = \overline{r_C} - \overline{r_A}$

$\overline{\text{AG}} = \{16.21, 31.86, 0\} - \{2, 2, 0\}$

$\overline{\text{AG}} = \{14.21, 29.86, 0\}$ mm

De donde:

$\overline{M_A^{W}} = \{14.21, 29.86, 0\} \times \{0, 0, -300\}$

$\overline{M_A^{W}} = 14.21\, \mathbf{i} \times (-300\, \mathbf{k}) + 29.86\, \mathbf{j} \times (-300\, \mathbf{k})$

$\overline{M_A^{W}} = -4263\, (-\mathbf{j}) - 8958\, \mathbf{i}$

$\overline{M_A^{W}} = -8958\, \mathbf{i} + 4263\, \mathbf{j}$

El momento resultante debe ser igual a cero, por tanto:

$\overline{M_A^{T_A}} + \overline{M_A^{T_B}} + \overline{M_A^{T_C}} + \overline{M_A^{W}} = \overline{0}$

$\overline{0} + 23\, \text{magT}_B\, \mathbf{i} - 46\, \text{magT}_B\, \mathbf{j} + 56\, \text{magT}_C\, \mathbf{i} - 17\, \text{magT}_C\, \mathbf{j} - 8958\, \mathbf{i} + 4263\, \mathbf{j} = 0\, \mathbf{i} + 0\, \mathbf{j}$

De donde se establecen otras dos ecuaciones escalares:

$$23\, \text{magT}_B + 56\, \text{magT}_C - 8958 = 0 \qquad (2)$$

$$-46\, \text{magT}_B - 17\, \text{magT}_C + 4263 = 0 \qquad (3)$$

Se multiplica 2 por 17, así como 3 por 56 y se suman miembro a miembro:

$(23 \text{ mag}T_B + 56 \text{ mag}T_C - 8958 = 0) \times 17$

$(-46 \text{ mag}T_B - 17 \text{ mag}T_C + 4263 = 0) \times 56$

$391 \text{ mag}T_B + 952 \text{ mag}T_C = 152{,}286$

$-2576 \text{ mag}T_B - 952 \text{ mag}T_C = -238{,}728 \quad +$

____

$-2185 \text{ mag}T_B = -86{,}442$

$\text{mag}T_B = \frac{86{,}442}{2185}$

$\text{mag}T_B = 39.56 \text{ N} \qquad (4)$

En seguida, se sustituye 4 en 2:

$23\,(39.56) + 56 \text{ mag}T_C - 8958 = 0$

$909.92 + 56 \text{ mag}T_C = 8958$

$56 \text{ mag}T_C = 8958 - 909.90$

$\text{mag}T_C = \frac{8048.1}{56}$

$\text{mag}T_C = 143.72 \text{ N} \qquad (5)$

Finalmente, se sustituyen 4 y 5 en 1:

$\text{mag}T_A + 39.56 + 143.72 - 300 = 0$

$\text{mag}T_A = 300 - 183.28$

$\text{mag}T_A = 116.72 \text{ N}$

Las tensiones de cada uno de los cables de los que se cuelga horizontalmente la placa de madera son:

$\text{mag}T_A = 116.72$ N, $\text{mag}T_B = 39.56$ N y $\text{mag}T_C = 143.72$ N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magW = 300;
rA = {2, 2, 0};
rB = {48, 25, 0};
rC = {19, 58, 0};
b1 = 20;
h1 = 60;
b2 = 30;
h2 = 36;
```

Área y centroide de la figura 1:

```
A[1] = b1 h1
```

$$r[1] = \left\{\frac{b1}{2}, \frac{h1}{2}\right\}$$

Área y centroide de la figura 2:

$$A[2] = \frac{1}{2}\, b2\, h2$$

$$r[2] = \left\{b1 + \frac{1}{3}\, b2,\ (h1 - h2) + \frac{1}{3}\, h2\right\}$$

Procedimiento auxiliar para obtener las coordenadas centroidales:

```
PrimerRenglón = {"i", "A[i]", "x[i]", "y[i]", "A[i]x[i]", "A[i]y[i]"}
SubTabla =
  Table[{i, A[i], r[i][[1]], r[i][[2]], A[i] × r[i][[1]], A[i] × r[i][[2]]}, {i, 1, 2}] // N
  tabla                                                                                  va
ÚltimoRenglón = {"-", Sum[A[i], {i, 1, 2}], "-", "-",
                      suma
   Sum[A[i] × r[i][[1]], {i, 1, 2}], Sum[A[i] × r[i][[2]], {i, 1, 2}]} // N
   suma                              suma                               valor numérico
Cuadro = {PrimerRenglón, SubTabla[[1]], SubTabla[[2]], ÚltimoRenglón}
```

Tabla para el cálculo de las coordenadas centroidales:

```
Tabla = MatrixForm[{PrimerRenglón, SubTabla[[1]], SubTabla[[2]], ÚltimoRenglón}]
        forma de matriz
```

Cálculo de las coordenadas centroidales:

```
SumaAi = Cuadro[[4]][[2]]
SumaAxi = Cuadro[[4]][[5]]
SumaAyi = Cuadro[[4]][[6]]
```

$$xG = \frac{SumaAxi}{SumaAi}$$

$$yG = \frac{SumaAyi}{SumaAi}$$

```
rG = {xG, yG, 0}
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
TA = {0, 0, magTA}
TB = {0, 0, magTB}
TC = {0, 0, magTC}
W = {0, 0, -magW}
```

Resultante de fuerzas igualada a cero:

```
ec1 = TA + TB + TC + W == {0, 0, 0}
```

Cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a A:

```
MTAO = (rA - rA) × TA
MTBO = (rB - rA) × TB
MTCO = (rC - rA) × TC
MWO = (rG - rA) × W
```

Momento resultante igualado a cero:

```
ec2 = MTAO + MTBO + MTCO + MWO == {0, 0, 0}
```

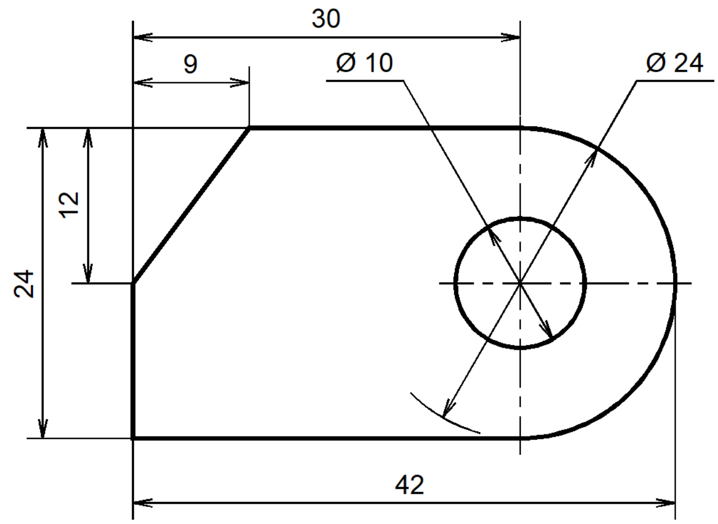
Resolución del sistema de ecuaciones vectoriales:

```
resp1 = Solve[{ec1, ec2}]
        resuelve
magTAsol = magTA /. resp1[[1]]
magTBsol = magTB /. resp1[[1]]
magTCsol = magTC /. resp1[[1]]
```

Nota de los autores:
Se sugiere revisar el siguiente ejercicio si el profesor lo considera conveniente como ejemplo de la obtención teórica del centro de gravedad de una placa, similar al de la práctica correspondiente.

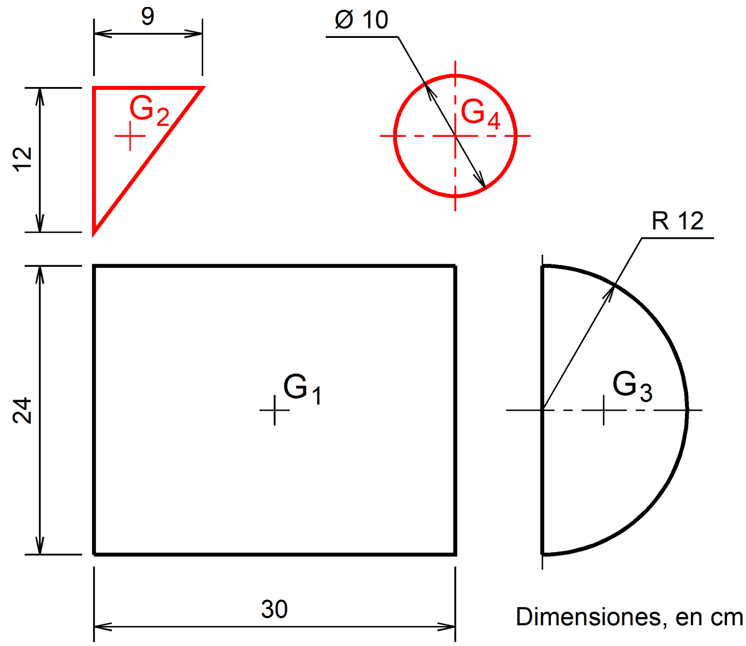
Ejercicio 3.6

Determinar el centroide del cuerpo tabular cuyo perfil se muestra en la figura, por medio de su subdivisión en figuras primitivas, la obtención de los centroides de cada una de dichas primitivas, y la obtención del promedio de estas coordenadas ponderadas con las áreas de ellas.



Dimensiones, en cm

Para este tipo de cuerpos tabulares que tienen un espesor constante, el centroide tiene las mismas coordenadas x, y que el de una figura plana que tenga su perfil.
Debido a esto, para resolver este problema se subdividirá dicho perfil plano en figuras planas básicas o primitivas, las cuales, para poder explicar con facilidad, se les designará con números de identificación. Así, se considera que el rectángulo de 30 x 24 es la figura 1, la figura 2 es el triángulo hueco de 9 x 12 cm, el semicírculo es la figura 3 y el círculo hueco se denota como la figura 4, tal como se muestra a continuación.



En la figura anterior de identifican con la letra G y un subíndice a los puntos que corresponden al centroide de cada figura primitiva.

Dado que para determinar las coordenadas centroidales se requiere emplear las expresiones:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} A_i\, \tilde{x}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{4} A_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} A_i\, \tilde{y}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{4} A_i}$$

donde A_i es el área de la figura i'ésima, $\tilde{x}_{G,i}$, $\tilde{y}_{G,i}$ son las coordenadas centroidales de la figura con identificador i, es necesario obtener dichas áreas así como sus coordenadas centroidales respectivas.

Para el rectángulo de 30 x 24 cm:

$$b_1 = 30 \text{ cm}$$

$$h_1 = 24 \text{ cm}$$

$$A_1 = b_1\, h_1$$

$$A_1 = (30)\,(24)$$

$$A_1 = 720 \text{ cm}^2$$

$$\tilde{x}_{G,1} = \frac{b_1}{2}$$

$$\tilde{x}_{G,1} = \frac{30}{2}$$

$$\tilde{x}_{G,1} = 15 \text{ cm}$$

$$\tilde{y}_{G,1} = \frac{h_1}{2}$$

$$\tilde{y}_{G,1} = \frac{24}{2}$$

$$\tilde{y}_{G,1} = 12 \text{ cm}$$

Para el triángulo hueco de 9 x 12 cm, dado que es un hueco se considera que su área es negativa:

$b_2 = 9$ cm

$h_2 = 12$ cm

$A_2 = -\frac{1}{2}\, b_2\, h_2$

$A_2 = -\frac{1}{2}\,(9)\,(12)$

$A_2 = -54\ \text{cm}^2$

$\tilde{x}_{G,2} = \frac{b_2}{3}$

$\tilde{x}_{G,2} = \frac{9}{3}$

$\tilde{x}_{G,2} = 3$ cm

$\tilde{y}_{G,2} = h_1 - \frac{h_2}{3}$

$\tilde{y}_{G,2} = 24 - \frac{12}{3}$

$\tilde{y}_{G,2} = 20$ cm

Para el semicírculo de 12 cm de radio:

$r_3 = 12$ cm

$A_3 = \frac{1}{2}\,\pi\, r_3^2$

$A_3 = \frac{1}{2}\,\pi\, 12^2$

$A_3 = 226.19\ \text{cm}^2$

$\tilde{x}_{G,3} = b_1 + \frac{4\, r_3}{3\,\pi}$

$\tilde{x}_{G,3} = 30 + \frac{4\,(12)}{3\,\pi}$

$\tilde{x}_{G,3} = 30 + 5.09$

$\tilde{x}_{G,3} = 35.09$ cm

$\tilde{y}_{G,3} = r_3$

$\tilde{y}_{G,3} = 12$ cm

Para el círculo hueco de 10 cm de diámetro, para el cual se considera que su área es negativa:

$D_4 = 10$ cm

$A_4 = -\pi\,\frac{D_4^2}{4}$

$A_4 = -\pi\,\frac{10^2}{4}$

$A_4 = -78.54\ \text{cm}^2$

$\tilde{x}_{G,4} = b_1$

$\tilde{x}_{G,4} = 30$ cm

$\tilde{y}_{G,4} = r_3$

$\tilde{y}_{G,4} = 12$ cm

Luego, para sistematizar la obtención de las expresiones para el cálculo de las coordenadas centroidales, se llena la siguiente tabla:

i	A_i	$\tilde{x}_{G,i}$	$\tilde{y}_{G,i}$	$A_i\,\tilde{x}_{G,i}$	$A_i\,\tilde{y}_{G,i}$
1	720	15	12	10800	8640
2	−54	3	20	−162	−1080
3	226.19	35.09	12	7937.84	2714.33
4	−78.54	30	12	−2356.19	−942.48
Σ	813.65	−	−	16219.65	9331.85

Por tanto, las coordenadas centroidales del cuerpo tabular solicitado son:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} A_i\,\tilde{x}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{4} A_i}$$

$$x_G = \frac{16219.65}{813.65}$$

$$x_G = 19.93 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{4} A_i\,\tilde{y}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{4} A_i}$$

$$y_G = \frac{9331.86}{813.65}$$

$$y_G = 11.47 \text{ cm}$$

Las coordenadas del centro de gravedad, G, del cuerpo tabular solicitado son: G(19.93, 11.47) cm.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos, en cm:

```
b1 = 30;
h1 = 24;
b2 = 9;
h2 = 12;
r3 = 12;
D4 = 10;
```

Área y centroide de la figura 1:

```
A[1] = b1 h1
r[1] = {b1/2, h1/2}
```

Área y centroide de la figura 2:

$$A[2] = -\frac{1}{2}\, b2\, h2$$

$$r[2] = \left\{\frac{b2}{3},\ h1 - \frac{h2}{3}\right\}$$

Área y centroide de la figura 3:

$$A[3] = \frac{1}{2}\, \pi\, r3^2\ //\ N$$

valor numéri

$$r[3] = \left\{b1 + \frac{4\, r3}{3\, \pi},\ r3\right\}\ //\ N$$

va

Área y centroide de la figura 4:

$$A[4] = -\pi\, \frac{D4^2}{4}\ //\ N$$

va

```
r[4] = {b1, r3}
```

Primera forma vectorial de obtener las coordenadas centroidales:

```
ArTot = Sum[A[i] × r[i], {i, 1, 4}]
        suma
ATot = Sum[A[i], {i, 1, 4}]
       suma
```

$$rG = \frac{ArTot}{ATot}$$

Segunda forma de obtener las coordenadas centroidales:

```
PrimerRenglón = {"i", "A[i]", "x[i]", "y[i]", "A[i]x[i]", "A[i]y[i]"}
SubTabla =
 Table[{i, A[i], r[i]〚1〛, r[i]〚2〛, A[i] × r[i]〚1〛, A[i] × r[i]〚2〛}, {i, 1, 4}] // N
 tabla                                                                      valor
ÚltimoRenglón = {"-", Sum[A[i], {i, 1, 4}], "-", "-",
                      suma
  Sum[A[i] × r[i]〚1〛, {i, 1, 4}], Sum[A[i] × r[i]〚2〛, {i, 1, 4}]}
  suma                             suma
Cuadro =
 {PrimerRenglón, SubTabla〚1〛, SubTabla〚2〛, SubTabla〚3〛, SubTabla〚4〛, ÚltimoRenglón}
```

Tabla para el cálculo de las coordenadas centroidales:

```
Tabla = MatrixForm[
        forma de matriz
  {PrimerRenglón, SubTabla[[1]], SubTabla[[2]], SubTabla[[3]], SubTabla[[4]], ÚltimoRenglón}]
```

Cálculo de las coordenadas centroidales:

```
SumaAi = Cuadro[[6]] [[2]]
SumaAxi = Cuadro[[6]] [[5]]
SumaAyi = Cuadro[[6]] [[6]]
```

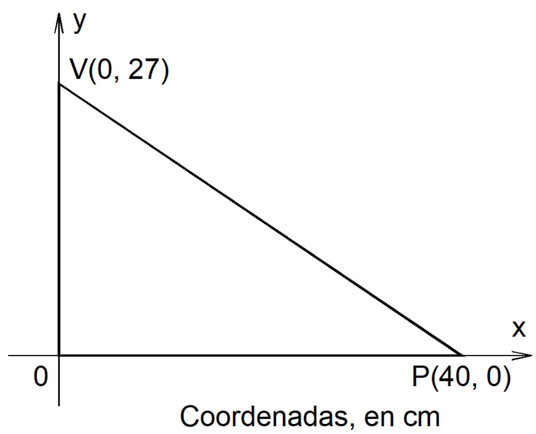
$$xG2 = \frac{SumaAxi}{SumaAi}$$

$$yG2 = \frac{SumaAyi}{SumaAi}$$

Nota de los autores:
Los siguientes ejercicios no están considerados en el contenido de la asignatura Mecánica.
Por consiguiente, se sugiere revisarlos a aquellos profesores que lo consideren conveniente y que dispongan de tiempo adicional para tratar este tipo de problemas.

Ejercicio 3.7

Demostrar las expresiones para el cálculo del centro de gravedad de un cuerpo tabular con forma de triángulo rectángulo considerándolo homogéneo, colocado en posición horizontal, a partir de la descomposición del cuerpo en rebanadas paralelas al eje *y* con peso diferencial, que a su vez son iguales a las diferenciales de masa multiplicadas por la aceleración de la gravedad, **g**, que a su vez son iguales a las diferenciales de volumen multiplicadas por la densidad del cuerpo, considerando que el marco de referencia está formado por ejes cartesianos coincidentes con los catetos.



Primero, para poder establecer la región de área que ocupa el triángulo en el plano cartesiano, se requiere obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos V(0, 27) cm y P(40, 0), conocida su pendiente:

$$m = -\frac{27}{40}$$

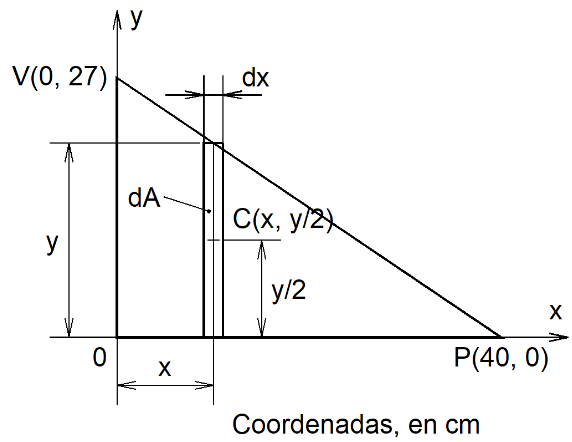
y su ordenada al origen:

$$b = 27$$

$$y = m\,x + b$$

$$y = -\frac{27}{40}\,x + 27$$

Posteriormente, se establece una “rebanada” paralela al eje y genérica, con la que pueda generarse toda el área del triángulo, así como sus coordenadas centroidales:



Con base en el fundamento de equivalencia de sistemas de fuerzas, se demostró que para obtener las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo tabular, cuya densidad es ρ, la constante de la aceleración del campo gravitatorio terrestre es **g** y el espesor de la tabla es e, las expresiones son:

$$x_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, \rho\, \mathbf{g}\, e\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} \rho\, \mathbf{g}\, e\, dA}$$

$$y_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, \rho\, \mathbf{g}\, e\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} \rho\, \mathbf{g}\, e\, dA}$$

Y si se considera que el cuerpo es homogéneo con espesor constante y se desprecia la variación de la aceleración gravitacional en el espesor de la tabla, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico, o centroide, del triángulo, donde, para este caso, las expresiones son:

$$x_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} dA}$$

$$y_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} dA}$$

Las coordenadas centroidales genéricas de la “rebanada” son:

$$\tilde{x} = x$$

$$\tilde{y} = \frac{y}{2}.$$

El área diferencial de dicha “rebanada” es:

$$dA = y\, dx$$

Se denomina I_1 a la integral del numerador de x_G, I_2 a la integral del numerador de y_G, e I_3 al denominador de ambas expresiones, que resulta ser el área del triángulo en estudio.

Cálculo de I_1:

$$I_1 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, dA$$

Luego de sustituir los parámetros conocidos:

$$I_1 = \int_0^{40} x\, y\, dx$$

Donde y es la ecuación de la recta que limita al triángulo:

$$I_1 = \int_0^{40} x\left(-\frac{27}{40}\,x + 27\right) dx$$

$$I_1 = \int_0^{40} \left(-\frac{27}{40}\,x^2 + 27\,x\right) dx$$

$$I_1 = \left[-\frac{27}{40}\,\frac{x^3}{3} + 27\,\frac{x^2}{2}\right]_0^{40}$$

$$I_1 = -\frac{27}{40} \times \frac{40^3}{3} + 27 \times \frac{40^2}{2} - \left(-\frac{27}{40} \times \frac{0^3}{3} + 27 \times \frac{0^2}{2}\right)$$

$$I_1 = -14{,}400 + 21{,}600 - 0$$

$$I_1 = 7{,}200$$

Cálculo de I_2:

$$I_2 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, dA$$

Luego de sustituir los parámetros conocidos:

$$I_2 = \int_0^{40} \frac{y}{2}\, y\, dx$$

Donde y es la ecuación de la recta que limita al triángulo:

$$I_2 = \int_0^{40} \frac{1}{2}\left(-\frac{27}{40}\,x + 27\right)^2 dx$$

$$I_2 = \int_0^{40} \frac{1}{2}\left(\frac{729}{1600}\,x^2 - \frac{729}{20}\,x + 729\right) dx$$

$$I_2 = \left[\frac{729}{3200}\,\frac{x^3}{3} - \frac{729}{40}\,\frac{x^2}{2} + \frac{729}{2}\,x\right]_0^{40}$$

$$I_2 = \frac{729}{3200} \times \frac{40^3}{3} - \frac{729}{40} \times \frac{40^2}{2} + \frac{729}{2}\,(40) - \left[\frac{729}{3200} \times \frac{0^3}{3} - \frac{729}{40}\,\frac{0^2}{2} + 729\,(0)\right]$$

$$I_2 = 4{,}860 - 14{,}580 + 14{,}580 - 0$$

$$I_2 = 4{,}860$$

Cálculo de I_3:

$$I_3 = \int_{x_i}^{x_f} dA$$

Luego de sustituir los parámetros conocidos:

$$I_3 = \int_0^{40} y\, dx$$

donde y es la ecuación de la recta que limita al triángulo:

$$I_3 = \int_0^{40}\left(-\frac{27}{40}\,x + 27\right) dx$$

$$I_3 = \left[-\frac{27}{40}\,\frac{x^2}{2} + 27\,x\right]_0^{40}$$

$$I_3 = -\frac{27}{40} \times \frac{40^2}{2} + 27\,(40) - \left[-\frac{27}{40} \times \frac{0^2}{2} + 27\,(0)\right]$$

$$I_3 = -540 + 1{,}080 - 0$$

$$I_3 = 540$$

Entonces, las coordenadas del centro de gravedad de la tabla triangular son las siguientes:

$$x_G = \frac{I_1}{I_3}$$

$$x_G = \frac{7{,}200}{540}$$

$$x_G = 13.3333$$

$$y_G = \frac{I_2}{I_3}$$

$$y_G = \frac{4{,}860}{540}$$

$$y_G = 9$$

Las coordenadas del centro de gravedad, G, de la tabla con forma de triángulo rectángulo son:

G(13.3333, 9, 0) cm.

Se puede verificar que el primer valor es la tercera parte de la longitud del cateto horizontal, medido desde el vértice del ángulo recto, y el segundo corresponde a la tercera parte de la longitud del cateto vertical, medido desde el mismo vértice.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Obtención de la ecuación de la recta que pasa por los puntos V(0, 27) y P(40, 0):

```
xV = 0;
yV = 27;
xP = 40;
yP = 0;
m = (yP - yV)/(xP - xV)
b = yV
y = m x + b
```

Obtención de la integral $I_1 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, dA$, sabiendo que $dA = y\, dx$:

```
xi = 0
xf = 40
I1 = ∫_xi^xf x y dx
```

Obtención de la integral $I_2 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, \mathrm{d}A$:

$$\mathbf{I2} = \int_{\mathbf{xi}}^{\mathbf{xf}} \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{2}}\, \mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

Obtención de la integral $I_3 = \int_{x_i}^{x_f} \mathrm{d}A$:

$$\mathbf{I3} = \int_{\mathbf{xi}}^{\mathbf{xf}} \mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

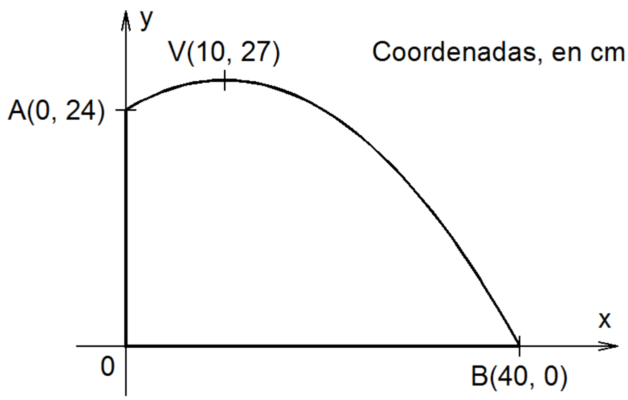
Cálculo de las coordenadas centroidales de la tabla con forma de triángulo rectángulo:

$$\mathbf{xG} = \frac{\mathbf{I1}}{\mathbf{I3}} \; // \; \mathbf{N}$$

$$\mathbf{yG} = \frac{\mathbf{I2}}{\mathbf{I3}}$$

Ejercicio 3.8

Determinar el centro de gravedad del cuerpo tabular del Ejercicio 35 considerándolo homogéneo, colocado en posición horizontal, a partir de la descomposición del cuerpo en rebanadas paralelas al eje y con peso diferencial, que a su vez son iguales a las diferenciales de masa multiplicadas por la aceleración de la gravedad, **g**, que a su vez son iguales a las diferenciales de volumen multiplicadas por la densidad del cuerpo, considerando que el marco de referencia está formado por un eje x coincidente con el lado recto mayor, y origen en el vértice inferior izquierdo.



Las expresiones que se pueden emplear en este caso para el cálculo de las coordenadas del centro de gravedad, x_G e y_G, del cuerpo tabular con perfil parabólico mostrado en la figura anterior son las siguientes:

$$x_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, \rho\, \boldsymbol{g}\, e\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} \rho\, \boldsymbol{g}\, e\, dA}$$

$$y_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, \rho\, \boldsymbol{g}\, e\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} \rho\, \boldsymbol{g}\, e\, dA}$$

donde $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ son las coordenadas centroidales genéricas de cada diferencial de área, dA, ρ es la densidad del cuerpo, e su espesor, **g** es la aceleración del campo gravitatorio terrestre, y x_i y x_f son la abscisa inicial y final de la región de área que ocupa dicho cuerpo.

Si se considera que tanto la densidad, ρ, como la aceleración gravitatoria, **g**, y el espesor son constantes, las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo puede calcularse como:

$$x_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} dA}$$

$$y_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, dA}{\int_{x_i}^{x_f} dA}$$

Con base en los puntos A y B por donde pasa así como las coordenadas de su vértice V, es posible determinar la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje y, que abre hacia abajo:

$$(x - h)^2 = -4\, p\, (y - k)$$

Donde h y k son las coordenadas del vértice y p es su distancia focal. Dado que h y k son conocidas, es posible obtener el valor de p sustituyendo en la expresión anterior las coordenadas de uno de los puntos por donde pasa dicha parábola, por ejemplo, A(0, 24):

$$(0 - 10)^2 = -4\,p\,(24 - 27)$$

$$-4\,p\,(-3) = 100$$

$$p = \frac{100}{12}$$

es decir:

$$p = \frac{25}{3}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es:

$$(x - 10)^2 = -4\left(\frac{25}{3}\right)(y - 27)$$

$$-\frac{100}{3}(y - 27) = (x - 10)^2$$

$$y - 27 = -\frac{3}{100}(x - 10)^2$$

$$y = -\frac{3}{100}(x - 10)^2 + 27$$

es decir:

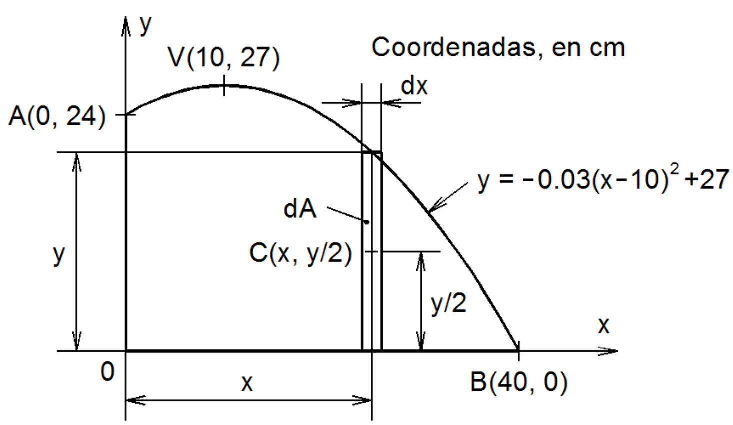
$$y = -\frac{3}{100}\left(x^2 - 20\,x + 100\right) + 27$$

$$y = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{60}{100}x - \frac{300}{100} + 27$$

$$y = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{6}{10}x - 3 + 27$$

$$y = -\frac{3}{100}x^2 + \frac{6}{10}x + 24$$

Luego, se establece una “rebanada” paralela al eje y genérica, con la que pueda generarse toda el área de la tabla con perfil parabólico:



Se puede constatar que las coodenadas centroidales de la “rebanada” genérica son:

$$\tilde{x} = x$$

$$\tilde{y} = \frac{y}{2}$$

el área diferencial de dicha “rebanada” es:

$$dA = y\, dx$$

y:

$$x_i = 0$$

$$x_f = 40$$

Posteriormente, se calculan las integrales para la obtención de las coordenadas centroidales, para las cuales es definen de la siguiente manera:

$$I_1 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, dA$$

$$I_2 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, dA$$

$$I_3 = \int_{x_i}^{x_f} dA$$

Para este caso, I_1 es:

$$I_1 = \int_0^{40} x\, y\, dx$$

$$I_1 = \int_0^{40} x\left(-\frac{3}{100}\, x^2 + \frac{6}{10}\, x + 24\right) dx$$

$$I_1 = \int_0^{40} \left(-\frac{3}{100}\, x^3 + \frac{6}{10}\, x^2 + 24\, x\right) dx$$

$$I_1 = \left[-\frac{3}{100}\, \frac{x^4}{4} + \frac{6}{10}\, \frac{x^3}{3} + 24\, \frac{x^2}{2}\right]_0^{40}$$

$$I_1 = -\frac{3}{100} \times \frac{40^4}{4} + \frac{6}{10} \times \frac{40^3}{3} + 24 \times \frac{40^2}{2} - \left(-\frac{3}{100} \times \frac{0^4}{4} + \frac{6}{10} \times \frac{0^3}{3} + 24 \times \frac{0^2}{2}\right)$$

$$I_1 = -\frac{3}{100} \times \frac{2\,560\,000}{4} + \frac{6}{10} \times \frac{64\,000}{3} + 24 \times \frac{1600}{2} - (0 + 0 + 0)$$

$$I_1 = -19\,200 + 12\,800 + 19\,200$$

$$I_1 = 12\,800$$

Cálculo de I_2:

$$I_2 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{y}\, dA$$

$$I_2 = \int_0^{40} \frac{y}{2}\, y\, dx$$

$$I_2 = \int_0^{40} \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{100}\, x^2 + \frac{6}{10}\, x + 24\right)^2 dx$$

$$I_2 = \int_0^{40} \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10\,000}\, x^4 + \frac{36}{100}\, x^2 + 576 - \frac{36}{1000}\, x^3 - \frac{144}{100}\, x^2 + \frac{288}{10}\, x\right) dx$$

$$I_2 = \int_0^{40} \frac{1}{2}\left(\frac{9}{10\,000}\, x^4 - \frac{36}{1000}\, x^3 + \frac{36}{100}\, x^2 - \frac{144}{100}\, x^2 + \frac{288}{10}\, x + 576\right) dx$$

$$I_2 = \int_0^{40} \left(\frac{9}{20\,000}\, x^4 - \frac{36}{2000}\, x^3 - \frac{108}{200}\, x^2 + \frac{288}{20}\, x + 288\right) dx$$

$$I_2 = \int_0^{40} \left(\frac{9}{20\,000}\, x^4 - \frac{9}{500}\, x^3 - \frac{27}{50}\, x^2 + \frac{72}{5}\, x + 288\right) dx$$

$$I_2 = \left[\frac{9}{20\,000}\, \frac{x^5}{5} - \frac{9}{500}\, \frac{x^4}{4} - \frac{27}{50}\, \frac{x^3}{3} + \frac{72}{5}\, \frac{x^2}{2} + 288\, x\right]_0^{40}$$

$$I_2 = \frac{9}{20\,000} \times \frac{40^5}{5} - \frac{9}{500} \times \frac{40^4}{4} - \frac{27}{50} \times \frac{40^3}{3} + \frac{72}{5} \times \frac{40^2}{2} + 288\,(40) - \left(\frac{9}{20\,000} \times \frac{0^5}{5} - \frac{9}{500} \times \frac{0^4}{4} - \frac{27}{50}\, \frac{0^3}{3} + \frac{72}{5} \times \frac{0^2}{2} + 288\,(0)\right)$$

$$I_2 = \frac{9}{20\,000} \times \frac{102\,400\,000}{5} - \frac{9}{500} \times \frac{2\,560\,000}{4} - \frac{27}{50} \times \frac{64\,000}{3} + \frac{72}{5} \times \frac{1600}{2} + 11\,520 - (0 - 0 - 0 + 0 + 0)$$

$$I_2 = 9216 - 11\,520 - 11\,520 + 11\,520 + 11\,520$$
$$I_2 = 9216$$

Para I_3:

$$I_3 = \int_{x_i}^{x_f} y \, dx$$
$$I_3 = \int_0^{40} \left(-\frac{3}{100}\, x^2 + \frac{6}{10}\, x + 24\right) dx$$
$$I_3 = \left[-\frac{3}{100}\, \frac{x^3}{3} + \frac{6}{10}\, \frac{x^2}{2} + 24\, x\right]_0^{40}$$
$$I_3 = -\frac{3}{100} \times \frac{40^3}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{40^2}{2} + 24\,(40) - \left(-\frac{3}{100} \times \frac{0^3}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{0^2}{2} + 24\,(0)\right)$$
$$I_3 = -\frac{3}{100} \times \frac{64\,000}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{1600}{2} + 960 - (-0 + 0 + 0)$$
$$I_3 = -640 + 480 + 960$$
$$I_3 = 800$$

Por consiguiente, las coordenadas del centro de gravedad de la tabla con perfil parabólico son:

$$x_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{x} \, dA}{\int_{x_i}^{x_f} dA}$$
$$x_G = \frac{I_1}{I_3}$$
$$x_G = \frac{12\,800}{800}$$
$$x_G = 16$$
$$y_G = \frac{\int_{x_i}^{x_f} \tilde{y} \, dA}{\int_{x_i}^{x_f} dA}$$
$$y_G = \frac{I_2}{I_3}$$
$$y_G = \frac{9216}{800}$$
$$y_G = 11.52$$

Las coordenadas del centro de gravedad, G, de la tabla con perfil parabólico de este problema son:

G(16, 11.52, 0) cm.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Obtención de la ecuación de la parábola con vértice en V(10,27) y pasa por el punto A(0, 24):

```
h = 10;
k = 27;
xA = 0;
yA = 24;
ecParab = (x - h)^2 == -4 p (y - k)
ec1 = ecParab /. {x → xA, y → yA}
resp1 = Solve[ec1]
        resuelve
pSol = p /. resp1[[1]]
ecParabSol = ecParab /. p → pSol
resp2 = Solve[ecParabSol, y] // Simplify
        resuelve                simplifica
ySol = y /. resp2[[1]]
```

Obtención de la integral $I_1 = \int_{x_i}^{x_f} \tilde{x}\, dA$, sabiendo que $dA = y\, dx$:

```
xi = 0;
xf = 40;
I1 = ∫_xi^xf x ySol dx
I2 = ∫_xi^xf (ySol/2) ySol dx
```

Obtención de la integral $I_3 = \int_{x_i}^{x_f} dA$:

```
I3 = ∫_xi^xf ySol dx
```

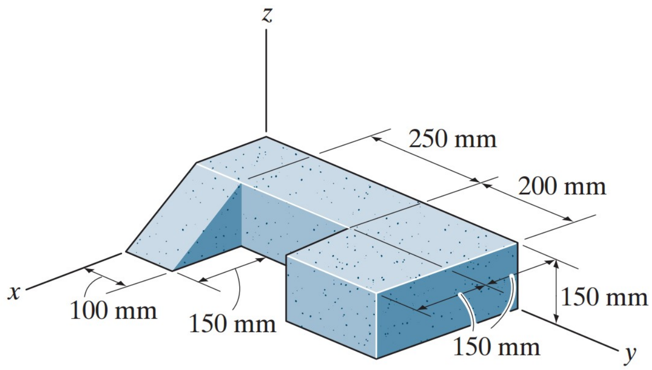
Cálculo de las coordenadas centroidales de la tabla con forma de triángulo rectángulo:

```
xG = I1/I3
yG = I2/I3 // N
            va
```

Ejercicio 3.9

Problema 9-72, Hibbeler, *Ingeniería Mecánica, Estática,* 12ª edición, Pearson, Prentice Hall, p. 482.

Localice el centro de masa $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ del ensamble de bloques homogéneos.



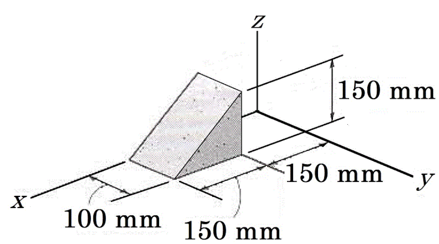
La cuña de 150 x 150 x 100 mm es el cuerpo 1, el paralelepípedo rectángulo de 550 x 150 x 150 mm es el 2 y el paralelepípedo rectángulo de 200 x 150 x 150 mm es el cuerpo 3.

Ante todo, se subdivide el cuerpo compuesto en cuerpos básicos, también conocidos como primitivas, como lo son prismas rectangulares y prismas triangulares, para este problema. Otro tipo de cuerpos que podrían aparecer usualmente son cilindros, semicilindros, cuartos de cilindro, conos, esferas, pirámides, entre otros.

Los cuerpos básicos que se establecerán son los siguientes, incluyendo su número de identificación.

Para reducir la magnitud de los números, en lugar de mm se emplearán cm.

1 El prisma triangular de la izquierda, mostrado en la siguiente figura:



Sus dimensiones son:

$$b_1 = 15 \text{ cm}$$
$$h_1 = 15 \text{ cm}$$
$$e_1 = 10 \text{ cm}$$

Por tanto, su volumen es:

$$V_1 = \frac{1}{2} b_1 h_1 e_1$$
$$V_1 = \frac{1}{2} (15) (15) (10)$$
$$V_1 = 1125 \text{ cm}^3$$

Es importante hacer notar que la posición del centro de masa de cada cuerpo debe corresponder al que tienen con respecto al marco de referencia original.

Por ejemplo, el prisma triangular se localiza a 150 mm delante del eje y, es decir, en sentido x positivo. Por consiguiente:

$\tilde{x}_{G,1} = 15 + \frac{b_1}{3}$

$\tilde{x}_{G,1} = 15 + \frac{15}{3}$

$\tilde{x}_{G,1} = 15 + 5$

$\tilde{x}_{G,1} = 20$ cm

$\tilde{y}_{G,1} = \frac{e_1}{2}$

$\tilde{y}_{G,1} = \frac{10}{2}$

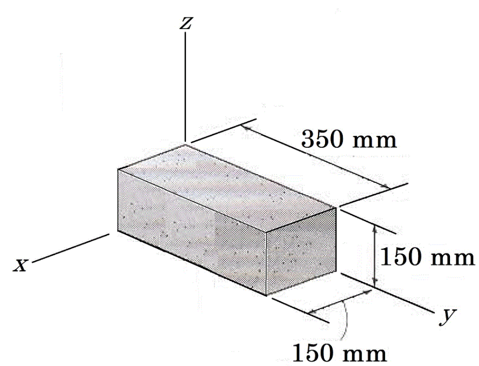
$\tilde{y}_{G,1} = 5$ cm

$\tilde{z}_{G,1} = \frac{h_1}{3}$

$\tilde{z}_{G,1} = \frac{15}{3}$

$\tilde{z}_{G,1} = 5$ cm

2 El prisma rectangular de la izquierda, mostrado en la siguiente figura :



Sus dimensiones son:

$b_2 = 35$ cm

$h_2 = 15$ cm

$e_2 = 15$ cm

Por tanto, su volumen es:

$V_2 = b_2\, h_2\, e_2$

$V_2 = (35)\,(15)\,(15)$

$V_2 = 7875\ \text{cm}^3$

La posición del centro de masa de este prisma con respecto al marco de referencia original tiene las siguientes coordenadas:

$\tilde{x}_{G,2} = \frac{e_2}{2}$

$\tilde{x}_{G,2} = \frac{15}{2}$

$\tilde{x}_{G,2} = 7.5$ cm

$\tilde{y}_{G,2} = \frac{b_2}{2}$

$\tilde{y}_{G,2} = \frac{35}{2}$

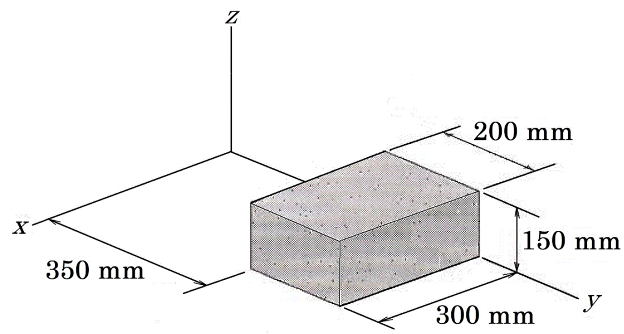
$\tilde{y}_{G,2} = 17.5$ cm

$\tilde{z}_{G,2} = \frac{h_2}{2}$

$\tilde{z}_{G,2} = \frac{15}{2}$

$\tilde{z}_{G,2} = 7.5$ cm

3 El prisma rectangular de la derecha, mostrado en la siguiente figura :



Sus dimensiones son:

$b_3 = 20$ cm

$h_3 = 15$ cm

$e_3 = 30$ cm

Por tanto, su volumen es:

$V_3 = b_3\, h_3\, e_3$

$V_3 = (20)\,(15)\,(30)$

$V_3 = 9000\ \text{cm}^3$

En este prisma rectangular está ubicado a 350 mm a la derecha del eje x, es decir, en sentido y positivo.

Las coordenadas del centro de masa de este prisma con respecto al marco de referencia original son las siguientes:

$\tilde{x}_{G,3} = \frac{e_3}{2}$

$\tilde{x}_{G,3} = \frac{30}{2}$

$\tilde{x}_{G,3} = 15$ cm

$\tilde{y}_{G,3} = b_2 + \frac{b_3}{2}$

$\tilde{y}_{G,3} = 35 + \frac{20}{2}$

$\tilde{y}_{G,3} = 35 + 10$ cm

$\tilde{y}_{G,3} = 45$ cm

$\tilde{z}_{G,3} = \frac{h_3}{2}$

$\tilde{z}_{G,3} = \frac{15}{2}$

$\tilde{z}_{G,3} = 7.5$ cm

Las expresiones para calcular las coordenadas del centro de masa de un cuerpo homogéneo se muestran a continuación:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} V_i\, \tilde{x}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{3} V_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} V_i\, \tilde{y}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{3} V_i}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} V_i\, \tilde{z}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{3} V_i}$$

Para obtener las coordenadas solicitadas, es necesario obtener las sumas de los productos del volumen de cada cuerpo básico por cada una de sus coordenadas centroidales.
Para sistematizar la obtención de las expresiones para el cálculo de las coordenadas centroidales, se llena la siguiente tabla:

i	V_i	$\tilde{x}_{G,i}$	$\tilde{y}_{G,i}$	$\tilde{z}_{G,i}$	$V_i\,\tilde{x}_{G,i}$	$V_i\,\tilde{y}_{G,i}$	$V_i\,\tilde{z}_{G,i}$
1	1125	20	5	5	22 500	5625	5625
2	7875	7.5	17.5	7.5	59 062.5	137 812.5	59 062.5
3	9000	15	45	7.5	135 000	405 000	67 500
Σ	18 000	–	–	–	216 562.5	548 437.5	132 187.5

Finalmente, se obtienen las coordenadas del centro de masa solicitado:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} V_i\, \tilde{x}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{3} V_i}$$

$$x_G = \frac{216{,}562.5}{18{,}000}$$

$$x_G = 12.03 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} V_i\, \tilde{y}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{3} V_i}$$

$$y_G = \frac{548{,}437.5}{18{,}000}$$

$$y_G = 30.47 \text{ cm}$$

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} V_i\, \tilde{z}_{G,i}}{\sum_{i=1}^{3} V_i}$$

$$z_G = \frac{132\,187.5}{18{,}000}$$

$$z_G = 7.34 \text{ cm}$$

Las coordenadas del centro del ensamble de bloques homogéneos son:

$x_G = 12.03$ cm

$y_G = 30.47$ cm

$z_G = 7.34$ cm.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos, en cm:

```
b1 = 15;
h1 = 15;
e1 = 10;
b2 = 35;
h2 = 15;
e2 = 15;
b3 = 20;
h3 = 15;
e3 = 30;
```

Volumen y centroide del cuerpo 1:

$$\texttt{V[1]} = \frac{1}{2}\,\texttt{b1 h1 e1}$$

$$\texttt{r[1]} = \left\{15 + \frac{1}{3}\,\texttt{b1},\ \frac{1}{2}\,\texttt{e1},\ \frac{1}{3}\,\texttt{h1}\right\}$$

Volumen y centroide del cuerpo 2:

$$\texttt{V[2]} = \texttt{b2 h2 e2}$$

$$\texttt{r[2]} = \left\{\frac{1}{2}\,\texttt{e2},\ \frac{1}{2}\,\texttt{b2},\ \frac{1}{2}\,\texttt{h2}\right\}\ \texttt{// N}$$

Volumen y centroide del cuerpo 3:

$$\texttt{V[3]} = \texttt{b3 h3 e3}$$

$$\texttt{r[3]} = \left\{\frac{1}{2}\,\texttt{e3},\ \texttt{b2} + \frac{1}{2}\,\texttt{b3},\ \frac{1}{2}\,\texttt{h3}\right\}\ \texttt{// N}$$

Primera forma vectorial de obtener las coordenadas centroidales:

```
VrTot = Sum[V[i] × r[i], {i, 1, 3}]
        suma
VTot = Sum[V[i], {i, 1, 3}]
       suma
```

$$\texttt{rG} = \frac{\texttt{VrTot}}{\texttt{VTot}}$$

Segunda forma de obtener las coordenadas centroidales:

```
PrimerRenglón =
 {"i", "V[i]", "x[i]", "y[i]", "z[i]", "V[i]x[i]", "V[i]y[i]", "V[i]z[i]"}
SubTabla = Table[{i, V[i], r[i]⟦1⟧, r[i]⟦2⟧, r[i]⟦3⟧,
           tabla
    V[i] × r[i]⟦1⟧, V[i] × r[i]⟦2⟧, V[i] × r[i]⟦3⟧}, {i, 1, 3}] // N
                                                                   valor numérico
ÚltimoRenglón = {"-", Sum[V[i], {i, 1, 3}], "-", "-", "-", Sum[V[i] × r[i]⟦1⟧, {i, 1, 3}],
                      suma                                 suma
  Sum[V[i] × r[i]⟦2⟧, {i, 1, 3}], Sum[V[i] × r[i]⟦3⟧, {i, 1, 3}]}
  suma                            suma
Cuadro = {PrimerRenglón, SubTabla⟦1⟧, SubTabla⟦2⟧, SubTabla⟦3⟧, ÚltimoRenglón}
```

Tabla para el cálculo de las coordenadas centroidales:

```
Tabla = MatrixForm[{PrimerRenglón, SubTabla⟦1⟧, SubTabla⟦2⟧, SubTabla⟦3⟧, ÚltimoRenglón}]
        forma de matriz
```

Cálculo de las coordenadas centroidales:

```
SumaVi = Cuadro⟦5⟧⟦2⟧
SumaVxi = Cuadro⟦5⟧⟦6⟧
SumaVyi = Cuadro⟦5⟧⟦7⟧
SumaVzi = Cuadro⟦5⟧⟦8⟧
```

$$xG2 = \frac{SumaVxi}{SumaVi}$$

$$yG2 = \frac{SumaVyi}{SumaVi}$$

$$zG2 = \frac{SumaVzi}{SumaVi}$$

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Mecánica
Agosto de 2022

Yukihiro Minami Koyama
Gloria Ramírez Romero