FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 4 – parte 1:

# Introducción a la dinámica de la partícula

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

M.I Yukihiro Minami Koyama

# Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

## Tema 4
## Introducción a la dinámica de la partícula, parte 1

### Ejercicio 4.1

Se lanza verticalmente un cuerpo con una rapidez inicial de $v_0 = 5\ \frac{m}{s}$, hacia arriba, desde una posición ubicada a 1.0 m del piso.
Determine las expresiones de la rapidez y la posición del cuerpo en función del tiempo, así como la altura máxima que alcanza y el tiempo que transcurre hasta que choca con el piso. Desprecie la fuerza de fricción viscosa del aire, así como el efecto del principio de Bernoulli sobre el cuerpo.
Asimismo, dibuje las gráficas de la aceleración, la rapidez y la posición del cuerpo con respecto al tiempo, e intreprete dichas gráficas con base en el concepto de área bajo la curva.

La metodología que puede aplicarse para resolver problemas de Dinámica es el siguiente:

1 Dibujar el diagrama de cuerpo libre del objeto de estudio, luego de que ya se haya empezado a mover. En los problemas iniciales, no se considerarán las fuerzas que producen el movimiento, sino que se tomará en cuenta las condiciones iniciales que producen.

2 Luego de determinar la representación vectorial de todas las fuerzas que actúan en el objeto de estudio, se obtiene la resultante de todas las fuerzas.

3 Con base en la segunda ley de Newton, se plantea la ecuación que relaciona la resultante de todas las fuerzas con el producto de la masa por la aceleración.

4 Se calcula la aceleración del objeto de estudio a partir de la ecuación anterior.

5 Se plantea la ecuación diferencial de la aceleración, que se define como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, es decir:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$$

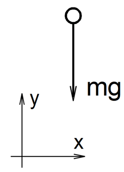
a partir de la cual, por medio del método de separación de variables y de integración, considerando como el límite inferior de las integrales definidas las condiciones iniciales asociadas a cada variable, y como el límite superior las propias variables de integración, se obtiene el vector velocidad.

6 De forma similar al punto anterior, con base en la ecuación diferencial de la velocidad, que se define como la derivada de la posición con respecto al tiempo, cuya expresión es:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

se obtiene el vector de posición del objeto de estudio.

1 El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:




2 La representación vectorial del peso es:

$\overline{W} = \{0, -mg\}$

3 Con base en la segunda ley de Newton, se plantea la siguiente ecuación vectorial:

$\overline{W} = m\,\overline{a}$

donde:

$\overline{a} = \{a_x, a_y\}$

Sustituyendo los vectores conocidos:

$\{0, -mg\} = m\,\{a_x, a_y\}$

4 De la ecuación anterior, se obtienen las siguientes expresiones escalares:

$0 = m\,a_x$

$-m\,g = m\,a_y$

de donde se obtiene que:

$a_x = 0$

$a_y = -g$

Por consiguiente:

$\overline{a} = \{0, -g\}$

5 Luego, se plantea y resuelve la ecuación diferencial de la aceleración:

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

de donde:

$\overline{a}\,dt = d\overline{v}$

$\{0, -g\}\,dt = d\overline{v}$

$\int_{t_0}^{t} \{0, -g\}\,dt = \int_{v_0}^{v} d\overline{v}$

En la expresión anterior, $t_0$ es el tiempo inicial, usualmente CERO, y $\overline{v_0}$ es el vector de velocidad inicial. Con base en el enunciado del problema, se puede establecer que dicho vector es:

$\overline{v_0} = \{0, 5\}\,\frac{m}{s}$

Al resolver las integrales de la expresión correspondiente, queda que:

$\{0, -g\}\,t\,]_0^t = \overline{v}\,]_{\{0,5\}}^{\overline{v}}$

$\{0, -g\}\,t - \{0, -g\}\,(0) = \overline{v} - \{0, 5\}$

$\{0, -g\,t\} = \overline{v} - \{0, 5\}$

$\overline{v} = \{0, -g\,t\} + \{0, 5\}$

$\overline{v} = \{0, -g\,t + 5\}$

La expresión de la velocidad del cuerpo, en función del tiempo, es:

$\overline{v} = \{0, -9.81\,t + 5\}$.

6 Y por último, se resuelve la ecuación diferencial de la velocidad:

$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$

de donde:

$\overline{v}\, dt = d\overline{r}$

$\{0, -g\,t + 5\}\, dt = d\overline{r}$

$\int_{t_0}^{t} \{0, -gt + 5\}\, dt = \int_{r_0}^{\overline{r}} d\overline{r}$

En este caso, la posición inicial es 1 m arriba del piso, que se considera que tiene una ordenada nula. Por consiguiente la posición inicial, $\overline{r_0}$ es:

$\overline{r_0} = \{0, 1\}$ m

De donde:

$\int_{0}^{t} \{0, -gt + 5\}\, dt = \int_{\{0,1\}}^{\overline{r}} d\overline{r}$

Luego de resolver las integrales anteriores:

$\{0, -\frac{1}{2} g\, t^2 + 5\,t\}]_0^t = \overline{r}\,]_{\{0,1\}}^{\overline{r}}$

$\{0, -\frac{1}{2} g\, t^2 + 5\,t\} - \{0, -\frac{1}{2} g\, 0^2 + 5\,(0)\} = \overline{r} - \{0, 1\}$

$\overline{r} = \{0, -\frac{1}{2} g\, t^2 + 5\,t + 1\}$

## La expresión de la posición del cuerpo en función del tiempo es :

$$\overline{r} = \left\{0, -4.905\, t^2 + 5\,t + 1\right\}$$

Para obtener la altura máxima que alcanza el cuerpo, es necesario obtener el valor del instante de tiempo en el que alcanzó una velocidad nula, debido a que es justamente en dicho instante cuando la velocidad, que cuando sube es positiva, disminuye hasta que se hace cero y luego se hace negativa cuando empieza a bajar, por tanto, justo cuando es cero es cuando cambia el sentido de su movimiento.

También puede explicarse como un problema de máximos y mínimos, para lo cual es necesario derivar la expresión de la posición, que resulta ser la rapidez que es la magnitud de la velocidad, e igualarla a cero.

Al instante de tiempo en el que alcanza su altura máxima se le denomina tiempo crítico, $t_{\text{crít}}$:

$\overline{v} = \{0, 0\}$

$\{0, -9.81\,t + 5\} = \{0, 0\}$

$-9.81\,t + 5 = 0$

$9.81\,t = 5$

$t = \frac{5}{9.81}$

$t = 0.509684$ s

Por tanto, la altura máxima que alcanza el cuerpo se obtiene al sustituir el tiempo crítico en la expresión de la posición:

$\bar{r} = \{0, -4.905\, t^2 + 5\, t + 1\}$

$y_{max} = -4.905\, t_{crít}^2 + 5\, t_{crít} + 1$

$y_{max} = -4.905\, (0.509684)^2 + 5\, (0.509684) + 1$

$y_{max} = -4.905\, (0.259778) + 2.5484 + 1$

$y_{max} = -1.2742 + 2.5484 + 1$

$y_{max} = 2.2742$ m

## El cuerpo alcanza una altura máxima de :

$y_{max} = 2.2742$ m.

Para determinar el tiempo que transcurre hasta que choca con el piso, simplemente se resuelve la ecuación de la posición vertical cuando es igual a cero:

$y = -4.905\, t^2 + 5\, t + 1$

$0 = -4.905\, t^2 + 5\, t + 1$

Luego de normalizar la ecuación, se obtiene:

$\frac{-4.905}{-4.905}\, t^2 + \frac{5}{-4.905}\, t + \frac{1}{-4.905} = \frac{0}{-4.905}$

$t^2 - 1.01937\, t - 0.203874 = 0$

Se aplica la fórmula para la resolución de ecuaciones cuadráticas simplificada, con a = 1:

$t_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

$t_{1,2} = \frac{1.01937}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1.01937}{2}\right)^2 + 0.203874}$

$t_{1,2} = 0.509685 \pm \sqrt{0.509685^2 + 0.203874}$

$t_{1,2} = 0.509685 \pm \sqrt{0.259779 + 0.203874}$

$t_{1,2} = 0.509685 \pm \sqrt{0.463653}$

$t_{1,2} = 0.509685 \pm 0.680921$

Dado que la raíz negativa no tiene interpretación física:

$t_1 = 0.509685 + 0.680921$

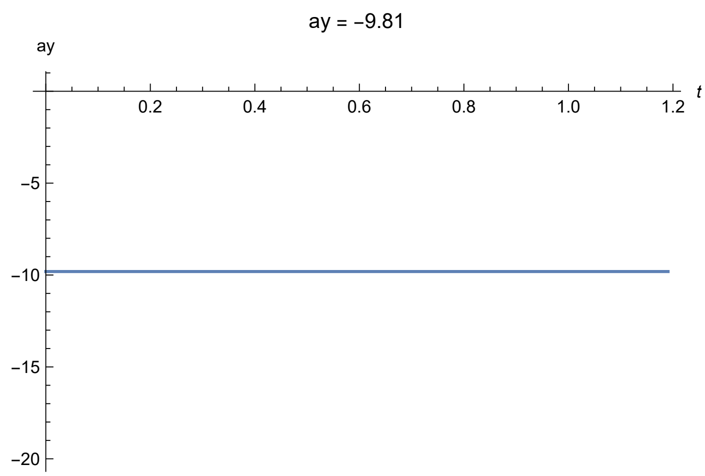
$t_1 = 1.190606$ s

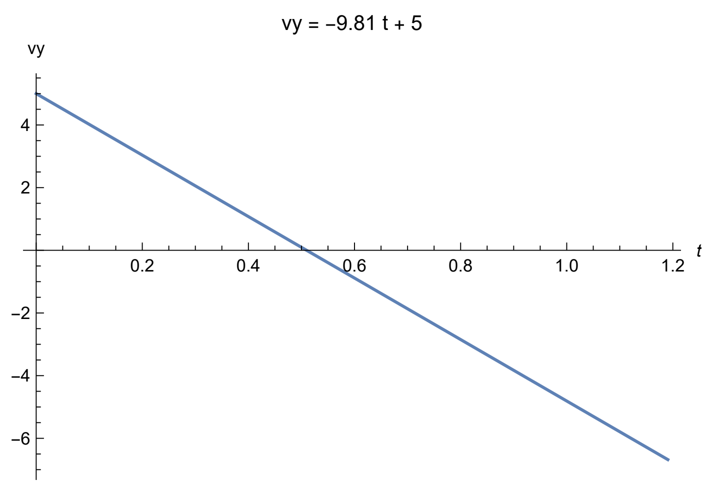
## El tiempo que transcurre hasta que el cuerpo choca con el piso es:

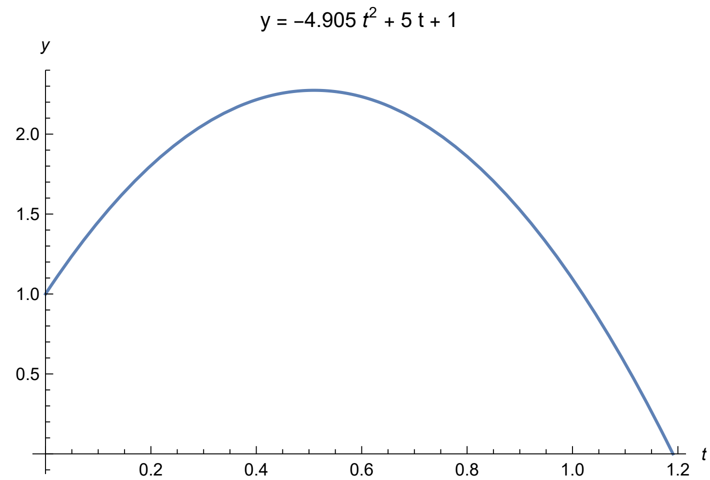
$t_1 = 1.190606$ s.

Las gráficas de la aceleración, la rapidez y la posición del cuerpo con respecto al tiempo son las siguientes:

```
t1 = 1.190606;
aySol = -9.81;
Plot[aySol, {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, ay}, PlotLabel → "ay = -9.81"]
representación gráfica   etiqueta de ejes   etiqueta de representación
vySol = -9.81 t + 5;
Plot[vySol, {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, vy}, PlotLabel → "vy = -9.81 t + 5"]
representación gráfica   etiqueta de ejes   etiqueta de representación
ySol = -4.905 t^2 + 5 t + 1;
Plot[ySol, {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, y}, PlotLabel → "y = -4.905 t^2 + 5 t + 1"]
representación gráfica   etiqueta de ejes   etiqueta de representación
```






Se puede verificar que, debido a que la aceleración, $a_y$, es la derivada de la rapidez, $v_y$, con respecto al tiempo, t, y la rapidez es la derivada de la posición, y, con respecto al tiempo, la rapidez se puede obtener como el área bajo la curva de la aceleración, ya que es la interpretación geométrica de la integral y, de forma similar, la posición se puede obtener como el área bajo la curva de la rapidez.

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
g = 9.81;
vecV0 = {0, 5};
t0 = 0;
vecA = {ax, ay}
vecV = {vx, vy}
vecR = {x, y}
vecR0 = {0, 1};
```

Suma de fuerzas que actúan en el cuerpo:

```
W = {0, -m g}
SumaF = W
```

Con base en la Segunda ley de Newton:

```
ec1 = SumaF == m vecA
```

Se obtiene la aceleración:

```
resp1 = Solve[ec1, vecA]
        resuelve
vecASol = vecA /. resp1[[1]]
```

Dado que vecASol = $\frac{dv}{dt}$, vecASol $dt$ = $dv$, por consiguiente:

```
ec2 = ∫_{vecV0}^{vecV} dv == ∫_{t0}^{t} vecASol dt
resp2 = Solve[ec2, vecV]
        resuelve
vecVSol = vecV /. resp2[[1]]
```

Asimismo, como vecVSol = $\frac{dr}{dt}$, entonces vecVSol $dt$ = $dr$, de donde:

```
ec3 = ∫_{vecR0}^{vecR} dR == ∫_{t0}^{t} vecVSol dt
resp3 = Solve[ec3, vecR]
        resuelve
vecRSol = vecR /. resp3[[1]]
```

Para determinar la altura máxima que alcanza, se obtiene el instante de tiempo en el que la velocidad del cuerpo es nula:

```
ec4 = vecVSol == {0, 0}
resp4 = Solve[ec4, t]
        resuelve
tcrít = t /. resp4[[1]]
```

El tiempo crítico obtenido se sustituye en la componente en y del vector de posición vecRSol:

```
ymax = vecRSol[[2]] /. t → tcrít
```

Se calcula el tiempo en el que la pelota choca con el piso cuando y = 0:

```
ec5 = vecRSol[[2]] == 0
resp5 = Solve[ec5]
        resuelve
t1Sol = t /. resp5[[2]]
```

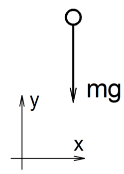
Dibujo de las gráficas de la magnitud de la aceleración, $a_y$, de la componente de la velocidad en y, $v_y$, y de la posición vertical del cuerpo, y, desde que inicia el movimiento hasta que choca con el piso:

```
Plot[vecASol[[2]], {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, ay}]
representación gráfica         etiqueta de ejes
Plot[vecVSol[[2]], {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, vy}]
representación gráfica         etiqueta de ejes
Plot[vecRSol[[2]], {t, 0, t1}, AxesLabel → {t, y}]
representación gráfica         etiqueta de ejes
```

## Ejercicio 4.2

Un lanzador profesional de béisbol lanza verticalmente y hacia arriba, una pelota que tiene una masa aproximada de 0.2 kg desde el suelo.
Si la rapidez inicial que le imprime el lanzador a la pelota es $v_0$ = 40 m/s (90 mph), determine la distancia que ésta recorre en 6 segundos.
Desprecie la fuerza de fricción viscosa del aire, así como el efecto del principio de Bernoulli sobre la pelota.

Para este problema, luego de que fue lanzada la pelota, el diagrama de cuerpo libre es el siguiente:




La representación vectorial del peso es:

$\overline{W}$ = {0, -mg}

que en este caso es la fuerza resultante.

Con base en la segunda ley de Newton, se obtiene la siguiente ecuación vectorial:

$\overline{W} = \mathrm{m}\,\overline{a}$

donde:

$\overline{a} = \{a_x, a_y\}$

Sustituyendo los vectores conocidos:

$\{0, -\mathrm{mg}\} = \mathrm{m}\,\{a_x, a_y\}$

De la ecuación anterior, se obtienen las siguientes expresiones escalares:

$0 = \mathrm{m}\,a_x$

$-\mathrm{m\,g} = \mathrm{m}\,a_y$

$a_x = 0$

$a_y = -\mathrm{g}$

Por consiguiente:

$\overline{a} = \{0, -\mathrm{g}\}$

Luego, se plantea y resuelve la ecuación diferencial de la aceleración:

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

de donde:

$\overline{a}\,dt = d\overline{v}$

$\{0, -\mathrm{g}\}\,dt = d\overline{v}$

$\int_{t_0}^{t}\{0, -g\}\,dt = \int_{\overline{v_0}}^{\overline{v}} d\overline{v}$

En la expresión anterior, $t_0$ es el tiempo inicial, usualmente CERO, y $\overline{v_0}$ es el vector de velocidad inicial. Con base en el enunciado del problema, se puede establecer que dicho vector es:

$\overline{v_0} = \{0, 40\}\ \frac{m}{s}$

Al resolver las integrales de la expresión correspondiente, queda que:

$\{0, -g\}\, t\,]_0^t = \bar{v}\,]_{\{0, 40\}}^{\bar{v}}$

$\{0, -g\}\, t - \{0, -g\}\,(0) = \bar{v} - \{0, 40\}$

$\{0, -g\, t\} = \bar{v} - \{0, 40\}$

$\bar{v} = \{0, -g\, t\} + \{0, 40\}$

$\bar{v} = \{0, -g\, t + 40\}$

## La expresión de la velocidad del cuerpo, en función del tiempo, es:
## $\bar{v} = \{0, -9.81\, t + 40\}$.

Y por último, se resuelve la ecuación diferencial de la velocidad:

$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$

de donde:

$\bar{v}\, dt = d\bar{r}$

$\{0, -g\, t + 40\}\, dt = d\bar{r}$

$\int_{t_0}^{t} \{0, -gt + 40\}\, dt = \int_{r_0}^{\bar{r}} d\bar{r}$

Usualmente se establece como posición inicial el origen:

$\int_{0}^{t} \{0, -gt + 40\}\, dt = \int_{\{0,0\}}^{\bar{r}} d\bar{r}$

Luego de resolver las integrales anteriores:

$\{0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + 40\, t\}\,]_0^t = \bar{r}\,]_{\{0, 0\}}^{\bar{r}}$

$\{0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + 40\, t\} - \{0, -\frac{1}{2}\, g\, 0^2 + 40\,(0)\} = \bar{r} - \{0, 0\}$

$\bar{r} = \{0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + 40\, t\}$

## La expresión de la posición del cuerpo en función del tiempo es :
## $\bar{r} = \left\{0, -4.905\, t^2 + 40\, t\right\}$

Como puede observarse, cuando el movimiento es rectilíneo y se hace coincidir uno de los ejes del marco de referencia con el movimiento del cuerpo de estudio, únicamente una de las componentes de la aceleración, velocidad y posición es diferente de cero, en este caso las componentes en y:

$a_y = -g$

$v_y = -g\, t + 40$

$y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + 40\, t$

Por facilidad y economía de escritura, cuando el movimiento sea rectilíneo, se establecerán y resolverán ecuaciones escalares, sin perder de vista que en realidad se están manejando vectores.

Ahora, para resolver el problema, en este caso particular se puede obtener la posición para t = 6 s:

$y(t = 6) = -\frac{1}{2}\,(9.81)\, 6^2 + 40\,(6)$

$y(t = 6) = -4.905\,(36) + 240$

$y(t = 6) = -176.58 + 240$

$y(t = 6) = 63.42$ m

Este resultado sería la distancia recorrida si para dicho tiempo el cuerpo está subiendo, es decir, la componente en y de la velocidad es positiva:

$v_y$ (t = 6) = -9.81 (6) + 40

$v_y$ (t = 6) = -58.86 + 40

$v_y$ (t = 6) = -18.86 $\frac{m}{s}$

Dado que el resultado es negativo, esto indica que el cuerpo va bajando. Esto quiere decir que primero alcanzó su altura máxima y posteriormente empezó a bajar. Entoces, es necesario determinar cuándo alcanzó su altura máxima, que corresponde al instante en que su velocidad es cero y que se le denomina tiempo crítico, $t_{\text{crít}}$:

$v_y = 0$

$-9.81\ t_{\text{crít}} + 40 = 0$

$9.81\ t_{\text{crít}} = 40$

$t_{\text{crít}} = \frac{40}{9.81}$

$t_{\text{crít}} = 4.077$ s

Por tanto, la altura máxima se obtiene al sustituir el tiempo crítico en la expresión de la posición:

$y_{\max} = -4.905\ t_{\text{crít}}^2 + 40\ t_{\text{crít}}$

$y_{\max} = -4.905\ (4.077)^2 + 40\ (4.077)$

$y_{\max} = -4.905\ (16.6258) + 163.0989$

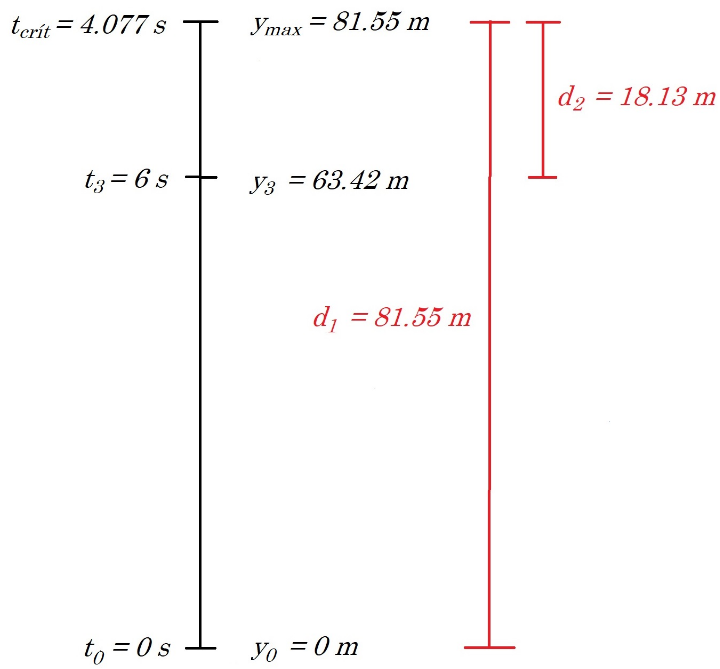
$y_{\max} = -81.5494 + 163.0989$

$y_{\max} = 81.5495$ m

La pelota alcanza una altura máxima

$y_{\max} = 81.55$ m.

En la siguiente figura se muestra gráficamente lo que ocurre con la posición de la pelota. Inicia su movimiento en el suelo, $y_0 = 0$, alcanza su altura máxima, $y_{max} = 81.55$ m, en el instante $t_{crít} = 4.077$ s, y baja hasta que $t_3 = 6$, cuando su posición es $y_3 = 63.42$ m.




Por consiguiente, la distancia recorrida por la pelota es lo que subió hasta la altura máxima, $d_1 = 81.55$ m, más lo que bajó hasta t = 6 s, que es $d_2 = y_{max} - y_3$:

$d_2 = 81.55 - 63.42$

$d_2 = 18.13$ m

distRecorrida = $d_1 + d_2$

distRecorrida = 81.55 + 18.13

distRecorrida = 99.68 m

La distancia recorrida por la pelota de béisbol en 6 segundos es:

distRecorrida = 99.68 m.

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.2;
g = 9.81;
vecR0 = {0, 0}
vecV0 = {0, 40};
t3 = 6;
vecA = {ax, ay}
vecV = {vx, vy}
vecR = {x, y}
```

Suma de fuerzas que actúan en el cuerpo:

```
W = {0, -m g}
SumaF = W
```

Con base en la Segunda ley de Newton:

```
ec1 = SumaF == m vecA
```

Se obtiene la aceleración:

```
resp1 = Solve[ec1, vecA]
        resuelve
vecASol = vecA /. resp1[[1]]
```

Dado que vecASol = $\frac{dv}{dt}$, vecASol $d$t = $d$v, por consiguiente:

```
ec2 = ∫_vecV0^vecV dv == ∫_0^t vecASol dt
resp2 = Solve[ec2, vecV]
        resuelve
vecVSol = vecV /. resp2[[1]]
```

Asimismo, como vecVSol = $\frac{dr}{dt}$, entonces vecVSol $d$t = $d$r, de donde:

```
ec3 = ∫_vecR0^vecR dR == ∫_0^t vecVSol dt
resp3 = Solve[ec3, vecR]
        resuelve
vecRSol = vecR /. resp3[[1]]
```

Para determinar la altura máxima que alcanza, se obtiene el instante de tiempo en el que la velocidad del cuerpo es nula:

```
ec4 = vecVSol == {0, 0}
resp4 = Solve[ec4, t]
        resuelve
tcrítico = t /. resp4[[1]]
```

El tiempo crítico obtenido se sustituye en la componente en y del vector de posición vecRSol:

```
ymax = vecRSol[[2]] /. t → tcrítico
```

Se calcula la posición de la pelota cuando $t_3 = 6$ s:

```
y3 = vecRSol⟦2⟧ /. t → t3
```

Se calcula la distancia recorrida como la suma de lo que subió la pelota más lo que bajó:

```
distRecorrida = ymax + (ymax - y3)
```

## Ejercicio 4.3

En la figura se muestra un bloque que se suelta en A del reposo sobre el plano inclinado.
Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es $\mu_k$ = 0.25, determine la rapidez del bloque en el instante en que éste bajó 2 m.

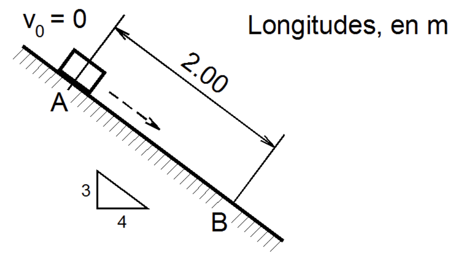
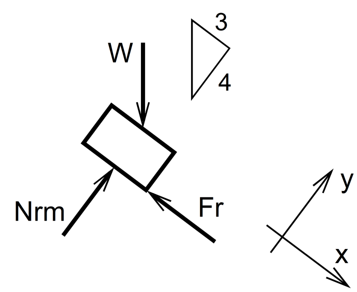



Diagrama de cuerpo libre del bloque:




Nota: con base en el teorema de ángulo entre perpendiculares, se puede verificar que el ángulo que forma la horizontal con el plano inclinado es igual al ángulo que forma la vertical con la normal a dicho plano inclinado.

Representación vectorial de las fuerzas:

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, \text{magN}\}$

$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-magFr}, 0\}$

$\overline{W} = \text{m g} \left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$

La resultante, o suma de fuerzas, es:

$\overline{R} = \overline{\text{Nrm}} + \overline{\text{Fr}} + \overline{W}$

$\overline{R} = \{0, \text{magN}\} + \{\text{-magFr}, 0\} + \{\frac{3}{5}\text{ m g}, -\frac{4}{5}\text{ m g}\}$

$\overline{R} = \{\text{-magFr} + \frac{3}{5}\text{ m g}, \text{magN} - \frac{4}{5}\text{ m g}\}$

Se sustituye en la ecuación de la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \text{m } \overline{a}$

En este caso, el vector aceleración sólo tiene componente en x:

$\overline{a} = \{a_x, 0\}$

Entonces, la ecuación queda:

$\{\text{-magFr} + \frac{3}{5}\text{ m g}, \text{magN} - \frac{4}{5}\text{ m g}\} = \text{m }\{a_x, 0\}$

De la ecuación vectorial anterior se pueden establecer las siguientes expresiones escalares:

$\text{-magFr} + \frac{3}{5}\text{ m g} = \text{m } a_x$

$\text{magN} - \frac{4}{5}\text{ m g} = 0$

De la segunda ecuación se obtiene:

$magN = \frac{4}{5}$ m g

La magnitud de la fuerza de fricción cinética, magFr, puede obtenerse como:

$magFr = \mu_k$ magN

Por consiguiente, sustituyendo el valor de la magnitud de la normal:

$magFr = \mu_k \frac{4}{5}$ m g

$magFr = 0.25 \frac{4}{5}$ m g

magFr = 0.2 m g

Entonces, si se sustituye el último valor en la primera ecuación escalar:

$-0.2 \text{ m g} + 0.6 \text{ m g} = \text{m } a_x$

$\text{m } a_x = 0.4 \text{ m g}$

$a_x = 0.4$ g

$a_x = 3.924 \frac{m}{s^2}$

A partir del valor de la aceleración, con base en su definición puede obtenerse la rapidez del bloque:

$a_x = \frac{d v_x}{d t}$

$a_x \, d\text{t} = d v_x$

$3.924 \, d\text{t} = d v_x$

$\int_{t_0}^{t} 3.924 \, dt = \int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x$

Para este problema las condiciones iniciales son que cuando inicia el movimiento del cuerpo en el instante $t_0 = 0$ s, el bloque se suelta del reposo, es decir, $v_{x0} = 0 \frac{m}{s}$, por lo cual:

$\int_0^t 3.924 \, dt = \int_0^{v_x} dv_x$

$3.924 \text{ t} \,]_0^t = v_x \,]_0^{v_x}$

$3.924 \text{ t} - 0 = v_x - 0$

$v_x = 3.924$ t

A partir de la rapidez en x, $v_x$, se puede obtener la posición x, con base en la definición de rapidez:

$v_x = \frac{dx}{dt}$

$v_x \, d\text{t} = d\text{x}$

$3.924 \text{ t} \, d\text{t} = d\text{x}$

$\int_0^t 3.924 \, t \, dt = \int_{x_0}^{x} dx$

donde la posición inicial se establece en $x_0 = 0$:

$3.924 \frac{t^2}{2} \,]_0^t = \text{x} \,]_0^x$

$1.962 \, t^2 - 0 = \text{x} - 0$

$\text{x} = 1.962 \, t^2$

Puede calcularse el tiempo que transcurre para que el bloque recorra $x_f = 2$ m:

$x_f = 1.962 \, t_f^2$

$2 = 1.962 \, t_f^2$

$1.962 \, t_f^2 = 2$

$$t_f^2 = \frac{2}{1.962}$$
$$t_f^2 = 1.0194$$
$$t_f = \sqrt{1.0194}$$
$$t_f = 1.0096 \text{ s}$$

Y en ese instante, se puede calcular la rapidez a la que se mueve el bloque:

$$v_{x,f} = 3.924\, t_f$$
$$v_{x,f} = 3.924\, (1.0096)$$
$$v_{x,f} = 3.9618\, \frac{m}{s}$$

La rapidez del bloque en el instante en que éste bajó 2 m es:

$$v_{x,f} = 3.9618\, \frac{m}{s}.$$

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
μk = 0.25;
xf = 2;
g = 9.81;
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
Nrm = {0, magN}
Fr = {-magFr, 0}
W = m g {3/5, -4/5}
```

Cálculo de la resultante

```
R = W + Nrm + Fr
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec1 = R == m a
```

La aceleración sólo tiene componente en x:

```
a = {ax, 0}
magFr = μk magN
resp1 = Solve[ec1, {ax, magN}]
        resuelve
axSol = ax /. resp1[[1]]
```

Dado que $ax = \frac{dvx}{dt}$, $dvx = ax\,dt$, entonces :

```
ec2 = ∫_0^vx ⅆvx == ∫_0^t axSol ⅆt
resp2 = Solve[ec2, vx]
        resuelve
vxSol = vx /. resp2[[1]]
```

De forma similar, $vx = \frac{dx}{dt}$, por tanto $dx = vx\,dt$, integrando ambos miembros queda :

```
ec3 = ∫_0^x ⅆx == ∫_0^t vxSol ⅆt
resp3 = Solve[ec3, x]
        resuelve
xSol = x /. resp3[[1]]
```

Cuando el bloque recorrió 2 m, en tiempo transcurrido será:

```
ec4 = xSol == xf
resp4 = Solve[ec4]
        resuelve
tSol = t /. resp4[[2]]
```

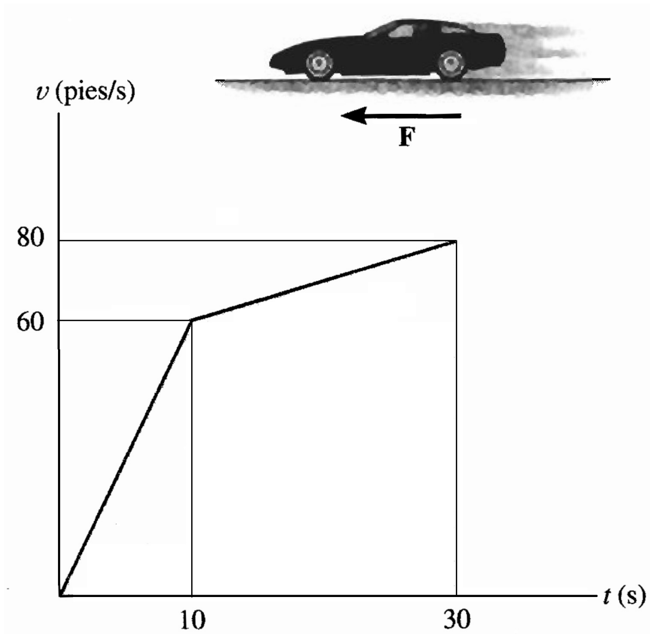
Se sustituye el tiempo obtenido en la expresión de la rapidez vx:

```
vf = vxSol /. t → tSol
```

## Ejercicio 4.4

### Problema 13-17, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 8ª edición, Pearson, Prentice Hall, p. 116.

La rapidez del carro deportivo de 3,500 lb está graficada sobre el periodo de tiempo de 30 s. Grafique la variación de la fuerza de tracción **F** necesaria para producir el movimiento.




Con base en la definición de aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Se puede obtener la aceleración del automóvil deportivo derivando la función de la rapidez mostrada en la figura anterior, la cual, dado que la gráfica está integrada por dos rectas y la interpretación de la derivada es la pendiente de la tangente, la pendiente de dichas rectas será la derivada buscada.

En el intervalo de $0 \leq t \leq 10$:

$$a_1 = \frac{60 - 0}{10 - 0}$$

$$a_1 = 6 \, \frac{\text{ft}}{s^2}$$

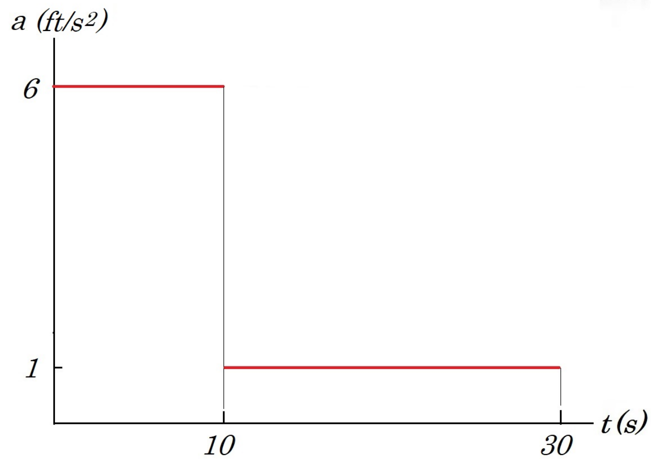
Y en el intervalo de $10 < t \leq 30$:

$$a_2 = \frac{80 - 60}{30 - 10}$$

$$a_2 = \frac{20}{20}$$

$$a_2 = 1 \, \frac{\text{ft}}{s^2}$$

Gráfica de la aceleración del automóvil deportivo con respecto al tiempo




Ahora, con base en la segunda ley de Newton, la fuerza de tracción se puede obtener como el producto de la masa del automóvil deportivo multiplicada por la aceleración.
Dado que el peso de dicho automóvil es de 3,500 lb, se puede calcular su masa luego de dividir dicha cantidad por la aceleración del campo gravitatorio terrestre:

$m = \frac{W}{g}$

$m = \frac{3500}{32.2}$

m = 108.6957 slug

Por consiguiente, la fuerza de tracción, en el intervalo de $0 \leq t \leq 10$ es:

$\boldsymbol{F_1} = m\, a_1$

$\boldsymbol{F_1} = (108.6957)\,(6)$

$\boldsymbol{F_1} = 652.1739$ lb

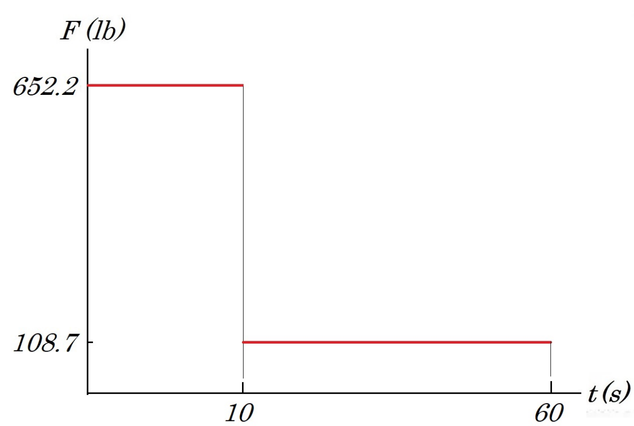
Y en el intervalo de $10 < t \leq 30$:

$\boldsymbol{F_2} = m\, a_2$

$\boldsymbol{F_2} = (108.6957)\,(1)$

$\boldsymbol{F_2} = 108.6957$ lb

Gráfica de la fuerza de tracción del automóvil deportivo con respecto al tiempo



## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
t0 = 0;
v0 = 0;
t1 = 10;
t2 = 30;
v1 = 60;
v2 = 80;
W = 3500;
g = 32.2;
```

$$a1 = \frac{v1 - v0}{t1 - t0}$$

$$a2 = \frac{v2 - v1}{t2 - t1}$$

$$m = \frac{W}{g}$$

```
F1 = m a1
F2 = m a2
```

## Ejercicio 4.5

## Problema 1.1, Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 6.

El bloque de la figura se suelta desde el reposo, sobre el plano inclinado y rugoso; después de soltarlo, se observa que la magnitud de la rapidez que adquiere justo al llegar a la parte inferior de dicho plano es de $\mathbf{2.45}\ \frac{m}{s}$; para estas condiciones, determine:

a) el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto; y

b) el tiempo que tarda en llegar al extremo inferior del plano.

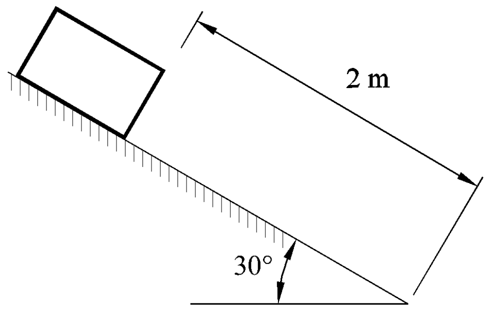
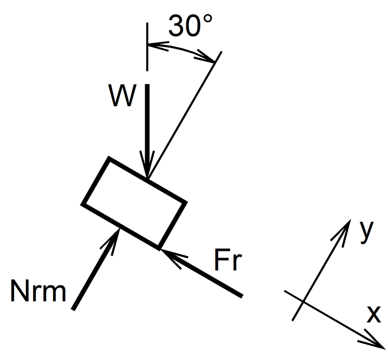



Diagrama de cuerpo libre después de soltar al bloque:




Representación vectorial de las fuerzas:

$\overline{\text{Fr}}$ = {-magFr, 0}

$\overline{\text{Nrm}}$ = {0, magN}

$\overline{W}$ = {m g Sin [30°], -m g Cos [30°]}

Aplicación de la segunda ley de Newton:

$\overline{R}$ = $\overline{\text{Fr}}$ + $\overline{\text{Nrm}}$ + $\overline{W}$

$\overline{R}$ = {-magFr, 0} + {0, magN} + {m g Sin [30°], -m g Cos [30°]}

$\overline{R}$ = {-magFr + m g Sin [30°], magN - m g Cos [30°]}

$\overline{R}$ = m {$a_x$, 0}

{-magFr + m g Sin [30°], magN - m g Cos [30°]} = m {$a_x$, 0}

De la expresión vectorial anterior se pueden establecer las siguientes ecuaciones escalares:

-magFr + m g Sin [30°] = m $a_x$

magN - m g Cos [30°] = 0

De la segunda ecuación se obtiene que:

$magN = m\ g\ Cos[30°]$

es decir:

$magN = 0.866\ m\ g$

Dado que la magnitud de la fuerza de fricción es:

$magFr = \mu_k\ magN$

$magFr = \mu_k\ 0.866\ m\ g$

Luego de sustituir lo anterior en la primera ecuación se tiene lo siguiente:

$-0.866\ \mu_k\ m\ g + 0.5\ m\ g = m\ a_x$

$(0.5 - 0.866\ \mu_k)\ m\ g = m\ a_x$

Se divide ambos miembros por m:

$(0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g = a_x$

Dicho valor de magnitud de aceleración es constante, ya que tanto g como $\mu_k$ son constantes.
Con base en lo anterior, se puede obtener la rapidez en x aplicando su definición como derivada de la componente de la aceleración en x con respecto al tiempo:

$a_x = \frac{d v_x}{d t}$

$a_x\ d t = d v_x$

$(0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ d t = d v_x$

$\int_{t_0}^{t} (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ d t = \int_{v_{0,x}}^{v_x} d v_x$

En el enunciado del problema se establece que el bloque se suelta desde el reposo, por consiguiente la rapidez inicial $v_{0,x} = 0$, y se establece que el tiempo inicial $t_0 = 0$ para simplificar la resolución del problema:

$\int_{0}^{t} (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ d t = \int_{0}^{v_x} d v_x$

$(0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t\ ]_0^t = v_x\ ]_0^{v_x}$

$(0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t - (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ (0) = v_x - 0$

de donde:

$v_x = (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t$

Dado que se desea relacionar la rapidez final $v_f = 2.45\ \frac{m}{s}$ en el instante en que el bloque haya llegado a la parte inferior del plano, que está a 2 m hacia abajo en sentido del movimiento, se requiere obtener la expresión de la posición del bloque, lo que puede realizarse con base en la definición de la posición x como la derivada de la rapidez en x con respecto al tiempo:

$v_x = \frac{d x}{d t}$

$v_x\ d t = d x$

$(0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t\ d t = d x$

$\int_{0}^{t} (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t\ d t = \int_{x_0}^{x} d x$

Para facilitar la resolución del problema se establece como posición inicial $x_0 = 0$:

$\int_{0}^{t} (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t\ d t = \int_{0}^{x} d x$

$(0.5 - 0.866\ \mu_k)\ \frac{1}{2}\ g\ t^2\ ]_0^t = x\ ]_0^x$

$\frac{1}{2}\ (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t^2 - \frac{1}{2}\ (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ 0^2 = x - 0$

$x = \frac{1}{2}\ (0.5 - 0.866\ \mu_k)\ g\ t^2$

Para determinar el instante en que el bloque llega a la parte inferior del plano, se sustituye x por 2:

$$2 = \frac{1}{2}(0.5 - 0.866\,\mu_k)\,g\,t_f^2 \qquad (1)$$

Instante en el cual el bloque tiene una rapidez de 2.45 $\frac{m}{s}$, valor que puede sustituirse en la expresión de la rapidez:

$$2.45 = (0.5 - 0.866\,\mu_k)\,g\,t_f$$

Se multiplica la expresión anterior por $\frac{1}{2}\,t_f$:

$$\frac{1}{2}\,t_f\,(2.45) = \frac{1}{2}\,t_f\,(0.5 - 0.866\,\mu_k)\,g\,t_f$$

$$1.225\,t_f = \frac{1}{2}(0.5 - 0.866\,\mu_k)\,g\,t_f^2 \qquad (2)$$

Dado que el miembro derecho de las ecuaciones 1 y 2 son iguales, se pueden igualar los miembros izquierdos:

$$2 = 1.225\,t_f$$

de donde:

$$t_f = \frac{2}{1.225}$$

$$t_f = 1.632653\text{ s}$$

Finalmente, se sustituye dicho valor de tiempo en la expresión de la rapidez para obtener el valor del coeficiente de fricción cinética:

$$2.45 = (0.5 - 0.866\,\mu_k)\,g\,t_f$$

$$2.45 = (0.5 - 0.866\,\mu_k)\,g\,(1.632653)$$

$$0.5 - 0.866\,\mu_k = \frac{2.45}{1.632653\,(9.81)}$$

$$0.866\,\mu_k = 0.5 - \frac{2.45}{16.016327}$$

$$0.866\,\mu_k = 0.5 - 0.152967$$

$$\mu_k = \frac{0.347033}{0.866}$$

$$\mu_k = 0.4$$

El coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto es:

$$\mu_k = 0.4$$

y el tiempo que tarda en llegar al extremo inferior del plano es:

$$t_f = 1.632653\text{ s.}$$

### Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
xf = 2;
vf = 2.45;
g = 9.81;
t0 = 0;
v0 = 0;
x0 = 0;
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
Fr = {-magFr, 0}
Nrm = {0, magN}
W = {m g Sin[30 °], -m g Cos[30 °]}
         seno               coseno
```

Segunda ley de Newton:

```
R = Fr + Nrm + W
ec1 = R == m {ax, 0}
magFr = μk magN
resp1 = Solve[ec1, {ax, magN}]
        resuelve
axSol = ax /. resp1[[1]]
```

Expresión de la rapidez en x, dado que axSol = $\frac{d\,vx}{d\,t}$, axSol $d$ t = $d$ vx, por tanto:

$$ec2 = \int_{t0}^{t} axSol \, dt == \int_{v0}^{vx} d\,vx$$

```
resp2 = Solve[ec2, vx]
        resuelve
vxSol = vx /. resp2[[1]]
```

Expresión de la posición x, dado que vxSol = $\frac{d\,x}{d\,t}$, vxSol $d$ t = $d$ x, por tanto:

$$ec3 = \int_{t0}^{t} vxSol \, dt == \int_{x0}^{x} d\,x$$

```
resp3 = Solve[ec3, x]
        resuelve
xSol = x /. resp3[[1]]
```

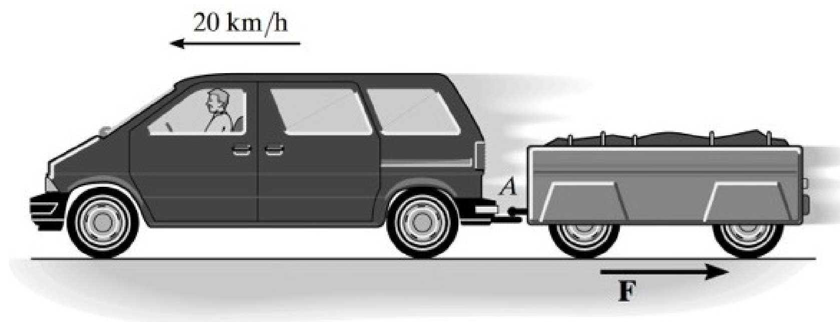
Cálculo del coeficiente de friccion cinética y el tiempo transcurrido:

```
ec4 = vxSol == vf
ec5 = xSol == xf
resp5 = Solve[{ec4, ec5}]
        resuelve
μkSol = μk /. resp5[[1]]
tfSol = t /. resp5[[1]]
```

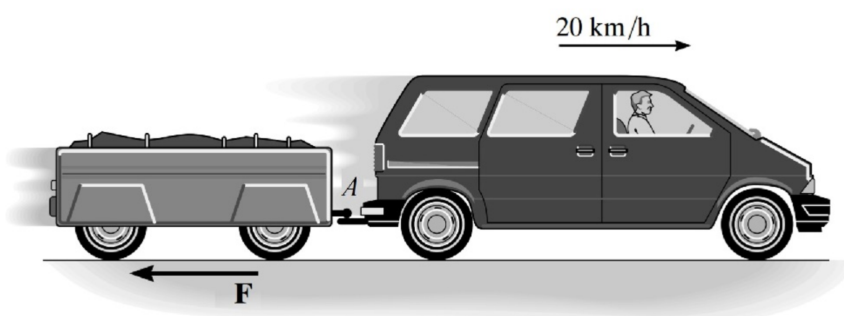
## Ejercicio 4.6

## Problema 13-4, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, $10^a$ edición, Pearson, Prentice Hall, p. 113.

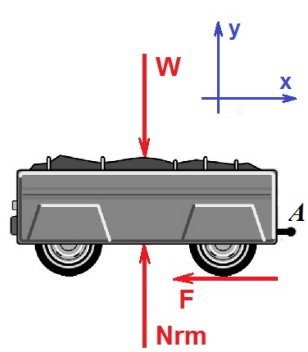
La vagoneta viaja a 20 $\frac{\text{km}}{h}$ cuando el acoplamiento del remolque en *A* falla. Si la masa del remolque es de 250 kg y recorre 45 m antes de detenerse, determine la fuerza horizontal constante **F** creada por la fricción de rodamiento que hace que el remolque se detenga.




Nota:
Se modificó el sentido de movimiento original del remolque con objeto de facilitar la obtención de los vectores que representan las fuerzas que actúan en él.




Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del remolque, después de que falló el acomplamiento con la vagoneta.



La representación de dichos vectores es la siguiente:

$\overline{F}$ = {-magF, 0}

$\overline{\text{Nrm}}$ = {0, magN}

$\overline{W}$ = {0, -m g}

Se obtiene la fuerza resultante:

$\overline{R} = \overline{F} + \overline{\text{Nrm}} + \overline{W}$

$\overline{R}$ = {-magF, 0} + {0, magN} + {0, -m g}

$\overline{R}$ = {-magF, magN - m g}

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{R}$ = m {$a_x$, 0}

{-magFr, magN - m g} = m {$a_x$, 0}

Se plantean y resuelven las ecuaciones escalares que se obtienen de la expresión anterior:

-magF = m $a_x$

$a_x = -\frac{\text{magF}}{m}$

$a_x = -\frac{\text{magF}}{250}$

$a_x = -0.004\,\text{magF}$

magN - m g = 0

magN = m g

magN = 250 (9.81)

magN = 2452.5 N

Con base en la regla de la cadena del cálculo diferencial, que corresponde a la derivada de una función compuesta o función de función, dado que la rapidez, $v_x$, es función del tiempo al igual que la posición, x, es posible establecer a la rapidez en función de la posición si se despeja la variable tiempo de una de las dos expresiones y se sustituye en la otra.

Por consiguiente, la aceleración puede escribirse de la siguiente manera, considerando la idea anterior mencionada:

$a_x = \frac{d v_x}{d t}$

$a_x = \frac{d v_x}{d x} \frac{d x}{d t}$

Dado que la definición de rapidez es:

$v_x = \frac{d x}{d t}$

al sustituirla en la expresión previa queda que:

$a_x = \frac{d v_x}{d x} v_x$

que puede escribirse como:

$a_x = v_x \frac{d v_x}{d x}$

Para la resolución de este problema, conviene emplear esta definición alternativa para resolver la ecuación diferencial de la aceleración:

$a_x = -0.004\,\text{magF}$

$v_x \frac{d v_x}{d x} = -0.004\,\text{magF}$

$v_x\, d v_x = -0.004\,\text{magF}\, d x$

$\int_{v_{o,x}}^{v_x} v_x\, d v_x = \int_{x_0}^{x} -0.004\,\text{magF}\, d x$

Las condiciones iniciales son:

$x_0 = 0$

$v_{0,x} = 20\ \frac{\text{km}}{h}$

Se requiere convertir esta rapidez de manera que sus unidades sean $\frac{m}{s}$ de la siguiente manera:

$v_{0,x} = 20\ \frac{\text{km}}{h}\ \text{x}\ \frac{1\,h}{3600\,s}\ \text{x}\ \frac{1000\,m}{1\,\text{km}}$

$v_{0,x} = \frac{20\,000}{3600}\ \frac{m}{s}$

$v_{0,x} = 5.5556\ \frac{m}{s}$

Dado que la magnitud de la fuerza F y la masa m son constantes:

$\int_{5.5556}^{v_x} v_x\, dv_x = \int_0^x -0.004\ \text{magF}\ dx$

$\frac{1}{2}\ v_x^2\ ]_{5.5556}^{v_x} = -0.004\ \text{magF x}\ ]_0^x$

$\frac{1}{2}\ v_x^2 - \frac{1}{2}\ 5.5556^2 = -0.004\ \text{magF x} - [-\frac{\text{magF}}{m}\ (0)]$

$\frac{1}{2}\ v_x^2 - \frac{1}{2}\ 30.8642 = -0.004\ \text{magF x}$

Se multiplica por dos ambos miembros:

$v_x^2 - 30.8642 = -0.008\ \text{magF x}$

Dado que cuando se detiene el remolque su rapidez es CERO, puede sustituirse en esta última expresión el valor de $v_x = 0$ para x = 45 m, que es la distancia que recorre hasta que se detiene:

$0^2 - 30.8642 = -0.008\ \text{magF}\ (45)$

$0.36\ \text{magF} = 30.8642$

$\text{magF} = \frac{30.8642}{0.36}$

$\text{magF} = 85.7339\ \text{N}$

## La magnitud de la fuerza F que hace que el remolque se detenga es:
## magF = 85.7339 N.

Este problema también puede resolverse si se obtiene la rapidez, $v_x$, en función del tiempo, y a partir de su expresión, la posición, también en función del tiempo, que como podrá observarse, el procedimiento es más largo:

$a_x = -0.004\ \text{magF}$

$\frac{d\,v_x}{d\,t} = -0.004\ \text{magF}$

$d\,v_x = -0.004\ \text{magF}\ d\,\text{t}$

$\int_{v_{o,x}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^{t} -0.004\ \text{magF}\ dt$

Dado que las condiciones iniciales son $v_{0,x} = 5.5556\ \frac{m}{s}$ para $t_0 = 0$ s:

$\int_{5.5556}^{v_x} dv_x = \int_0^t -0.004\ \text{magF}\ dt$

$v_x\ ]_{5.5556}^{v_x} = -0.004\ \text{magF t}\ ]_0^t$

$v_x - 5.5556 = -0.004\ \text{magF t} - [-0.004\text{magF}\ (0)]$

$v_x = -0.004\ \text{magF t} + 5.5556$

Luego de aplicar la definición de rapidez:

$v_x = \frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = -0.004 \text{ magF } t + 5.5556$

$dx = (-0.004 \text{ magF } t + 5.5556)\, dt$

$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (-0.004 \text{ magF } t + 5.5556)\, dt$

Las condiciones iniciales son $x_0 = 0$ m para $t_0 = 0$ s:

$\int_{0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (-0.004 \text{ magF } t + 5.5556)\, dt$

$x \big]_0^x = (-0.004 \text{ magF } \frac{1}{2} t^2 + 5.5556\, t) \big]_0^t$

$x - 0 = -0.002 \text{ magF } t^2 + 5.5556\, t - [(-0.002 \text{ magF } (0)^2 + 5.5556\, (0)]$

$x = -0.002 \text{ magF } t^2 + 5.5556\, t$

Puede calcularse el tiempo que transcurre para que el remolque se detenga, $t_f$, instante en el cual su rapidez es CERO:

$v_x = -0.004 \text{ magF } t_f + 5.5556$

$0 = -0.004 \text{ magF } t_f + 5.5556$

$0.004 \text{ magF } t_f = 5.5556$

$t_f = \frac{5.5556}{0.004 \text{ magF}}$

$t_f = \frac{1388.89}{\text{magF}}$

Dado que el remolque recorre 45 antes de detenerse:

$x = -0.002 \text{ magF } t^2 + 5.5556\, t$

$45 = -0.002 \text{ magF } t_f^2 + 5.5556\, t_f$

$45 = -0.002 \text{ magF } \left(\frac{1388.89}{\text{magF}}\right)^2 + 5.5556 \left(\frac{1388.89}{\text{magF}}\right)$

$45 = -0.002 \text{ magF } \left(\frac{1929012}{\text{magF}^2}\right) + \frac{7716.05}{\text{magF}}$

$45 = -\frac{3858.02}{\text{magF}} + \frac{7716.05}{\text{magF}}$

$45 = \frac{3858.03}{\text{magF}}$

$\text{magF} = \frac{3858.03}{45}$

$\text{magF} = 85.7339$ N

que es exactamente el mismo resultado obtenido anteriormente.

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
t0 = 0;
x0 = 0;
v0x = 20 × 1000/3600
m = 250;
g = 9.81;
xf = 45;
vf = 0;
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
F = {-magF, 0}
Nrm = {0, magN}
W = {0, -m g}
```

Cálculo de la resultante y aplicación de la segunda ley de Newton:

```
R = F + Nrm + W
ec1 = R == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, magN}]
        resuelve
axSol = ax /. resp1[[1]]
```

Dado que axSol = vx $\frac{d\,vx}{d\,x}$, axSol $d$ x = vx $d$ vx, por tanto:

```
ec2 = ∫_x0^x axSol dx == ∫_v0x^vx vx dvx
resp2 = Solve[ec2, magF]
        resuelve
magFfun = magF /. resp2[[1]]
```

El remolque recorre 45 m antes de detenerse, por tanto:

```
magFSol = magFfun /. {x → xf, vx → vf}
```

Segundo procedimiento, dado que axSol = $\frac{d\,vx}{d\,t}$, axSol $d$ t = $d$ vx:

```
ec3 = ∫_{t0}^{t} axSol ⅆt == ∫_{v0x}^{vx} ⅆvx
resp3 = Solve[ec3, vx]
        resuelve
vxSol = vx /. resp3[[1]]
```

Con base en la definición de rapidez, vxSol = $\frac{d\,x}{d\,t}$, por lo cual vxSol $d$ t = $d$ x:

```
ec4 = ∫_{t0}^{t} vxSol ⅆt == ∫_{x0}^{x} ⅆx
resp4 = Solve[ec4, x]
        resuelve
xSol = x /. resp4[[1]]
```

Dado que el remolque recorre 45 m antes de detenerse, se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones, del cual se obtiene la solución buscada:

```
ec5 = vxSol == vf
ec6 = xSol == xf
resp6 = Solve[{ec5, ec6}]
        resuelve
magFSol = magF /. resp6[[1]]
```

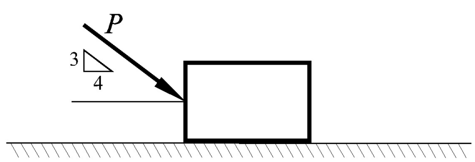
## Ejercicio 4.7

## Problema 1.2, Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 6.

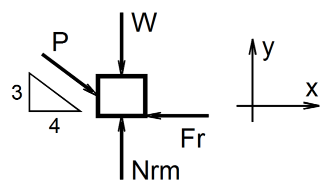
Una fuerza de magnitud y orientación constantes actúa sobre el bloque que se muestra en la figura; si la resultante que actúa sobre el bloque tiene una magnitud de **4 N**, se sabe que le produce una aceleración de **2.18** $\frac{m}{s^2}$ hacia la derecha y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale 0.4, determine:

a) la magnitud de la fuerza ***P***; y

b) el peso del cuerpo.




Lo primero que se requiere es el diagrama de cuerpo libre del bloque:




$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-magFr}, 0\}$

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, \text{magN}\}$

$\overline{W} = \{0, \text{-magW}\}$

$\overline{P} = \{\frac{4}{5}\ \text{magP}, -\frac{3}{5}\ \text{magP}\}$

$\overline{R} = \overline{\text{Fr}} + \overline{\text{Nrm}} + \text{W} + \overline{P}$

$\overline{R} = \{\text{-magFr}, 0\} + \{0, \text{magN}\} + \{0, \text{-magW}\} + \{\frac{4}{5}\ \text{magP}, -\frac{3}{5}\ \text{magP}\}$

$\overline{R} = \{\text{-magFr} + \frac{4}{5}\ \text{magP}, \text{magN - magW} - \frac{3}{5}\ \text{magP}\}$

Con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \text{m}\ \{a_x, 0\}$

$\{\text{-magFr} + \frac{4}{5}\ \text{magP}, \text{magN - magW} - \frac{3}{5}\ \text{magP}\} = \{\text{m}\ a_x, 0\}$

$\{4, 0\} = \{\text{m}\ a_x, 0\}$

$\{4, 0\} = \{\text{m}\ (2.18), 0\}$

$4 = 2.18\ \text{m}$

$\text{m} = \frac{4}{2.18}$

$\text{m} = 1.8349\ \text{kg}$

A partir de este valor se puede obtener el peso del cuerpo:

magW = m g

magW = 1.8349 (9.81)

magW = 18 N

## La magnitud del peso es:

## magW = 18 N.

Para obtener la magnitud de P, es necesario calcular previamente la magnitud de la fuerza de fricción. Dicha magnitud se puede calcular como:

magFr = $\mu_k$ magN

Para determinar la magnitud de la fuerza normal, se resuelve la ecuación de la componente en y de la resultante:

magN - magW $-\frac{3}{5}$ magP = 0

magN = 18 + 0.6 magP

Por consiguiente:

magFr = 0.4 (18 + 0.6 magP)

magFr = 7.2 + 0.24 magP

Se sustituye esta expresión en la ecuación de la componente en x de la resultante:

-magFr + $\frac{4}{5}$ magP = 4

-(7.2 + 0.24 magP) + 0.8 magP = 4

-7.2 - 0.24 magP + 0.8 magP = 4

0.56 magP = 4 + 7.2

magP = $\frac{11.2}{0.56}$

magP = 20 N

## La magnitud de la fuerza aplicada al bloque, P, es:

## magP = 20 N.

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magR = 4;
ax = 2.18;
μk = 0.4;
g = 9.81;
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
Fr = {-magFr, 0}
Nrm = {0, magN}
W = {0, -magW}
P = magP {4/5, -3/5}
```

Magnitud de la fuerza de fricción y del peso:

```
magFr = μk magN
magW = m g
```

Magnitud de la resultante:

```
R = {magR, 0}
ec1 = R == Fr + Nrm + W + P
```

Segunda ley de Newton:

```
ec2 = R == m {ax, 0}
resp2 = Solve[{ec1, ec2}]
        resuelve
mSol = m /. resp2[[1]]
magW /. m → mSol
magPSol = magP /. resp2[[1]]
```

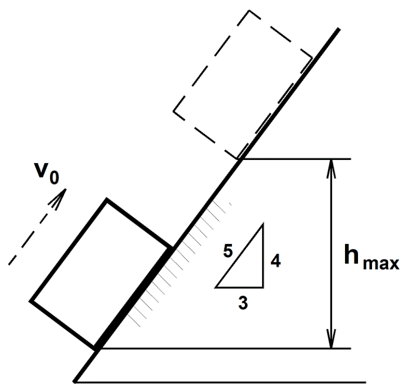
## Ejercicio 4.8

## Problema I .9, Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 10

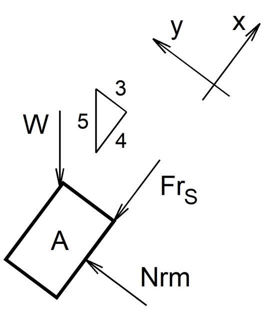
Un bloque se lanza sobre un plano inclinado y rugoso, tal como se muestra en la figura; si después de haber transcurrido 1.18 s, contados desde el momento en que fue lanzado, el bloque vuelve a pasar de regreso por la posición inicial y $\mu = 0.4$ entre las superficies en contacto, determine:

a) la rapidez inicial $v_0$, y

b) la altura máxima que alcanza.




Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque, después de que fue lanzado y está moviéndose hacia arriba:




Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el bloque; se emplea el subíndice S para denotar que es en el intervalo de subida:

$$\overline{Fr_S} = \{-magFr_S, 0\}$$

$$\overline{Nrm} = \{0, magN\}$$

$$\overline{W} = \left\{-\frac{4}{5}\, m\, g,\ -\frac{3}{5}\, m\, g\right\}$$

La resultante de las fuerzas aplicadas al bloque es:

$$\overline{R_S} = \overline{Fr_S} + \overline{Nrm} + \overline{W}$$

$$\overline{R_S} = \{-magFr_S, 0\} + \{0, magN\} + \left\{-\frac{4}{5}\, m\, g,\ -\frac{3}{5}\, m\, g\right\}$$

$$\overline{R_S} = \left\{-magFr_S - \frac{4}{5}\, m\ g,\ magN - \frac{3}{5}\ m\ g\right\}$$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$$\overline{R_S} = m\ \overline{a_S}$$

$$\left\{-magFr_S - \frac{4}{5}\, m\ g,\ magN - \frac{3}{5}\ m\ g\right\} = m\ \{a_{S,x}, 0\}$$

De la ecuación vectorial anterior, se pueden establecer las siguientes ecuaciones escalares:

$-magFr_S - \frac{4}{5}\, m\, g = m\, a_{S,x}$ (1)

$magN - \frac{3}{5}\, m\, g = 0$ (2)

De la ecuación 2 se puede obtener la magnitud de la normal:

$magN = \frac{3}{5}\, m\, g$

Con base en dicho valor, es posible calcular la fuerza de fricción en función de la masa del bloque:

$magFr_S = \mu_k\, magN$

$magFr_S = (0.4)\, \frac{3}{5}\, m\, (9.81)$

$magFr_S = 2.354\, m$

Por consiguiente, sustituyendo este resultado en la ecuación 1:

$-2.354\, m - 0.8\, m\, (9.81) = m\, a_{S,x}$

$a_{S,x} = -2.354 - 7.848$

$a_{S,x} = -10.20\, \frac{m}{s^2}$

Con base en la definición de aceleración, es posible obtener la rapidez del bloque en función del tiempo:

$a_{S,x} = \frac{d\, v_{S,x}}{d\, t}$

$a_{S,x}\, d\, t = d\, v_{S,x}$

Las condiciones iniciales son: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ y $v_0$ desconocido; por tanto:

$\int_0^t a_{S,x}\, dt = \int_{v_0}^{v_{S,x}} dv_{S,x}$

$-10.20\, t\,]_0^t = v_{S,x}\,]_{v_0}^{v_{S,x}}$

$-10.20\, t - [-10.20\, (0)] = v_{S,x} - v_0$

$v_{S,x} = -10.20\, t + v_0$

A partir de la expresión anterior, es posible determinar el tiempo que tarda el bloque en subir, ya que cuando se detiene antes de empezar a bajar, su rapidez, $v_{S,1}$, es nula, para un tiempo $t = t_S$:

Entonces, luego de sustituir $v_{S,1} = 0$ y $t = t_S$ en la expresión de $v_{S,x}$, se obtiene:

$0 = -10.20\, t_S + v_0$

$10.20\, t_S = v_0$

$t_S = \frac{1}{10.2024}\, v_0$

$t_S = 0.09802\, v_0$

A continuación, con base en la definición de rapidez:

$v_{S,x} = \frac{d\, x_S}{d\, t}$

$(-10.20\, t + v_0)\, d\, t = d\, x_S$

$\int_0^t (-10.20\, t + v_0)\, dt = \int_0^{x_S} dx_S$

$(-10.20\, \frac{1}{2}\, t^2 + v_0\, t)]_0^t = x_S\,]_0^{x_S}$

$-5.101\, t^2 + v_0\, t - [-10.20\, \frac{1}{2}\, (0)^2 + v_0\, (0)] = x_S - 0$

$x_S = -5.101\, t^2 + v_0\, t$

La distancia que sube puede obtenerse sustituyendo en la ecuación de la posición $x_{S,1}$ el valor de $t_S$:

$x_{S,1} = -5.101\, t_S^2 + v_0\, t_S$

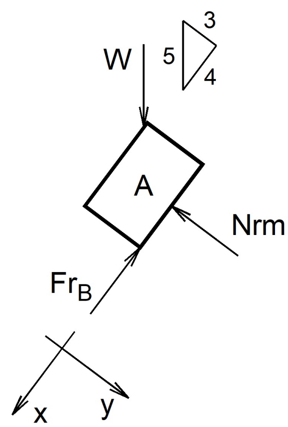
$x_{S,1} = -5.101\, (0.09802\, v_0)^2 + v_0\, (0.09802\, v_0)$

$x_{S,1} = -5.101\, (0.009607\, v_0^2) + 0.09802\, v_0^2$

$x_{S,1} = -0.04901\, v_0^2 + 0.09802\, v_0^2$

$x_{S,1} = 0.04901\, v_0^2$

Una vez que se detiene por primera vez en la posición $x_{S,1}$, el bloque empezará a bajar, situación para la cual su diagrama de cuerpo libre se muestra en la siguiente figura:




Ahora, los vectores que representan a las fuerzas son:

$\overline{Fr_B} = \{-\text{magFr}_B, 0\}$

$\overline{Nrm} = \{0, -\text{magN}\}$

$\overline{W} = \left\{\frac{4}{5}\text{ m g}, \frac{3}{5}\text{ m g}\right\}$

De los cuales puede obtenerse la fuerza resultante:

$\overline{R_B} = \overline{Fr_B} + \overline{Nrm} + \overline{W}$

$\overline{R_B} = \{-\text{magFr}_B, 0\} + \{0, -\text{magN}\} + \left\{\frac{4}{5}\text{ m g}, \frac{3}{5}\text{ m g}\right\}$

$\overline{R_B} = \left\{\frac{4}{5}\text{ m g} - \text{magFr}_B, \frac{3}{5}\text{ m g} - \text{magN}\right\}$

Luego, con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{R_B} = \text{m}\, \overline{a_B}$

$\left\{\frac{4}{5}\text{ m g} - \text{magFr}_B, \frac{3}{5}\text{ m g} - \text{magN}\right\} = \text{m}\left\{a_{B,x}, 0\right\}$

De donde se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$\frac{4}{5}\text{ m g} - \text{magFr}_B = \text{m}\, a_{B,x}$ (3)

$\frac{3}{5}\text{ m g} - \text{magN} = 0$ (4)

Por tanto, a partir de 4:

$\text{magN} = \frac{3}{5}\text{ m g}$

Se calcula la magnitud de la fuerza de fricción en función de la masa del bloque:

$\text{magFr}_B = \mu_k\, \text{magN}$

$\text{magFr}_B = (0.4)\, \frac{3}{5}\text{ m } 9.81$

$\text{magFr}_B = 2.354\text{ m}$

Por consiguiente, al sustituir el resultado anterior en la expresión 3, se obtiene la aceleración del bloque cuando baja por el plano inclinado:

$\frac{4}{5}$ m g - 2.354 m = m $a_{B,x}$

$a_{B,x} = 0.8$ g - 2.354

$a_{B,x} = 7.848 - 2.354$

$a_{B,x} = 5.494\ \frac{m}{s^2}$

Nuevamente se aplica la definición de aceleración para obtener la rapidez de bajada:

$a_{B,x} = \frac{d v_{B,x}}{d t}$

$a_{B,x}\, d\, t = d\, v_{B,x}$

Para este movimiento, las condiciones iniciales que se consideran son: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$:

$\int_0^t a_{B,x}\, dt = \int_0^{v_{B,x}} d v_{B,x}$

$5.494\ t\, ]_0^t = v_{B,x}\, ]_0^{v_{B,x}}$

$5.494\ t - [5.494\ (0)] = v_{B,x} - 0$

$v_{B,x} = 5.494\ t$

Luego, con base en la definición de rapidez:

$v_{B,x} = \frac{d x_B}{d t}$

$v_{B,x}\, d\, t = d\, x_B$

$\int_0^t 5.494\ t\, dt = \int_0^{x_B} d x_B$

$5.494\ \frac{1}{2}\ t^2]_0^t = x_B\, ]_0^{x_B}$

$2.747\ t^2 - 2.747\ (0)^2 = x_B - 0$

$x_B = 2.747\ t^2$

**a) la rapidez inicial $v_0$**

Con base en la expresión anterior, se obtiene el tiempo que tarda el bloque en bajar una distancia $x_{B,1}$ en un tiempo t = $t_B$, que debe ser igual a $x_{S,1}$, que es la que subió en la primera parte de su movimiento:

$x_{B,1} = x_{S,1}$

$2.747\ t_B^2 = 0.04901\ v_0^2$

$t_B^2 = \frac{0.04901}{2.747}\ v_0^2$

$t_B = \sqrt{0.01785}\ v_0$

$t_B = 0.1336\ v_0$

Dado que el tiempo transcurrido desde que se lanzó el bloque a que éste vuelva a pasar por la posición inicial debe ser de 1.18 s:

$$t_S + t_B = 1.18$$
$$0.09802\, v_0 + 0.1336\, v_0 = 1.18$$
$$0.2316\, v_0 = 1.18$$
$$v_0 = \frac{1.18}{0.2316}$$
$$v_0 = 5.095\ \frac{m}{s}$$

La rapidez inicial a la que fue lanzado el bloque, de manera que luego de haber transcurrido 1.18 s haya pasado de regreso por la posición inicial es:

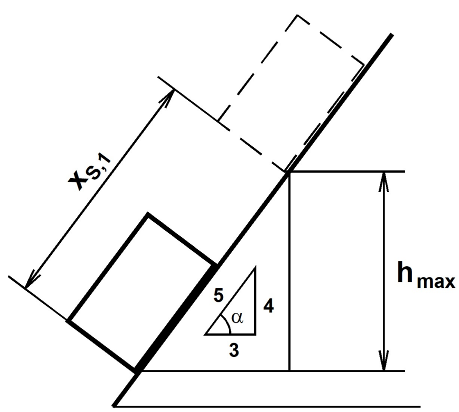
$$v_0 = 5.095\ \frac{m}{s}.$$

**b) la altura máxima que alcanza**

Ya conocida la rapidez inicial, es posible calcular la distancia que recorre hacia arriba del plano inclinado, $x_{S,1}$:

$$x_{S,1} = 0.04901\, v_0^2$$
$$x_{S,1} = 0.04901\, (5.095)^2$$
$$x_{S,1} = 0.04901\, (25.96)$$
$$x_{S,1} = 1.272\ \text{m}$$

La altura máxima buscada es la distancia que recorre el bloque, $x_{S,1}$, multiplicado por el seno del ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal, en este caso Sin $[\alpha] = \frac{4}{5}$, expresión que puede verificarse con base en el teorema de la proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes, que se ilustra en la siguiente figura:




$$\frac{h_{max}}{x_{S,1}} = \frac{4}{5}$$
$$h_{max} = \frac{4}{5}\, x_{S,1}$$
$$h_{max} = \frac{4}{5}\, (1.272)$$
$$h_{max} = 1.018\ \text{m}$$

La altura máxima que alcanza el bloque es:

$$h_{max} = 1.018\ \text{m}.$$

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
g = 9.81;
μk = 0.4;
tTot = 1.18;
```

Representación vectorial de las fuerzas y resultante:

```
FrS = {-magFrS, 0}
Nrm = {0, magN}
W = m g {-4/5, -3/5}
RS = FrS + Nrm + W
```

Segunda Ley de Newton y la aceleración del movimiento rectilíneo de subida::

```
ec1 = RS == m {aSx, 0}
magFrS = μk magN
resp1 = Solve[ec1, {aSx, magN}]
        resuelve
aSxSol = aSx /. resp1[[1]]
```

Dado que aSxSol = $\frac{\text{dvSx}}{\text{dt}}$, dvSx = aSxSol dt, y por consiguiente:

$$ec2 = \int_{v0}^{vSx} dvSx == \int_0^t aSxSol\, dt$$

```
resp2 = Solve[ec2, vSx] // Simplify
        resuelve          simplifica
vSxSol = vSx /. resp2[[1]]
```

Dado que vSxSol = $\frac{\text{dxS}}{\text{dt}}$, dxS = vSxSol dt, y por consiguiente:

$$ec3 = \int_0^{xS} dxS == \int_0^t vSxSol\, dt$$

```
resp3 = Solve[ec3, xS] // Simplify
        resuelve          simplifica
xSSol = xS /. resp3[[1]]
```

Determinación del instante en que se detiene el bloque:

```
ec4 = 0 == vSxSol
resp4 = Solve[ec4, t]
        resuelve
tS = t /. resp4[[1]]
```

La distancia sobre el plano inclinado que sube el bloque es:

```
xS1 = xSSol /. t → tS
```

Representación vectorial de las fuerzas y resultante:

```
FrB = {-magFrB, 0}
Nrm = {0, -magN}
W = m g {4/5, 3/5}
RB = FrB + Nrm + W
```

Segunda Ley de Newton y la aceleración del movimiento rectilíneo de bajada:

```
ec5 = RB == m {aBx, 0}
magFrB = μk magN
resp5 = Solve[ec5, {aBx, magN}]
        resuelve
aBxSol = aBx /. resp5[[1]]
```

Dado que aBxSol = $\frac{dvBx}{dt}$, dvBx = aBxSol dt, y por consiguiente:

$$ec6 = \int_0^{vBx} dvBx == \int_0^t aBxSol\, dt$$

```
resp6 = Solve[ec6, vBx]
        resuelve
vBxSol = vBx /. resp6[[1]]
```

Dado que vBxSol = $\frac{dxB}{dt}$, dxB = vBxSol dt, y por consiguiente:

$$ec7 = \int_0^{xB} dxB == \int_0^t vBxSol\, dt$$

```
resp7 = Solve[ec7, xB]
        resuelve
xBSol = xB /. resp7[[1]]
```

Se obtiene el tiempo que transcurre para que el bloque alcance la posición inicial, es decir, que haya bajado un valor xS1:

```
ec8 = xBSol == xS1
resp8 = Solve[ec8, t]
        resuelve
tB = t /. resp8[[2]]
```

Dado que el tiempo transcurrido desde que se lanzó el bloque a que éste vuelva a pasar por la posición inicial debe ser de 1.18 s:

```
ec9 = tS + tB == tTot
resp9 = Solve[ec9]
        resuelve
v0Sol = v0 /. resp9[[1]]
```

Sustituyendo la rapidez inicial en la expresión de xS1, se puede obtener la altura máxima que alcanza el bloque:

```
xS1Sol = xS1 /. v0 → v0Sol
hmax = 4/5 xS1Sol
```

## Ejercicio 4.9

Obtenga las expresiones del vector velocidad y el vector de posición de un tiro parabólico con una velocidad inicial con magnitud $magv_0$ y ángulo de tiro $\theta$ y una posición inicial $\overline{r_0} = \{x_0, y_0\}$.

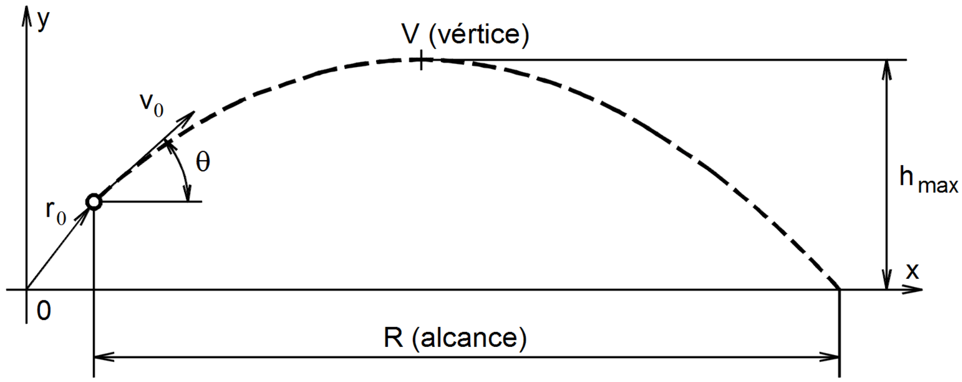
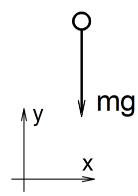



Diagrama de cuerpo libre del cuerpo luego de que fue lanzado:




La representación vectorial del peso es:

$\overline{W} = \{0, \text{-m g}\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{W} = \text{m } \{a_x, a_y\}$

$\{0, \text{-m g}\} = \text{m } \{a_x, a_y\}$

A partir de esta última expresión, se pueden obtener dos ecuaciones escalares:

$a_x = 0$

$\text{-m g} = \text{m } a_y$

$a_y = \text{-g}$

Dado que se conoce la aceleración, se puede plantear la ecuación diferencial para calcular la velocidad:

$\overline{a} = \{0, \text{-g}\}$

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, \text{-g}\} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, \text{-g}\}\, dt = d\overline{v}$

Las condiciones iniciales son las siguientes:

$t_0 = 0 \text{ s}$

$\overline{v_0} = \{magv_0 \text{ Cos}[\theta], magv_0 \text{ Sin}[\theta]\}$

Se emplean estos valores para resolver la ecuación diferencial anterior:

$\{0, \text{-g}\}\, dt = d\overline{v}$

$\int_0^t \{0, -g\}\, dt = \int_{v_0}^{\overline{v}} d\overline{v}$

$\{0, -g\}\, t\,]_0^t = \overline{v}\,]_{\overline{v_0}}^{\overline{v}}$

$\{0, -g\}\, t - \{0, -g\}\,(0) = \overline{v} - \overline{v_0}$

$\overline{v} = \{0, -g\, t\} + \{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta], \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\}$

$\overline{v} = \{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta], -g\, t + \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\}$

Posteriormente, se plantea y resuelve la ecuación diferencial de la posición del cuerpo:

$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$

$\overline{v}\, dt = d\overline{r}$

$\{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta], -g\, t + \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\}\, dt = d\overline{r}$

$\int_0^t \{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta], -gt + \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\}\, dt = \int_{r_0}^{r} d\,r$

Dado que la posición inicial es:

$\overline{r_0} = \{x_0, y_0\}$

Al resolver la ecuación anterior queda:

$\left\{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta]\, t, -\frac{1}{2}\, gt^2 + \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\, t\right\}\,]_0^t = \overline{r}\,]_{\overline{r_0}}^{\overline{r}}$

$\left\{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta]\, t, -\frac{1}{2}\, gt^2 + \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\, t\right\} - 0 = \overline{r} - \overline{r_0}$

$\overline{r} = \left\{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta]\, t, -\frac{1}{2}\, gt^2 + \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\, t\right\} + \{x_0, y_0\}$

$\overline{r} = \{\text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta]\, t + x_0, -\frac{1}{2}\, gt^2 + \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]\, t + y_0\}$

Para simplificar las expresiones obtenidas, si se escribe la velocidad inicial como:

$\overline{v_0} = \{v_{0,x},\ v_{0,y}\}$

donde:

$v_{0,x} = \text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta]$

$v_{0,y} = \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]$

Las expresiones de la velocidad y la posición de un tiro parabólico quedan como sigue:

$\overline{v} = \{v_{0,x}, -g\, t + v_{o,y}\}$

$\overline{r} = \{v_{o,x}\, t + x_0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{o,y}\, t + y_0\}$

Las expresiones del vector de velocidad y del vector de posición de un tiro parabólico con una velocidad inicial con magnitud $\text{magv}_0$ y ángulo de tiro $\theta$, así como una posición inicial $\overline{r_0} = \{x_0, y_0\}$ son, respectivamente:

$\overline{v} = \{v_{0,x}, -g\, t + v_{o,y}\}$

$\overline{r} = \{v_{o,x}\, t + x_0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{o,y}\, t + y_0\}$

donde:

$v_{0,x} = \text{magv}_0 \,\text{Cos}[\theta]$ y $v_{0,y} = \text{magv}_0 \,\text{Sin}[\theta]$.

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Definición de vectores:

```
vecR = {x, y};
vecV = {vx, vy};
vecA = {ax, ay};
r0 = {x0, y0};
v0 = magv0 {Cos[θ], Sin[θ]};
               coseno    seno
```

Segunda Ley de Newton:

```
F = {0, -m g}
ec1 = F == m vecA
resp1 = Solve[ec1, vecA]
        resuelve
vecASol = vecA /. resp1〚1〛
```

Dado que vecASol = $\frac{dv}{dt}$, entonces vecASol dt = dv:

```
ec2 = ∫_0^t vecASol ⅆt == ∫_v0^vecV ⅆv
resp2 = Solve[ec2, vecV]
        resuelve
vecVSol = vecV /. resp2〚1〛
```

Dado que vecVSol = $\frac{dr}{dt}$, entonces vecVSol dt = dr:

```
ec3 = ∫_0^t vecVSol ⅆt == ∫_r0^vecR ⅆr
resp3 = Solve[ec3, vecR]
        resuelve
vecRSol = vecR /. resp3〚1〛
```

## Ejercicio 4.10

Determine la ecuación de la trayectoria, así como las coordenadas del vértice del tiro parabólico, V, cuyos parámetros se muestran en la figura. Considere que el origen del marco de referencia se coloca justo en el punto de lanzamiento del cuerpo.

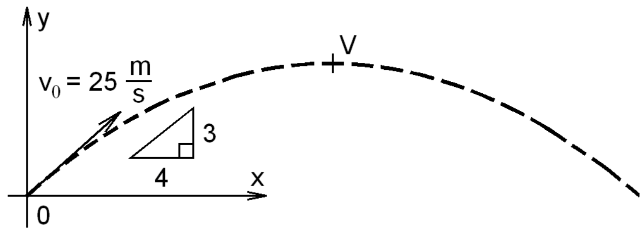
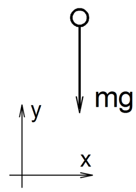



Diagrama de cuerpo libre del cuerpo luego de que fue lanzado:




$\overline{W} = \{0, -m\ g\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{W} = m\ \{a_x, a_y\}$

$\{0, -m\ g\} = m\ \{a_x, a_y\}$

$a_x = 0$

$a_y = -g$

Dado que la aceleración es:

$\overline{a} = \{0, -g\}$

Con base en la definición de aceleración:

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, -g\} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$\{0, -g\}\ dt = d\overline{v}$

Posteriormente, se integran ambos miembros, considerando como límite inferior de la integración las condiciones iniciales, en este caso, $t_0 = 0$ s, $\overline{v_0} = 25\left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$:

$\int_0^t \{0, -g\}\ dt = \int_{\{20, 15\}}^{\overline{v}} d\overline{v}$

$\{0, -g\}\ t\,\Big]_0^t = \overline{v}\,\Big]_{\{20, 15\}}^{\overline{v}}$

$\{0, -g\}\ t - \{0, -g\}\ (0) = \overline{v} - \{20, 15\}$

$\overline{v} - \{20, 15\} = \{0, -g\}\ t$

$\overline{v} = \{0, -g\}\ t + \{20, 15\}$

$\overline{v} = \{20, -g\ t + 15\}$

Luego, se obtiene el vector de posición con base en la definición de velocidad:

$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$

$\{20, -g\,t + 15\} = \frac{d\overline{r}}{dt}$

$\{20, -g\,t + 15\}\, dt = d\overline{r}$

La posición inicial, en este caso, es $\overline{r_0} = \{0, 0\}$:

$\int_0^t \{20, -g\,t + 15\}\, dt = \int_{\{0,0\}}^{\overline{r}} d\overline{r}$

$\{20\,t, -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t\}\,]_0^t = \overline{r}\,]_{\{0,0\}}^{\overline{r}}$

$\{20\,t, -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t\} - \{20\,(0), -\frac{1}{2}\,g\,(0)^2 + 15\,(0)\} = \overline{r} - \{0, 0\}$

$\overline{r} - \{0, 0\} = \{20\,t, -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t\}$

$\overline{r} = \{20\,t, -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t\}$

Para obtener la ecuación de la trayectoria del tiro parabólico, se requieren las expresiones de x, y en función del tiempo. Estas expresiones se obtienen del vector de posición obtenido:

$x = 20\,t$

$y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t$

$20\,t = x$

$t = \frac{x}{20}$

$y = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{20}\right)^2 + 15\left(\frac{x}{20}\right)$

$y = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{400} + \frac{3}{4}\,x$

$y = -0.0122625\,x^2 + 0.75\,x$

## La ecuación de la trayectoria de este tiro parabólico es $y = -0.01226\,x^2 + 0.75\,x$.

Para obtener el vértice de la trayectoria, se iguala a cero la componente vertical, en y, de la velocidad, de donde se obtiene el tiempo crítico:

$-g\,t_{crit} + 15 = 0$

$g\,t_{crit} = 15$

$t_{crit} = \frac{15}{9.81}$

$t_{crit} = 1.529052$ s

Se sustituye dicho tiempo crítico, $t_{crit}$, en la expresión de y:

$y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 15\,t$

$y_{max} = -\frac{1}{2}\,g\,(1.529052)^2 + 15\,(1.529052)$

$y_{max} = -11.4679 + 22.9358$

$y_{max} = 11.4679$ m

Para obtener su abscisa, se sustituye dicho tiempo crítico en la expresión de x:

$x_{max} = 20\,t$

$x_{max} = 20\,(1.529052)$

$x_{max} = 30.5810$ m

Por tanto, las coordenadas del vértice de la trayectoria son:

V(30.5810, 11.4679) m

## Las coordenadas del vértice son:
## V(30.58, 11.47) m.

Se le denomina alcance, R, a la distancia horizontal que existe entre el punto de lanzamiento y el punto de caída del cuerpo.

Para determinarlo, se calcula el instante en el que la componente vertical del vector de posición del cuerpo es nulo, es decir, cuando “regresa” al piso, $y_2 = 0$:

$$y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + 15\, t$$

$$0 = -\frac{1}{2}\, g\, t_2^2 + 15\, t_2$$

$$\frac{1}{2}\, g\, t_2^2 = 15\, t_2$$

$$\frac{1}{2}\, g\, t_2 = 15$$

$$t_2 = \frac{15\,(2)}{9.81}$$

$$t_2 = \frac{30}{9.81}$$

$$t_2 = 3.0581$$

Se sustituye dicho tiempo en la ecuación de la componente horizontal de la posición:

$$x = 20\, t$$

$$x_2 = 20\, t_2$$

$$x_2 = 20\,(3.0581)$$

$$x_2 = 61.162 \text{ m}$$

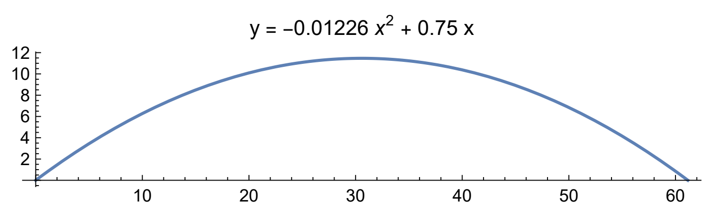
$$R = 61.162 \text{ m}$$

## El alcance del tiro parabólico es:
## R = 61.162 m.

Gráfica de la trayectoria:

```
y = -0.0122625 x^2 + 0.75 x;
Plot[y, {x, 0, 61.162}, AspectRatio → Automatic, PlotLabel → "y = -0.01226 x^2 + 0.75 x"]
```

representación gráfica · cociente de asp··· · automático · etiqueta de representación



Para resolver problemas de tiro parabólico, por lo regular únicamente se requieren las expresiones de los vectores de velocidad y de posición de dicho movimiento, que son los siguientes:

$\overline{v} = \{v_{0,x}, \text{-g t} + v_{0,y}\}$

donde:

$v_{0,x} = v_0 \text{ Cos}[\theta]$

$v_{0,y} = v_0 \text{ Sin}[\theta]$

Para la posición:

$\overline{r} = \{v_{0,x}\, t, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{0,y}\, t\}$

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magv0 = 25;
r0 = {0, 0};
g = 9.81;
v0 = magv0 {4/5, 3/5}
```

Vectores:

```
vecR = {x, y};
vecV = {vx, vy};
vecA = {ax, ay};
```

```
SumaF = {0, -m g} == m vecA
resp1 = Solve[SumaF, vecA]
```

resuelve

Vector aceleración:

```
vecASol = vecA /. resp1[[1]]
```

Dado que vecASol = $\frac{dv}{dt}$, entonces vecASol dt = dv:

```
ec2 = ∫_0^t vecASol ⅆt == ∫_v0^vecV ⅆv
resp2 = Solve[ec2, vecV]
```

resuelve

Vector velocidad:

```
vecVSol = vecV /. resp2[[1]]
```

Dado que vecVSol = $\frac{dr}{dt}$, entonces vecVSol dt = dr:

```
ec3 = ∫_0^t vecVSol ⅆt == ∫_r0^vecR ⅆr
resp3 = Solve[ec3, vecR]
        resuelve
```

Vector de posición:

```
vecRSol = vecR /. resp3[[1]]
```

Para determinar la ecuación de la trayectoria, se iguala el vector de posición obtenido al vector r{x, y}:

```
ec4 = {x, y} == vecRSol
```

Se resuelve para t e y:

```
resp4 = Solve[ec4, {y, t}]
        resuelve
ySol = y /. resp4[[1]] // Simplify
                         simplifica
```

Las coordenadas del vértice se pueden determinar encontrando la altura máxima ($h_{max}$), para lo cual se determina el instante en que la componente vertical de la velocidad del cuerpo es cero:

```
ec5 = vecVSol[[2]] == 0
resp5 = Solve[ec5, t]
        resuelve
t1Sol = t /. resp5[[1]]
```

Se sustituye el valor de tiempo obtenido, t1Sol, en la expresión del vector de posición:

```
vecV = vecRSol /. t → t1Sol
```

Cálculo del alcance, R:

```
ec6 = vecRSol[[2]] == 0
resp6 = Solve[ec6, t]
        resuelve
t2Sol = t /. resp6[[2]]
```

Se sustituye el valor de tiempo obtenido, t2Sol, en la expresión del vector de posición:

```
vecRmax = vecRSol /. t → t2Sol // Simplify
                                  simplifica
```

El alcance será la componente horizontal de este vector:

```
RmaxSol = vecRmax[[1]]
```

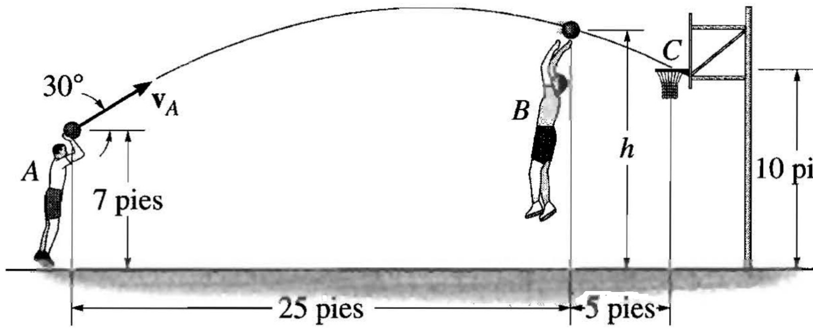
Gráfica de la trayectoria del tiro parabólico:

```
Plot[ySol, {x, 0, RmaxSol}]
representación gráfica
```

## Ejercicio 4.11

### Problema 12–87, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 10ª edición, Pearson, Prentice Hall, p. 46.

Se proporcionan en el dibujo las mediciones de un tiro grabado en vídeo durante un juego de baloncesto. El balón atravesó el aro aun cuando apenas pasó por encima de las manos del jugador *B* que pretendió bloquearla. Ignore el tamaño de la pelota y determine la magnitud $v_A$ de la velocidad inicial, así como la altura *h* de la pelota cuando pasa por encima del jugador *B*.




Para resolver este problema se parte del conocimiento de los vectores de velocidad y posición del tiro parabólico:

$$\overline{r} = \left\{v_{A,x}\, \mathrm{t} + x_0, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{A,y}\, t + y_0\right\}$$

La velocidad inicial es:

$$\overline{v_A} = v_A\, \{\mathrm{Cos}\,[30°], \mathrm{Sin}\,[30°]\}$$

La posición inicial conviene considerar que es:

$$\overline{r_0} = \{0, 7\}\ \mathrm{ft}$$

$$\overline{r_C} = \{30, 10\}\ \mathrm{ft}$$

$$\overline{r_B} = \{25, \mathrm{h}\}\ \mathrm{ft}$$

En este caso, el vector de posición queda:

$$\overline{r} = \left\{v_{A,x}\, \mathrm{t}, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{A,y}\, t + 7\right\}$$

Al igualar el vector anterior con el del punto C, queda que:

$$\overline{r} = \overline{r_C}$$

$$\left\{v_{A,x}\, \mathrm{t}, -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{A,y}\, t + 7\right\} = \{30, 10\}$$

$$v_{A,x}\, \mathrm{t} = 30$$

$$-\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{A,y}\, t + 7 = 10$$

$$v_A\, \mathrm{Cos}[30\,°]\, \mathrm{t} = 30$$

$$-\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_A\, \mathrm{Sin}[30\,°]\, t + 7 = 10$$

De la primera expresion, se obtiene:

$$\mathrm{t} = \frac{30}{0.866\, v_A}$$

Se sustituye t en la segunda expresión:

$$-\frac{1}{2}(32.2)\left(\frac{30}{0.866\,v_A}\right)^2 + v_A\,0.5\left(\frac{30}{0.866\,v_A}\right) + 7 = 10$$

$$-\frac{19\,320}{v_A^2} + 17.3205 = 3$$

$$\frac{19\,320}{v_A^2} = 14.3205$$

$$19320 = 14.3205\,v_A^2$$

$$14.3205\,v_A^2 = 19320$$

$$v_A^2 = \frac{19\,320}{14.3205}$$

$$v_A^2 = 1349.1149$$

$$v_A = \sqrt{1349.1149}$$

$$v_A = 36.73\ \frac{\text{ft}}{s}$$

## La magnitud de la velocidad inicial es:

$$v_A = 36.73\ \frac{\text{ft}}{s}.$$

Para obtener la altura a la que pasa la pelota en el punto B, se iguala el vector de posición de dicho punto con el vector que representa a la posición de la pelota:

$$\left\{v_{A,x}\,\text{t}, -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{A,y}\,t + 7\right\} = \{25, \text{h}\}$$

donde:

$$v_{A,x} = v_A\,\text{Cos}\,[30°]$$

$$v_{A,x} = 36.73\,(0.866)$$

$$v_{A,x} = 31.81\ \frac{\text{ft}}{s}$$

$$v_{A,y} = v_A\,\text{Sin}\,[30°]$$

$$v_{A,y} = 36.73\,(0.5)$$

$$v_{A,y} = 18.365\ \frac{\text{ft}}{s}$$

Por tanto:

$$\{31.81\,\text{t}, -16.1\,t^2 + 18.365\,t + 7\} = \{25, \text{h}\}$$

$$31.81\,\text{t} = 25$$

$$-16.1\,t^2 + 18.365\,t + 7 = \text{h}$$

$$\text{t} = \frac{25}{31.81}$$

$$\text{t} = 0.785932\ \text{s}$$

Se sustituye el valor obtenido en la segunda expresión:

$$-16.1 \times 0.785932^2 + 18.365\,(0.785932) + 7 = \text{h}$$

$$\text{h} = -9.9448 + 14.4336 + 7$$

$$\text{h} = 11.49\ \text{ft}$$

## La altura del balón cuando pasa encima del jugador B es:

$$\text{h} = 11.49\ \text{ft}.$$

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
g = 32.2;
θ = 30 °;
r0 = {0, 7};
rB = {25, h};
rC = {30, 10};
```

Vectores:

```
vA = magvA {Cos[θ], Sin[θ]}
            coseno   seno
```

$$vecR = \left\{vA[[1]]\ t,\ -\frac{1}{2} g\, t^2 + vA[[2]]\ t\right\} + r0$$

Planteamiento de ecuaciones:

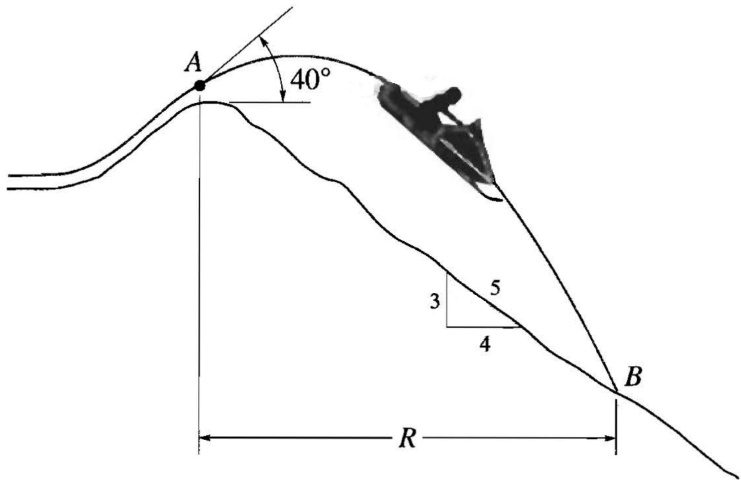
```
ec1 = vecR == rC
resp1 = Solve[ec1]
        resuelve
magvASol = magvA /. resp1[[2]]
```

```
ec2 = (vecR /. magvA → magvASol) == rB
resp2 = Solve[ec2]
        resuelve
hSol = h /. resp2[[1]]
```

# Ejercicio 4.12

## Problema 12–89, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 10ª edición, Pearson, Prentice Hall, p. 46.

El trineo motorizado se desplaza a *10 m/s* habiendo despegado del banco de nieve en *A*.
Determine el tiempo de vuelo de *A* a *B* y el rango de la trayectoria.




Las condiciones iniciales del problema son:

$\overline{v_0} = 10\,\{\text{Cos}\,[40°], \text{Sin}\,[40°]\}$

$\overline{v_0} = 10\,\{0.766044, 0.642788\}$

$\overline{v_0} = \{7.66044, 6.42788\}$

y:

$\overline{r_0} = \{0, 0\}$

Por consiguiente:

$\overline{r} = \{7.66044\ \text{t}, -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + 6.42788\,t\}$

es decir:

$\text{x} = 7.66044\ \text{t}$

$\text{y} = -4.905\,t^2 + 6.42788\ \text{t}$

Para encontrar el punto B, se puede observar que es la intersección de la trayectoria del trineo motorizado con el banco de nieve cuya superficie se puede considerar como un plano inclinado, que tiene una pendiente $-\frac{3}{4}$.

Dado que el plano inclinado que representa al banco de nieve es una recta que pasa por el origen y que tiene la pendiente indicada, su ecuación es:

$\text{y} = -\frac{3}{4}\ \text{x}$

Por consiguiente, se resuelve el sistema de ecuaciones formado por la trayectoria del tiro parabólico y la ecuación que representa al banco de nieve:

$x = 7.66044\ t$

$y = -4.905\ t^2 + 6.42788\ t$

$y = -\frac{3}{4}\ x$

Se sustituyen las dos primeras expresiones en la tercera para obtener el tiempo de vuelo:

$-4.905\ t_f^2 + 6.42788\ t_f = -\frac{3}{4}\ 7.66044\ t_f$

$-4.905\ t_f^2 + 6.42788\ t_f = -5.745333\ t_f$

$4.905\ t_f^2 = 6.42788\ t_f + 5.745333\ t_f$

$4.905\ t_f = 12.17321$

$t_f = \frac{12.17321}{4.905}$

$t_f = 2.4818$ s

## El tiempo de vuelo de A a B es:

$t_f = 2.4818$ s.

Para determinar el alcance o rango, se sustituye el tiempo de vuelo en la expresión para x:

$x_f = 7.66044\ t_f$

$x_f = 7.66044\ (2.4818)$

$x_f = 19.0117$ m

R = 19.0117 m

## El alcance o rango de la trayectoria del trineo motorizado es:

R = 19.0117 m.

## Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magv0 = 10;
θ = 40 °;
r0 = {0, 0}
g = 9.81;
```

Velocidad inicial:

```
v0 = magv0 {Cos[θ], Sin[θ]}
            coseno  seno
```

Vector que representa la posición del trineo motorizado:

$$ec1 = \{x, y\} == \left\{v0[[1]]\, t, -\frac{1}{2} g\, t^2 + v0[[2]]\, t\right\} + r0$$

Ecuación de la recta que representa al banco de nieve:

$$ec2 = y == -\frac{3}{4} x$$

Obtención del tiempo de vuelo y el alcance del tiro parabólico del trineo motorizado:

```
resp2 = Solve[{ec1, ec2}]
        resuelve
tVuelo = t /. resp2[[2]]
R = x /. resp2[[2]]
```

*UNAM, Facultad de Ingeniería*
*División de Ciencias Básicas, Mecánica*
*Agosto de 2022*

*Yukihiro Minami Koyama*
*Gloria Ramírez Romero*