FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 4 – parte 1:

Introducción a la dinámica de la partícula

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

M.I Yukihiro Minami Koyama

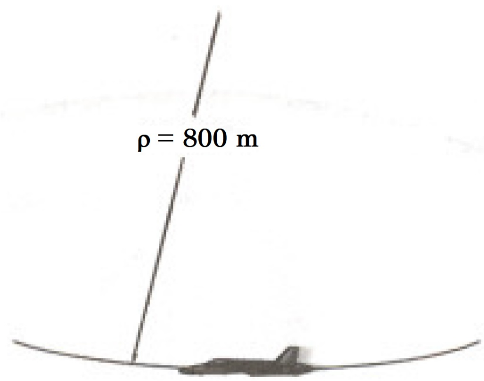
Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

Tema 4
Introducción a la dinámica de la partícula, parte 2

Ejercicio 4.13

Problema 13–55, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 7ª edición, Prentice Hall Hispanoamericana, p. 119.

Determine la rapidez constante máxima con la que el piloto debe recorrer una curva vertical cuyo radio de curvatura es $\rho = 800\ m$, de modo que experimente una aceleración máxima $a_N = 78.48\ \frac{m}{s^2}$. Si el piloto tiene una masa de $70\ kg$, determine la fuerza normal que ejerce sobre el asiento del avión cuando éste se encuentra en el punto más bajo con esta rapidez.



Para movimiento curvilíneo, se puede verificar que la velocidad siempre es tangente a la trayectoria.
Por tanto, la velocidad puede escribirse de la siguiente manera:

$$\overline{v} = v\,\overline{e_T}$$

$$\frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\overline{e_T} + v\,\frac{d}{dt}\,\overline{e_T}$$

$$\overline{a} = \frac{dv}{dt}\,\overline{e_T} + v\left(\frac{v}{\rho}\,\overline{e_N}\right)$$

$$\overline{a} = \frac{dv}{dt}\,\overline{e_T} + \frac{v^2}{\rho}\,\overline{e_N}$$

$$\overline{a} = a_T\,\overline{e_T} + a_N\,\overline{e_N}$$

de donde:

$a_T = \frac{dv}{dt}$

$a_N = \frac{v^2}{\rho}$

$a_N = 78.48$

$78.48 = \frac{v^2}{\rho}$

$\frac{v^2}{800} = 78.48$

$v^2 = 78.48\ (800)$

$v^2 = 62{,}784$

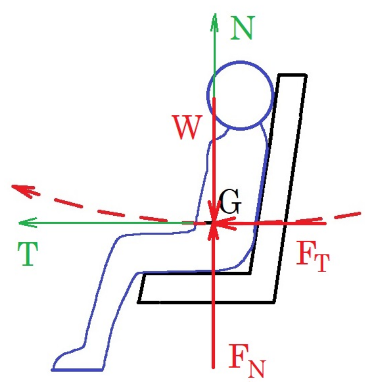
$v = \sqrt{62,\ 784}$

$v = 250.6\ \frac{m}{s}$

La rapidez constante máxima para las condiciones requeridas es:

$v = 250.6\ \frac{m}{s}$.

Ahora, para encontrar la fuerza normal, se dibujó primero el diagrama de cuerpo libre del piloto:



Cuando se emplea el sistema de referencia intrínseco, es decir, tangente-normal, los vectores se representan con una primera componente que será la tangencial, y una segunda componente que corresponderá a la normal.

$\overline{W} = \{0, -m\ g\}$

$\overline{F_N} = \{0, magF_N\}$

$\overline{F_T} = \{magF_T, 0\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \overline{W} + \overline{F_N} + \overline{F_T}$

$\overline{R} = \{0, -m\ g\} + \{0, magF_N\} + \{magF_T, 0\}$

$\overline{R} = \{magF_T, magF_N - m\ g\}$

$\overline{R} = m\ \overline{a}$

$\{magF_T, magF_N - m\ g\} = m\ \{a_T,\ a_N\}$

Para este problema, dado que en la parte más baja de la trayectoria, que es el punto analizado, la aceleración tangencial es nula, y la aceleración normal es $a_N = 78.8\ \frac{m}{s^2}$:

$\{magF_T, magF_N - m\ g\} = m\ \{0,\ 78.48\}$

$magF_T = 0$

$magF_N - m\ g = 78.48\ m$

$magF_N = 78.48\ m + m\ g$

$magF_N = 78.48\ (70) + 70\ (9.81)$

$magF_N = 5493.6 + 686.7$

$magF_N = 6180.3$ N

La fuerza normal que ejerce el piloto sobre el asiento es:

$magF_N = 6180.3$ N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
ρ = 800;
aN = 78.8;
m = 70;
g = 9.81;
```

```
ec1 = aN == vmax^2/ρ
resp1 = Solve[ec1]
vmaxSol = vmax /. resp1[[2]]
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
W = {0, -m g}
Nrm = {0, magN}
FT = {magFT, 0}
R = W + Nrm + FT
```

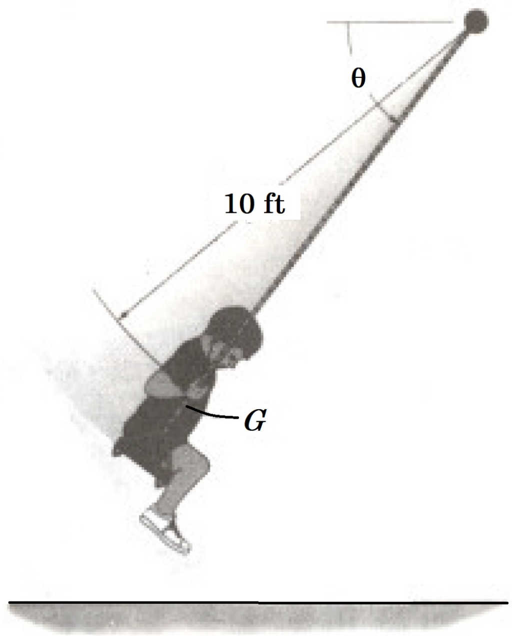
Segunda ley de Newton:

```
ec2 = R == m {0, aN}
resp2 = Solve[ec2, {magFT, magN}]
magNSol = magN /. resp2[[1]]
```

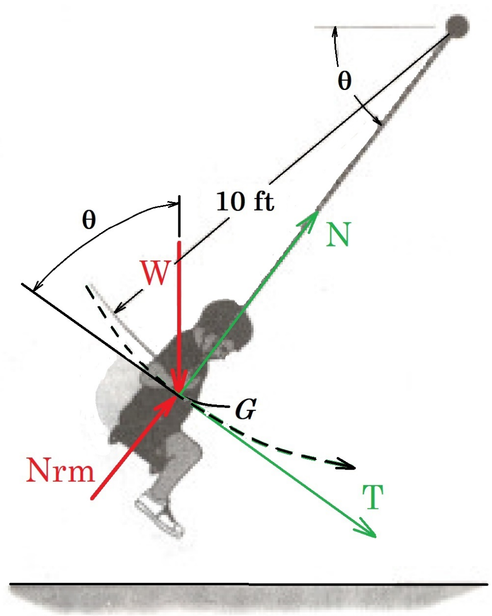
Ejercicio 4.14

Problema 13–60, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 10ª edición, Prentice Hall Hispanoamericana, p. 130.

En el instante $\theta = 60°$ el centro de masa G del niño está momentáneamente en reposo. Determine la rapidez y la tensión en cada una de las dos cuerdas de soporte del columpio cuando $\theta = 90°$. El niño tiene un peso de $60\ lb$. Ignore el tamaño y la masa del asiento y de las cuerdas.



Primero, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del niño, en una posición intermedia:



Para calcular la resultante es necesario la representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el niño:

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, \text{magN}\}$

$\overline{W} = \text{magW} \{\text{Cos}[\theta], -\text{Sin}[\theta]\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{\text{Resultante}} = \text{m}\,\overline{a}$

$\overline{\text{Nrm}} + \overline{W} = \text{m}\,\overline{a}$

$\{\text{magW Cos}[\theta], \text{magN} - \text{magW Sin}[\theta]\} = \text{m}\,\{a_T, \; a_N\}$

$\text{magW Cos}[\theta] = \text{m} \frac{dv}{dt}$

$\text{magN} - \text{magW Sin}[\theta] = \text{m} \frac{v^2}{R}$

Se escribe R en lugar de ρ cuando la trayectoria es una circunferencia, y R es el radio de la misma.

La longitud de un arco de circunferencia se puede determinar con la siguiente expresión:

$s = R\,\theta$

$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$

$v = R \frac{d\theta}{dt}$

Entonces, al sustituir la expresión anterior en la ecuación de la compontente tangencial queda:

$\text{magW Cos}[\theta] = \text{m} \frac{d}{dt} \left(R \frac{d\theta}{dt}\right)$

$\text{magW Cos}[\theta] = \text{m R} \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Recordando que la aceleración puede escribirse de la siguiente manera:

$a = \frac{dv}{dt}$

$a = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$

$a = v \frac{dv}{dx}$

Algo parecido puede aplicarse para la segunda derivada de la posición angular θ con respecto al tiempo:

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

donde:

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Para la ecuación que resulta de la componente tangente:

$\text{magW Cos}[\theta] = \text{m R} \frac{d^2\theta}{dt^2}$

$\text{m R} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{magW Cos}[\theta]$

$\text{m R}\,\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \text{magW Cos}[\theta]$

$\text{m R}\,\omega\, d\omega = \text{magW Cos}[\theta]\, d\theta$

$\text{m R} \int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = \text{magW} \int_{\theta_0}^{\theta} \text{Cos}[\theta]\, d\theta$

Las condiciones iniciales para este problema son que para $\theta_0 = 60°$, $\omega_0 = 0$:

$\text{m R} \int_{0}^{\omega} \omega\, d\omega = \text{magW} \int_{60°}^{\theta} \text{Cos}[\theta]\, d\theta$

$\text{m R} \frac{1}{2}\,\omega^2\,]_0^{\omega} = \text{magW Sin}[\theta]\,]_{60°}^{\theta}$

$\text{m R} \frac{1}{2}\,\omega^2 - \text{m R} \frac{1}{2}\, 0^2 = \text{magW Sin}[\theta] - \text{magW Sin}[60°]$

$$\frac{m\,R}{2}\,\omega^2 = \text{magW Sin}[\theta] - \text{magW}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{2\,\text{magW}}{m\,R}\,\text{Sin}\,[\theta] - \frac{2\,\text{magW}\,\sqrt{3}}{m\,R\,2}$$

Luego, se calcula la rapidez angular para la posición de interés, $\theta = 90°$:

$$\omega^2 = \frac{2\,(60)}{\frac{60}{32.2}\,(10)}\,\text{Sin}\,[90°] - \frac{32.2\,\sqrt{3}}{10}$$

$$\omega^2 = 6.44\,(1) - 5.577$$

$$\omega = \sqrt{0.8628}$$

$$\omega = 0.9289\,\frac{\text{rad}}{s}$$

Posteriormente, se obtiene la rapidez lineal:

$$\text{v} = \omega\,\text{R}$$

$$\text{v} = (0.9289)\,(10)$$

$$\text{v} = 9.289\,\frac{\text{ft}}{s}$$

Para determinar la magnitud de la tensión en cada una de las cuerdas, se requiere conocer la fuerza normal del niño sobre el columpio:

$$\text{magN} - \text{magW Sin}\,[\theta] = \text{m}\,\frac{v^2}{R}$$

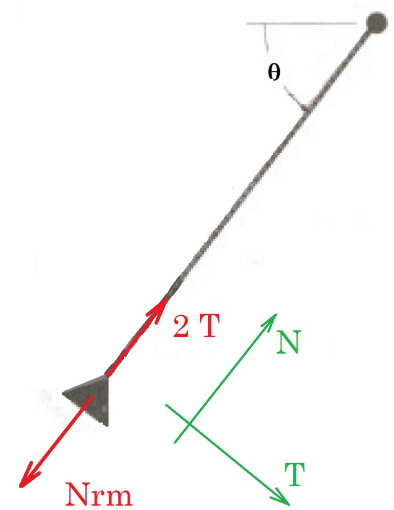
$$\text{magN} = \frac{60}{32.2}\,\frac{(9.289)^2}{10} + 60\,\text{Sin}\,[90°]$$

$$\text{magN} = (1.863)\,(8.628) + 60$$

$$\text{magN} = 16.08 + 60$$

$$\text{magN} = 76.08\,\text{lb}$$

Finalmente, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del columpio:



$$2\,\text{T} - \text{magN} = \text{m}\,a_N$$

Pero, dado que el asiento del columpio y las cuerdas tienen masa despreciable:

$$\text{m} = 0$$

Por tanto:

$2\,T - magN = 0$

$2\,T = magN$

$T = \frac{76.08}{2}$

$T = 38.04$ lb

La rapidez del niño y la magnitud de tensión en cada una de las cuerdas del columpio cuando $\theta = 90°$ son:

$v = 9.289\ \frac{ft}{s}$

$T = 38.04$ lb.

Resolucion del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
θ0 = 60 °;
θf = 90 °;
magW = 60;
g = 32.2;
m = magW/g
R = 10;
```

Vectores que representan las fuerzas:

```
Nrm = {0, magN}
W = magW {Cos[θ], -Sin[θ]}
Res = Nrm + W
```

Segunda Ley de Newton:

```
ec1 = Res == m {aT, aN}
resp1 = Solve[ec1, {aT, aN}]
aTSol = aT /. resp1[[1]]
aNSol = aN /. resp1[[1]]
```

Dado que aTSol = $\frac{dv}{dt}$, y v = R $\frac{d\theta}{dt}$, entonces aTSol = R $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, por tanto, aTSol = R $\omega \frac{d\omega}{d\theta}$, de donde aTSol $d\theta$ = R $\omega\, d\omega$; entonces:

```
ec2 = ∫_θ0^θ aTSol dθ == ∫_0^ω R ω dω
resp2 = Solve[ec2, ω]
ωSol = ω /. resp2[[2]]
```

Rapidez para θ_f = 90°:

```
ωf = ωSol /. θ → θf
vf = R ωf
```

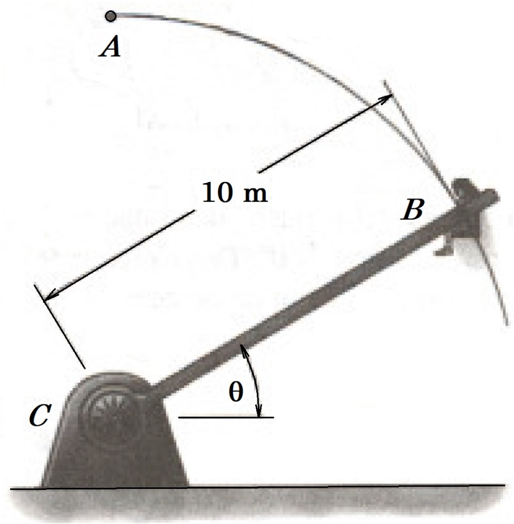
Magnitud de la tensión en cada cuerda:

```
aNf = aNSol /. θ → θf
ec3 = aNf == vf^2/R
resp3 = Solve[ec3]
magNSol = magN /. resp3[[1]]
ec4 = 2 T - magNSol == 0
resp4 = Solve[ec4]
TSol = T /. resp4[[1]]
```

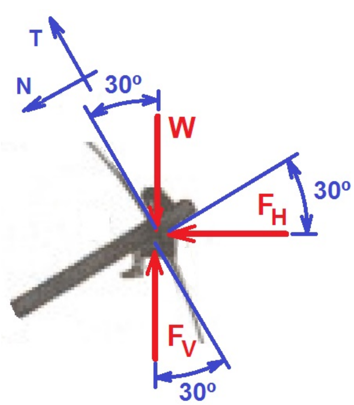
Ejercicio 4.15

Problema 13–59, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 7ª edición, Prentice Hall Hispanoamericana, p. 119.

El pasajero tiene una masa de *75 kg* y todo el tiempo permanece sentado con la cabeza hacia arriba. En el instante $\theta = 30°$, tiene una rapidez de $5\ \frac{m}{s}$ y un aumento en la misma de $2\ \frac{m}{s^2}$. Determine las fuerzas horizontal y vertical que ejerce la silla sobre el pasajero para producir este movimiento.



Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del pasajero:



Luego, se establecen las expresiones vectoriales de las fuerzas que actúan sobre el pasajero con base en los ejes tangente y normal, considerando que la primera componente es la tangencial y la segunda la normal:

$\overline{W}$ = magW {-Cos [30°], Sin [30°]}

$\overline{F_H}$ = magF$_H$ {Sin [30°], Cos [30°]}

$\overline{F_V}$ = magF$_V$ {Cos [30°], -Sin [30°]}

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{\text{Res}} = \text{m}\,\overline{a}$

$\overline{\text{Res}} = \overline{W} + \overline{F_H} + \overline{F_V}$

$\overline{a} = \{a_T, a_N\}$

Por tanto:

$\{-\text{magW Cos}[30°] + \text{magF}_H\,\text{Sin}[30°] + \text{magF}_V\,\text{Cos}[30°],$

$\text{magW Sin}[30°] + \text{magF}_H\,\text{Cos}[30°] - \text{magF}_V\,\text{Sin}[30°]\} = \text{m}\,\{a_T,\ a_N\}$

$-\text{magW Cos}[30°] + \text{magF}_H\,\text{Sin}[30°] + \text{magF}_V\,\text{Cos}[30°] = \text{m}\,a_T$

$\text{magW Sin}[30°] + \text{magF}_H\,\text{Cos}[30°] - \text{magF}_V\,\text{Sin}[30°] = \text{m}\,\frac{v^2}{R}$

Con base en los datos del problema:

$a_T = 2\,\frac{m}{s^2}$

$\text{v} = 5\,\frac{m}{s}$

$\text{m} = 75\text{ kg}$

$\text{g} = 9.81\,\frac{m}{s^2}$

$\text{R} = 10\text{ m}$

Al sustituirlos en las dos ecuaciones escalares anteriores, se tiene:

$-75\,(9.81)\,(0.8660) + 0.5\,\text{magF}_H + 0.8660\,\text{magF}_V = 75\,(2)$

$75\,(9.81)\,(0.5) + 0.8660\,\text{magF}_H - 0.5\,\text{magF}_V = 75\,\frac{5^2}{10}$

de donde:

$-637.18 + 0.5\,\text{magF}_H + 0.8660\,\text{magF}_V = 150$

$367.88 + 0.8660\,\text{magF}_H - 0.5\,\text{magF}_V = 187.5$

Se multiplica la primera expresión por 0.5, la segunda expresión por 0.8660 y se suman:

$-318.59 + 0.25\,\text{magF}_H + 0.4330\,\text{magF}_V = 75$

$318.59 + 0.75\,\text{magF}_H - 0.4330\,\text{magF}_V = 162.4 \quad +$

$0 + \text{magF}_H = 237.4$

$\text{magF}_H = 237.4\text{ N}$

Se sustituye el valor obtenido en la segunda ecuación original:

$367.88 + 0.8660\,(237.4) - 0.5\,\text{magF}_V = 187.5$

$0.5\,\text{magF}_V = 367.88 + 205.6 - 187.5$

$\text{magF}_V = \frac{386.0}{0.5}$

$\text{magF}_V = 772.0\text{ N}$

Las magnitudes de las fuerzas que ejerce la silla sobre el pasajero son:

$\text{magF}_H = 237.4\text{ N},\ \text{magF}_V = 772.0\text{ N}.$

Resolucion del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 75;
g = 9.81;
θ = 30 °;
magV = 5;
aT = 2;
R = 10;
```

Vectores que representan las fuerzas:

```
W = m g {-Cos[30 °], Sin[30 °]}
FH = magFH {Sin[30 °], Cos[30 °]}
FV = magFV {Cos[30 °], -Sin[30 °]}
```

Segunda Ley de Newton:

```
ec1 = W + FH + FV == m a
a = {aT, magV^2/R}
resp1 = Solve[ec1]
magFHSol = magFH /. resp1[[1]]
magFVSol = magFV /. resp1[[1]]
```

Ejercicio 4.16

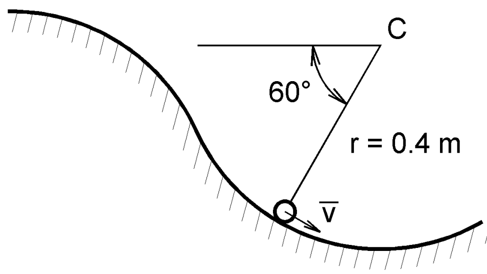
Problema III.4, Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 34.

La partícula que se muestra en la figura pesa 20 N y se mueve sobre una superficie curva y rugosa localizada en un plano vertical; en la posición indicada se detallan las condiciones geométricas del centro de curvatura y su rapidez vale 2 $\frac{m}{s}$. Si el coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto vale 0.4, determine:

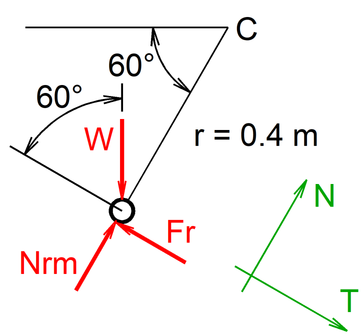
a) la fuerza normal sobre la partícula;

b) la aceleración total; y

c) la rapidez de la partícula ¿se incrementa o decrece?



Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la partícula, en una posición indicada sobre la superficie curva, en este caso debido a que se solicitan los valores cinemáticos y dinámicos en dicha posición:



a) la fuerza normal sobre la partícula

La representación vectorial de las fuerzas es la siguiente:

$\overline{\text{Fr}}$ = {-magFr, 0}

$\overline{\text{Nrm}}$ = {0, magN}

$\overline{W}$ = magW {Cos [60°], -Sin [60°]}

$\overline{W}$ = 20 {0.5, -0.866}

$\overline{W}$ = {10, -17.32} N

Luego, se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \text{m}\,\overline{a}$

$\overline{\text{Fr}} + \overline{\text{Nrm}} + \overline{W} = \text{m}\,\overline{a}$

$\{\text{-magFr}, 0\} + \{0, \text{magN}\} + \{10, -17.32\} = \frac{\text{magW}}{g}\,\{a_T, a_N\}$

Las expresiones escalares que se obtienen a partir de la ecuación anterior son:

$$-\text{magFr} + 10 = \frac{\text{magW}}{g}\ a_T$$

$$\text{magN} - 17.32 = \frac{\text{magW}}{g}\ a_N$$

donde:

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$a_N = \frac{2^2}{0.4}$$

$$a_N = 10\ \frac{m}{s^2}$$

y:

$$\text{magFr} = \mu_k\ \text{magN}$$

$$\text{magFr} = 0.4\ \text{magN}$$

Sustituyendo los valores conocidos en la expresiones escalares:

$$-\text{magFr} + 10 = \frac{20}{9.81}\ a_T$$

$$\text{magN} - 17.32 = \frac{20}{9.81}\ (10)$$

$$\text{magN} = 20.39 + 17.32$$

$$\text{magN} = 37.71\ \text{N}$$

La fuerza normal sobre la partícula es:

$$\overline{\text{Nrm}} = \{0, 37.71\}\ \text{N}$$

cuya magnitud es:

$$\text{magN} = 37.71\ \text{N}$$

b) la aceleración total

Para calcular la aceleración total, se requiere obtener primero la aceleración tangencial:

$$\text{magFr} = 0.4\ (37.71)$$

$$\text{magFr} = 15.08\ \text{N}$$

Entonces:

$$-15.08 + 10 = 2.039\ a_T$$

$$a_T = \frac{-5.083}{2.039}$$

$$a_T = -2.493\ \frac{m}{s^2}$$

Entonces, la aceleración total es:

$$\overline{a} = \{-2.493, 10\}\ \frac{m}{s^2}$$

Cuya magnitud es:

$$\text{magAcel} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$
$$\text{magAcel} = \sqrt{(-2.493)^2 + 10^2}$$
$$\text{magAcel} = \sqrt{6.216 + 100}$$
$$\text{magAcel} = \sqrt{106.22}$$
$$\text{magAcel} = 10.31\ \frac{m}{s^2}$$

La aceleración total de la partícula en la posición indicada es:

$$\overline{a} = \{-2.493, 10\}\ \frac{m}{s^2}$$

y cuya magnitud es:

$$\text{magAcel} = 10.31\ \frac{m}{s^2}.$$

c) la rapidez de la partícula ¿se incrementa o decrece?

La rapidez de la partícula decrece, debido a que la aceleración tangencial es negativa.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magW = 20;
g = 9.81;
v = 2;
μk = 0.4;
θ = 60 °;
r = 0.4;
```

Vectores que representan las fuerzas:

```
Fr = {-magFr, 0}
Nrm = {0, magN}
W = magW {Cos[θ], -Sin[θ]} // N
```

Segunda Ley de Newton:

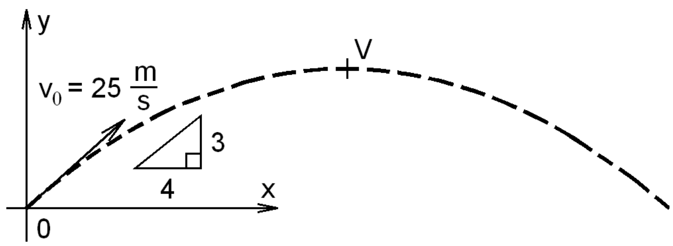
```
ec1 = Fr + Nrm + W == magW/g {aT, aN}
aN = v^2/r
magFr = μk magN
resp1 = Solve[ec1]
magNSol = magN /. resp1[[1]]
aTSol = aT /. resp1[[1]]
```

Aceleración total:

```
a = {aTSol, aN}
magAcel = Norm[a]
```

Ejercicio 4.17

Con base en la solución del Ejercicio 4.10, determine los vectores que representan la velocidad y las aceleraciones tangencial y normal del cuerpo, así como el radio de curvatura de la trayectoria, para $t_1 = 1$ y $t_2 = 2.5$ segundos. Recuerde que la aceleración es igual a -g **j**, donde **j** es el vector unitario en la dirección del eje vertical.



Dado que la aceleración que actúa durante todo el tiro parabólico es:

$\overline{a} = \{0, -g\}$

Y por definición, la aceleración es:

$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt}$

$d\overline{v} = \overline{a}\, dt$

por consiguiente:

$\int_{v_0}^{\overline{v}} d\overline{v} = \int_{t_9}^{t} \overline{a}\, dt$

Las condiciones iniciales del tiro parabólico son:

$t_0 = 0$ s

$\overline{r_0} = \{0, 0\}$ m

$\overline{v_0} = \text{magV}_0 \left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

es decir:

$\overline{v_0} = 25 \left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

$\overline{v_0} = \{20, 15\}\ \frac{m}{s}$

por tanto:

$\int_{\{20, 15\}}^{\overline{v}} d\overline{v} = \int_0^t \{0, -g\}\, dt$

$\overline{v}\,]_{\{20, 15\}}^{\overline{v}} = \{0, -g\}\, t\,]_0^t$

$\overline{v} - \{20, 15\} = \{0, -g\, t\}$

$\overline{v} = \{20, 15 - g\, t\}$

Para $t_1 = 1$ s:

$\overline{v_1} = \{20, 15 - 9.81\ (1)\}$

$\overline{v_1} = \{20, 5.19\}\ \frac{m}{s}$

Procedimiento más sencillo para determinar las aceleraciones tangencial y normal, así como el radio de curvatura

Dado que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria, se puede obtener la aceleración tangencial como la proyección vectorial de la aceleración total en la dirección de la velocidad:

$$\overline{e_{T1}} = \frac{1}{|\overline{v_1}|}\overline{v_1}$$
$$|\overline{v_1}| = \sqrt{(20)^2 + (5.19)^2}$$
$$|\overline{v_1}| = \sqrt{400 + 26.94}$$
$$|\overline{v_1}| = \sqrt{426.9}$$
$$|\overline{v_1}| = 20.66$$
$$\overline{e_{T1}} = \frac{1}{20.66}\{20, 5.19\}$$
$$\overline{e_{T1}} = \{0.9679, 0.2512\}$$
$$\overline{a_{T1}} = (\overline{a}\cdot\overline{e_{T1}})\,\overline{e_{T1}}$$
$$\overline{a}\cdot\overline{e_{T1}} = \{0, -9.81\}\cdot\{0.9679, 0.2512\}$$
$$\overline{a}\cdot\overline{e_{T1}} = -9.81\,(0.2512)$$
$$\overline{a}\cdot\overline{e_{T1}} = -2.464$$
$$\overline{a_{T1}} = (-2.464)\,\{0.9679, 0.2511\}$$
$$\overline{a_{T1}} = \{-2.385, -0.6189\}\,\frac{m}{s^2}$$

La aceleración normal es, simplemente, la diferencia de la aceleración total y la aceleración tangencial:

$$\overline{a_{N1}} = \overline{a} - \overline{a_{T1}}$$
$$\overline{a_{N1}} = \{0, -9.81\} - \{-2.385, -0.6189\}$$
$$\overline{a_{N1}} = \{2.385 - 9.191\}\,\frac{m}{s^2}$$

Para obtener el radio de curvatura, se aplica la definición de la magnitud de la aceleración normal:

$$|\overline{a_{N1}}| = \frac{|\overline{v_1}|^2}{\rho_1}$$
$$|\overline{a_{N1}}| = \sqrt{(2.385)^2 + (-9.191)^2}$$
$$|\overline{a_{N1}}| = \sqrt{5.689 + 84.48}$$
$$|\overline{a_{N1}}| = \sqrt{90.16}$$
$$|\overline{a_{N1}}| = 9.495$$
$$\rho_1 = \frac{|\overline{v_1}|^2}{|\overline{a_{N1}}|}$$
$$\rho_1 = \frac{(20.66)^2}{9.495}$$
$$\rho_1 = \frac{426.9}{9.495}$$
$$\rho_1 = 44.96\text{ m}$$

Para t = t_1, los vectores que representan a la velocidad, aceleración tangencial y aceleración normal y el radio de curvatura son:

$$\overline{v_{Sol1}} = \{20, 5.19\}\,\frac{m}{s},\ \overline{a_{T1}} = \{-2.385, -0.6189\}\,\frac{m}{s^2},\ \overline{a_{N1}} = \{2.385, -9{,}191\}\,\frac{m}{s^2}\text{ y}$$

$$\rho_1 = 44.96\text{ m.}$$

Para t_2 = 2.5 s:

$\overline{v_2} = \{20, 15 - 9.81\ (2.5)\}$

$\overline{v_2} = \{20, 15 - 24.53\}$

$\overline{v_2} = \{20, -9.525\}\ \frac{m}{s}$

Procedimiento basado en la obtención de la expresión de la rapidez en función del tiempo

Se considera la definición de la aceleración tangencial:

$|\ \overline{a_T}\ | = \frac{dv}{dt}$

Dado que la velocidad es:

$\overline{v} = \{20, 15 - g\ t\}$

$v = \sqrt{20^2 + (15 - g\ t)^2}$

$v = \sqrt{400 + 225 - 294.3\ t + 96.24\ t^2}$

Entonces:

$|\ \overline{a_T}\ | = \frac{d}{dt}\ \sqrt{625 - 294.3\ t + 96.24\ t^2}$

$|\ \overline{a_T}\ | = \frac{-294.3 + 192.5\ t}{2\ \sqrt{625 - 294.3\ t + 96.24\ t^2}}$

$|\ \overline{a_T}\ | = \frac{-147.15 + 96.24\ t}{\sqrt{625 - 294.3\ t + 96.24\ t^2}}$

Se obtiene su valor para t = t_2:

$|\ \overline{a_{T2}}\ | = \frac{-147.2 + 96.2361\ (2.5)}{\sqrt{625 - 294.3\ (2.5) + 96.2361\ (2.5)^2}}$

$|\ \overline{a_{T2}}\ | = \frac{-147.15 + 240.6}{\sqrt{625 - 735.8 + 96.24\ (6.25)}}$

$|\ \overline{a_{T2}}\ | = \frac{93.44}{\sqrt{-110.8 + 601.5}}$

$|\ \overline{a_{T2}}\ | = \frac{93.44}{\sqrt{490.7}}$

$|\ \overline{a_{T2}}\ | = \frac{93.44}{22.15}$

$|\ \overline{a_{T2}}\ | = 4.218\ \frac{m}{s^2}$

El vector unitario tangente es:

$\overline{e_{T2}} = \frac{1}{|\ \overline{v_2}\ |}\ \overline{v_2}$

$|\ \overline{v_2}\ | = \sqrt{20^2 + (-9.525)^2}$

$|\ \overline{v_2}\ | = \sqrt{400 +\ 90.73}$

$|\ \overline{v_2}\ | = \sqrt{490.7}$

$|\ \overline{v_2}\ | = 22.15$

$\overline{e_{T2}} = \frac{1}{22.15}\ \{20, -9.525\}$

$\overline{e_{T2}} = \{0.9028, -0.4300\}$

De donde:

$\overline{a_{T2}} = |\ \overline{a_{T2}}\ |\ \overline{e_{T2}}$

$\overline{a_{T2}} = 4.2181\{0.9028, -0.4300\}$

$\overline{a_{T2}} = \{3.808, -1.814\}\ \frac{m}{s^2}$

La aceleración normal es la diferencia de la aceleración total y la aceleración tangencial:

$\overline{a_{N2}} = \overline{a} - \overline{a_{T2}}$

$\overline{a_{N2}} = \{0, -9.81\} - \{3.808, -1.814\}$

$\overline{a_{N2}} = \{-3.808, -8.000\}\ \frac{m}{s^2}$

Y el radio de curvatura, con base en la definición de aceleración normal, es:

$|\overline{a_{N2}}| = \frac{|\overline{v_2}|^2}{\rho_2}$

$\rho_2 = \frac{|\overline{v_2}|^2}{|\overline{a_{N2}}|}$

$|\overline{a_{N2}}| = \sqrt{(-3.808)^2 + (-8.000)^2}$

$|\overline{a_{N2}}| = \sqrt{14.50 + 63.94}$

$|\overline{a_{N2}}| = \sqrt{78.44}$

$|\overline{a_{N2}}| = 8.857$

$\rho_2 = \frac{(22.15)^2}{8.857}$

$\rho_2 = \frac{490.7}{8.857}$

$\rho_2 = 55.41$ m

Para t = t_2, los vectores que representan a la velocidad, aceleración tangencial y aceleración normal y el radio de curvatura son:

$\overline{v_{Sol2}} = \{20, -9.525\}\ \frac{m}{s}$, $\overline{a_{T2}} = \{3.808, -1.814\}\ \frac{m}{s^2}$, $\overline{a_{N2}} = \{-3.808, -8{,}000\}\ \frac{m}{s^2}$ y

$\rho_2 = 55.41$ m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
g = 9.81;
magv0 = 25;
t1 = 1;
t2 = 2.5;
```

```
v0 = magv0 {4/5, 3/5}
r0 = {0, 0}
vecA = {0, -g}
vecV = {vx, vy}
```

Dado que $\overline{\text{vecA}} = \frac{d\,\overline{v}}{d\,t}$, d $\overline{v}$ = $\overline{\text{vecA}}$ dt, y por consiguiente:

```
ec1 = ∫_v0^vecV ⅆvx == ∫_0^t vecA ⅆt
resp1 = Solve[ec1, vecV]
vecVSol = vecV /. resp1[[1]]
```

Para t = t_1:

```
vSol1 = vecVSol /. t → t1
```

Procedimiento más sencillo para determinar las aceleraciones tangencial y normal, así como el radio de curvatura

Dado que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria, se puede obtener la aceleración tangencial como la proyección de la aceleración total, $\overline{a}$, en la dirección de la velocidad:

```
eT1 = Normalize[vSol1]
aT1 = (vecA.eT1) eT1
```

Y la aceleración normal, es la diferencia de la aceleración total, $\overline{\text{vecA}}$, y la aceleración tangencial, $\overline{a_{T1}}$:

```
aN1 = vecA - aT1
```

Para obtener el radio de curvatura, se obtiene la rapidez $\text{magv}_{\text{Sol1}}$ y la magnitud de la aceleración normal maga_{N1}:

```
magvSol1 = Norm[vSol1]
magaN1 = Norm[aN1]
```

Dado que la magnitud de la aceleración normal es $\text{maga}_{\text{N1}} = \frac{\text{magv}_{\text{Sol1}}^2}{\rho_1}$:

```
ec3 = magaN1 == magvSol1^2/ρ1
resp3 = Solve[ec3]
ρ1Sol = ρ1 /. resp3[[1]]
```

Para t = t_2:

```
vSol2 = vecVSol /. t → t2
```

Dado que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria, se puede obtener el vector unitario tangente como:

```
eT2 = Normalize[vSol2]
```

Procedimiento basado en la obtención de la expresión de la rapidez en función del tiempo

```
magV = √(vecVSol[[1]]^2 + vecVSol[[2]]^2)
aT = D[magV, t]
aT2 = (aT /. t → t2) eT2
```

Y la aceleración normal, como la diferencia de la aceleración total, $\overline{a}$, y la aceleración tangencial, $\overline{a_{T2}}$:

```
aN2 = vecA - aT2
```

Para obtener el radio de curvatura, se obtiene la rapidez magv_{Sol} y la magnitud de la aceleración normal maga_{N2}:

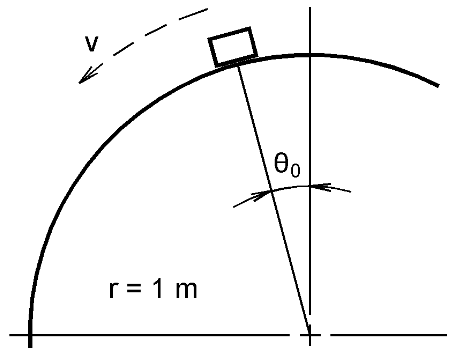
```
magvSol2 = Norm[vSol2]
magaN2 = Norm[aN2]
```

Dado que la magnitud de la aceleración normal es $\text{maga}_{\text{N2}} = \frac{\text{magv}_{\text{Sol2}}^2}{\rho_2}$:

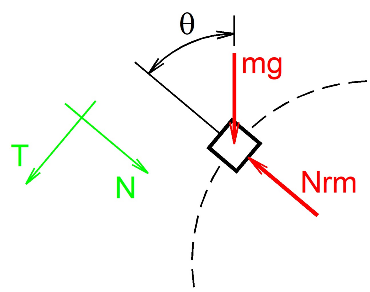
```
ec4 = magaN2 == magvSol2^2/ρ2
resp4 = Solve[ec4]
ρ2Sol = ρ2 /. resp4[[1]]
```

Ejercicio 4.18

El bloque de la figura se mueve describiendo una trayectoria alojada en un plano vertical, después de soltarla sobre la superficie lisa mostrada.
Determine la posición angular θ_0 en la que dicho bloque se soltó del reposo, si se sabe que se despegó de la superficie circular mencionada en un ángulo θ_f = 60°.



Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque en un punto intermedio de su movimiento:



Se obtiene la representación vectorial de las fuerzas:

$\overline{\text{Nrm}}$ = {0, -magN}

$\overline{W}$ = m g {Sin [θ], Cos [θ]}

Se calcula la fuerza resultante:

$\overline{R} = \overline{\text{Nrm}} + \overline{W}$

$\overline{R}$ = {0, -magN} + {m g Sin [θ], m g Cos [θ]}

$\overline{R}$ = {m g Sin [θ], m g Cos [θ] - magN}

Y se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{R}$ = m $\overline{a}$

{m g Sin [θ], m g Cos [θ] - magN} = m {a_T, a_N}

Se obtienen dos ecuaciones escalares a partir de la ecuación vectorial anterior:

m g Sin [θ] = m a_T

a_T = g Sin [θ]

y:

m g Cos [θ] - magN = m a_N

Dado que la aceleración tangencial es:

a_T = R α

donde R es el radio de la trayectoria y α es la aceleración angular del bloque con respecto al centro de dicha trayectoria.

Como la aceleración angular puede escribirse de la siguiente forma:

$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

si:

$a_T = \text{g Sin}[\theta]$

$\text{R}\,\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \text{g Sin}[\theta]$

$\text{R}\,\omega\, d\omega = \text{g Sin}[\theta]\, d\theta$

por consiguiente:

$\int_{\omega_0}^{\omega} \text{R}\,\omega\, d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \text{g Sin}[\theta]\, d\theta$

Las condiciones iniciales, según el enunciado del problema son:

$\omega_0 = 0$ para $\theta = \theta_0$

entonces:

$\int_{0}^{\omega} \text{R}\,\omega\, d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \text{g Sin}[\theta]\, d\theta$

$\frac{1}{2}\text{R}\,\omega^2\,]_0^{\omega} = -\text{g Cos}[\theta]\,]_{\theta_0}^{\theta}$

$\frac{1}{2}\text{R}\,\omega^2 - \frac{1}{2}\text{R}\,(0)^2 = -\text{g Cos}[\theta] - (-\text{g Cos}[\theta_0])$

$\frac{1}{2}\text{R}\,\omega^2 = \text{g Cos}[\theta_0] - g\,\text{Cos}[\theta]$

Dado que cuando $\theta_f = 60°$ es bloque se despega, lo que implica que en ese instante magN = 0:

$\frac{1}{2}(1)\,\omega_f^2 = 9.81\,\text{Cos}[\theta_0] - 9.81\,\text{Cos}[60\,°]$

$\omega_f^2 = 19.62\,\text{Cos}[\theta_0] - 19.62\,(0.5)$

$\omega_f^2 = 19.62\,\text{Cos}[\theta_0] - 9.81$

Y sustituyendo en la ecuación de la aceleración normal, se tiene que:

$\text{m g Cos}[\theta] - \text{magN} = \text{m}\, a_N$

$\text{m g Cos}[\theta_f] - 0 = \text{m}\,\frac{v_f^2}{R}$

Dado que:

$v_f = \omega_f\,\text{R}$

$\text{m g Cos}[60\,°] = \text{m}\,\frac{(\omega_f R)^2}{R}$

$9.81\,(0.5) = \omega_f^2\,(1)$

$\omega_f^2 = 4.905$

Luego de sustituir esta última expresión en la ecuación obtenida a partir de la solución de la aceleración tangencial:

$\omega_f^2 = 19.62\,\text{Cos}[\theta_0] - 9.81$

$4.905 = 19.62\,\text{Cos}[\theta_0] - 9.81$

$19.62\,\text{Cos}[\theta_0] = 4.905 + 9.81$

$\text{Cos}[\theta_0] = \frac{14.72}{19.62}$

$\theta_0 = \text{ArcCos}[0.75]$

$\theta_0 = 0.7227$

es decir:

$$\theta_0 = \frac{0.7227\,(180)}{\pi}$$

$$\theta_0 = 41.41°$$

La posición angular a la que se soltó el bloque si se despegó a un ángulo de $\theta_f = 60°$ es:

$$\theta_0 = 41.41°.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
θf = 60 °;
R = 1;
g = 9.81;
```

Vectores que representan las fuerzas:

```
Nrm = {0, -magN}
W = m g {Sin[θ], Cos[θ]}
```

Segunda Ley de Newton:

```
ec1 = W + Nrm == m {aT, aN}
resp1 = Solve[ec1, {aT, aN}]
aTSol = aT /. resp1[[1]]
aNSol = aN /. resp1[[1]]
```

Resolucion ecuación diferencial definición de aceleración tangencial:

```
ec2 = ∫_θ0^θ aTSol dθ == ∫_0^ω R ω dω
ec3 = ec2 /. {θ → θf, ω → ωf}
ec4 = (aNSol /. {magN → 0, θ → θf}) == R ωf^2
resp4 = Solve[{ec3, ec4}]
θ0Sol = θ0 /. resp4[[4]]
θ0SolDeg = θ0Sol / °
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Mecánica
Agosto de 2022

Yukihiro Minami Koyama
Gloria Ramírez Romero