FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 5:

Impulso y cantidad de movimiento de la partícula

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

M.I Yukihiro Minami Koyama

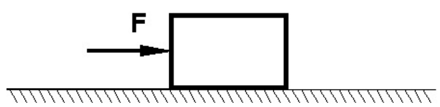
Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

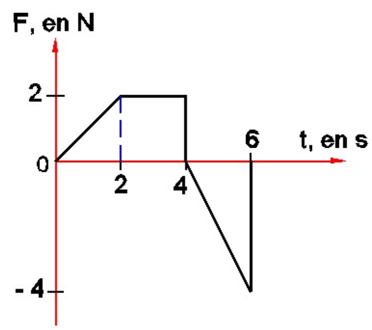
Tema 5
Impulso y cantidad de movimiento de la partícula

Ejercicio 5.1

Problema V.5, Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 69.

Un bloque de 1 kg de masa, con velocidad inicial $v_0 = 4\ \frac{m}{s}$ dirigida hacia la izquierda, se somete a la acción de una fuerza horizontal cuya magnitud muestra la gráfica V.5.2.
Despreciando todo efecto de fricción, determine la velocidad del bloque en t = 10 s.





Para resolver este problema, se aplica la expresión de impulso y cantidad de movimiento lineal:

$$\int_{t_1}^{t_2} F\, dt = m\, v_2 - m\, v_1$$

En este caso, conviene establecer cuatro intervalos de actuación de la fuerza, $0 \le t \le 2$, $2 \le t \le 4$, $4 \le t \le 6$ y $6 \le t \le 10$.
Para todo el problema, se considerará que el eje x de movimiento es positivo hacia la derecha.
Entonces, para el primer intervalo, $0 \le t \le 2$:

$$t_0 = 0\ \text{s}$$
$$t_1 = 2\ \text{s}$$
$$v_0 = -4\ \frac{m}{s}$$

La integral del impulto se puede calcular como el área bajo la curva de la gráfica de la magnitud de la fuerza en el intevalo considerado, que corresponde a un triángulo que tiene 2 s de base y 2 N de altura:

$$\int_{t_0}^{t_1} F\, dt = \frac{1}{2}\,(2)\,(2)$$
$$\int_{t_0}^{t_1} F\, dt = 2\ \text{N·s}$$

Por consiguiente:

$\int_{t_0}^{t_1} F\, dt = m\, v_1 - m\, v_0$

$2 = (1)\, v_1 - (1)\, (-4)$

$v_1 = 2 - 4$

$v_1 = -2\, \frac{m}{2}$ (hacia la izquierda)

Con base en el resultado anterior, se puede obtener la velocidad final en el segundo intervalo, $2 \leq t \leq 4$, para el cual:

$t_1 = 2$ s

$t_2 = 4$ s

En este caso, el impulso corresponde al área bajo la curva de un cuadrado de 2 s de base y 2 N de altura:

$\int_{t_1}^{t_2} F\, dt = (2)\, (2)$

$\int_{t_1}^{t_2} F\, dt = 4$ N·s

De donde:

$\int_{t_1}^{t_2} F\, dt = m\, v_2 - m\, v_1$

$4 = (1)\, v_2 - (1)\, (-2)$

$v_2 = 4 - 2$

$v_2 = 2\, \frac{m}{s}$ (hacia la derecha)

Posteriormente, se procede a calcular la velocidad final en el tercer intervalo, $4 \leq t \leq 6$:

$t_2 = 4$ s

$t_3 = 6$ s

En este intervalo, el impulso es igual al área bajo la curva de otro triángulo, en este caso de 2 s de base y -4 N de altura:

$\int_{t_2}^{t_3} F\, dt = \frac{1}{2}\, (2)\, (-4)$

$\int_{t_2}^{t_3} F\, dt = -4$ N·s

Por tanto:

$\int_{t_2}^{t_3} F\, dt = m\, v_3 - m\, v_2$

$-4 = (1)\, v_3 - (1)\, 2$

$v_3 = -4 + 2$

$v_3 = -2\, \frac{m}{s}$ (hacia la izquierda)

Finalmente, se procede a obtener la velocidad para t = 10 s, considerando el cuarto intervalo, $6 \leq t \leq 10$. Dado que en este intervalo la magnitud de la fuerza aplicada es nula, el impulso también lo es, por tanto:

$t_3 = 6$ s

$t_4 = 10$ s

$\int_{t_3}^{t_4} F\, dt = 0$

Dado que:

$\int_{t_3}^{t_4} F\, dt = m\, v_4 - m\, v_3$

$0 = (1)\, v_4 - (1)\,(-2)$

$v_4 = -2\, \frac{m}{s}$ (hacia la izquierda)

La velocidad del bloque en t = 10 s es:

$v_4 = -2\, \frac{m}{s}$, es decir, $2\, \frac{m}{s}$ hacia la izquierda.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 1;
v0 = -4;
t0 = 0;
t1 = 2;
t2 = 4;
t3 = 6;
t4 = 10;
```

Primer intervalo, 0 ≤ t ≤ 2:

```
I1 = 1/2 (t1 - t0) 2
ec1 = I1 == m v1 - m v0
resp1 = Solve[ec1]
v1Sol = v1 /. resp1[[1]]
```

Segundo intervalo, 2 ≤ t ≤ 4:

```
I2 = (t2 - t1) 2
ec2 = I2 == m v2 - m v1Sol
resp2 = Solve[ec2]
v2Sol = v2 /. resp2[[1]]
```

Tercer intervalo, 4 ≤ t ≤ 6:

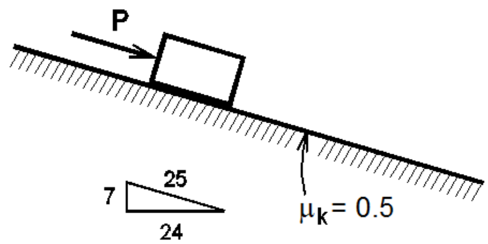
```
I3 = 1/2 (t3 - t2) (-4)
ec3 = I3 == m v3 - m v2Sol
resp3 = Solve[ec3]
v3Sol = v3 /. resp3[[1]]
```

Cuarto intervalo, $6 \leq t \leq 10$:

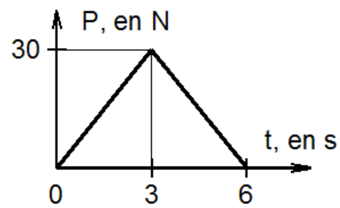
```
I4 = 0
ec4 = I4 == m v4 - m v3Sol
resp4 = Solve[ec4]
v4Sol = v4 /. resp4[[1]]
```

Ejercicio 5.2

Se coloca un cuerpo con una peso W = 50 N sobre un plano inclinado rugoso, tal como se muestra en la figura.

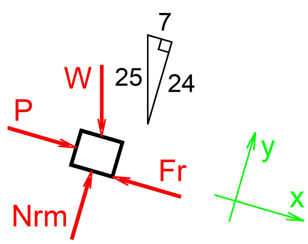


Si cuando está en reposo se le aplica una fuerza P cuya variación con respecto al tiempo se muestra en la gráfica, determine cuánto tiempo se mueve dicho cuerpo.



Sugerencia: trace la gráfica de la fuerza resultante aplicada al bloque en dirección del plano inclinado, y aplique el método de impulso y cantidad de movimiento.

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del cuerpo:



Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$\overline{P} = \{\text{magP}, 0\}$

$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-magFr}, 0\}$

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, \text{magN}\}$

$\overline{W} = \{\frac{7}{25}\text{ magW}, -\frac{24}{25}\text{ magW}\}$

Resultante de fuerzas que actúa sobre el cuerpo:

$\overline{\text{Res}} = \overline{P} + \overline{\text{Fr}} + \overline{\text{Nrm}} + \overline{W}$

$\overline{\text{Res}} = \{\text{magP - magFr} + \frac{7}{25}\text{ magW}, \text{magN} - \frac{24}{25}\text{ magW}\}$

Aplicación de la segunda ley de Newton:

$\overline{\text{Res}} = \text{m } \overline{a}$

$\{\text{magP - magFr} + \frac{7}{25}\text{ magW}, \text{magN} - \frac{24}{25}\text{ magW}\} = \text{m } \{a_x, 0\}$

de donde:

$\text{magP - magFr} + \frac{7}{25}\ \text{magW} = \text{m}\ a_x$

$\text{magN} - \frac{24}{25}\ \text{magW} = 0$

De la última expresión:

$\text{magN} = \frac{24}{25}\ \text{magW}$

En caso de que el cuerpo esté en movimiento, la fuerza de fricción será cinética, por tanto:

$\text{magFr}_k = \mu_k\ \text{magN}$

sustituyendo valores conocidos:

$\text{magN} = \frac{24}{25}\ (50)$

$\text{magN} = 48\ \text{N}$

$\text{magFr}_k = 0.5\ (48)$

$\text{magFr}_k = 24\ \text{N}$

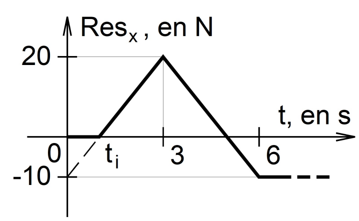
Entonces, la componente en x de la fuerza resultante, $\overline{\text{Res}}$ es:

$\text{Res}_x = \text{magP} - 24 + \frac{7}{25}\ (50)$

$\text{Res}_x = \text{magP} - 24 + 14$

$\text{Res}_x = \text{magP} - 10$

Gráfica de la componente en x de la fuerza resultante:



En el intervalo de 0 ≤ t ≤ t_i la magnitud de la Resultante, Res_x, es igual a cero, debido a que el cuerpo no se mueve y, por tanto, la fuerza de fricción es estática, cuya magnitud es igual a la suma de la componente en x del peso y la magnitud de la fuerza aplicada P.

El valor de t_i puede obtenerse con base en el teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes:

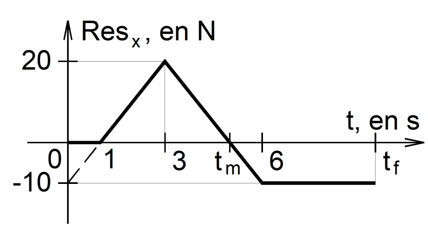
$\frac{t_i - 0}{0 - (-10)} = \frac{3 - 0}{20 - (-10)}$

$\frac{t_i}{10} = \frac{3}{30}$

$t_i = \frac{3\,(10)}{30}$

$t_i = 1\ \text{s}$

Con base en la gráfica de Res_x, puede observarse que el impulso que provoca es positivo (área bajo la curva sobre el eje x) en el intervalo t_i ≤ t ≤ t_m, y negativo en el intervalo t_m ≤ t ≤ t_f, con base en la gráfica mostrada a continuación:



Dado que tanto la velocidad inicial como la final son nulas, entonces el impulso de Res_x en el intervalo $t_i \leq t \leq t_f$ debe ser cero:

$v_i = 0$

$v_f = 0$

$\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt = m\, v_f - m\, v_i$

$\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt = \frac{50}{g}\,(0) - \frac{50}{g}\,(0)$

$\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt = 0$

Este último impulso puede dividirse de la siguiente manera:

$\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt = \int_{t_i}^{t_m} \mathrm{Res}_x \, dt + \int_{t_m}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt$

donde la primera integral del miembro derecho es el área bajo la curva del triángulo cuya base es igual a t_m - t_i, con una altura igual a 20 N, y la segunda integral es la suma de las áreas bajo la curva de un triángulo cuya base mide 6 - t_m con una altura de -10 N y un rectángulo con base de t_f - 6 y la misma altura de -10 N. Primero, se procede a calcular el valor de t_m, con base en el mismo teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes:

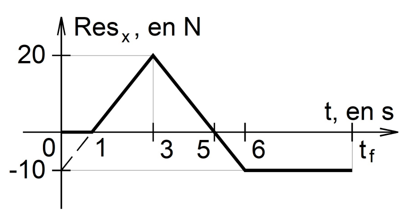
$\frac{t_m - 3}{20 - 0} = \frac{6-3}{20-(-10)}$

$\frac{t_m - 3}{20} = \frac{3}{30}$

$t_m - 3 = \frac{3\,(20)}{30}$

$t_m = 2 + 3$

$t_m = 5$ s



Por tanto:

$\int_{t_i}^{t_m} \mathrm{Res}_x \, dt = \frac{1}{2}\,(t_m - t_i)\,(20)$

$\int_{t_i}^{t_m} \mathrm{Res}_x \, dt = \frac{1}{2}\,(5 - 1)\,(20)$

$\int_{t_i}^{t_m} \mathrm{Res}_x \, dt = 4\,(10)$

$\int_{t_i}^{t_m} \mathrm{Res}_x \, dt = 40$ N·s

y:

$\int_{t_m}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt = \frac{1}{2}\,(6 - t_m)\,(-10) + (t_f - 6)\,(-10)$

$\int_{t_m}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt = \frac{1}{2}\,(6 - 5)\,(-10) + (t_f - 6)\,(-10)$

$\int_{t_m}^{t_f} \mathrm{Res}_x \, dt = 1\,(-5) - 10\,t_f + 60$

Dado que la suma de las dos integrales es cero:

$$\int_{t_i}^{t_m} \text{Res}_x \, dt + \int_{t_m}^{t_f} \text{Res}_x \, dt = 0$$

$$40 - 5 - 10\, t_f + 60 = 0$$

$$10\, t_f = 95$$

$$t_f = \frac{95}{10}$$

$$t_f = 9.5 \text{ s}$$

Entonces, el tiempo que se mueve el cuerpo es:

$$t_{\text{mov}} = t_f - t_i$$

$$t_{\text{mov}} = 9.5 - 1$$

$$t_{\text{mov}} = 8.5 \text{ s}$$

El tiempo que se mueve el cuerpo es:

$$t_{\text{mov}} = 8.5 \text{ s.}$$

Luego que se detiene el cuerpo, éste queda en equilibrio por lo que ya no se mueve y la magnitud de la resultante es $\text{Res}_x = 0$. En esta situación, la fuerza de fricción se vuelve nuevamente estática y su magnitud es:

$$\text{Result}_x = \text{magP} - \text{magFr}_s + \frac{7}{25}\, \text{magW}$$

$$0 = 0 - \text{magFr}_s + \frac{7}{25}\,(50)$$

$$\text{magFr}_s = 14 \text{ N.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
magW = 50;
μk = 0.5;
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

```
P = {magP, 0}
Fr = {-magFr, 0}
Nrm = {0, magN}
W = {7/25 magW, -24/25 magW}
```

Cálculo de la fuerza resultante:

```
Res = P + Fr + Nrm + W
```

Segunda ley de Newton:

```
ec1 = Res == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, magN}]
magNSol = magN /. resp1[[1]]
axSol = ax /. resp1[[1]]
magFrk = μk magNSol
```

Componente en x de la fuerza resultante:

```
Resx = (axSol /. magFr → magFrk) m
Pmax = Resx /. magP → 30
Pmin = Resx /. magP → 0
```

Cálculo de ti y tm:

$$ec2 = \frac{ti - 0}{0 - Pmin} == \frac{3 - 0}{Pmax - Pmin}$$

```
resp2 = Solve[ec2]
tiSol = ti /. resp2[[1]]
```

$$ec3 = \frac{tm - 3}{Pmax - 0} == \frac{6 - 3}{Pmax - Pmin}$$

```
resp3 = Solve[ec3]
tmSol = tm /. resp3[[1]]
```

Cálculo de los impulsos y el tiempo final del movimiento:

$$I1 = \frac{1}{2}\,(tmSol - tiSol)\,Pmax$$

$$I2 = \frac{1}{2}\,(6 - tmSol)\,Pmin + (tf - 6)\,Pmin$$

```
ec4 = I1 + I2 == 0
resp4 = Solve[ec4]
tfSol = tf /. resp4[[1]]
```

Cálculo del tiempo que se movió el cuerpo:

```
tmov = tfSol - tiSol
```

Ejercicio 5.3

Problema 15-2, Hibbeler, *Ingeniería Mecánica, Dinámica,* 10^a edición, Pearson, Prentice Hall, p. 215.

Una pelota de 2 lb se lanza en la dirección mostrada con una rapidez inicial $v_A = 18\ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$. Determine el tiempo necesario para que alcance su punto más alto B y la rapidez con que está viajando en B. Use el principio del impulso y momentum para encontrar su solución.

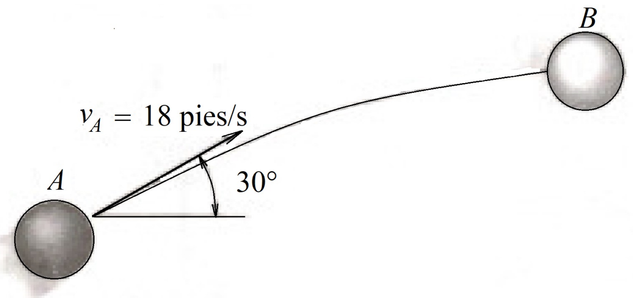
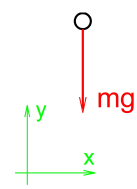


Diagrama de cuerpo libre de la bola ya que está desplazándose de *A* hacia *B*:



Si se aplica el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal, se obtiene lo siguiente:

$$\int_{t_A}^{t_B} \overline{W}\, dt = m\,\overline{v_B} - m\,\overline{v_A}$$

La velocidad inicial en A es:

$$\overline{v_A} = v_A \{\text{Cos}[30°], \text{Sin}[30°]\}$$

$$\overline{v_A} = 18\,\{0.8660, 0.5\}$$

$$\overline{v_A} = \{15.59, 9\}\ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

Como se sabe que en el punto B la bola está en su punto más alto, en él la velocidad solo tiene componente horizontal:

$$\overline{v_B} = \{v_{Bx},\ 0\}$$

Si se considera que el tiempo inicial $t_A = 0$, t_B será el tiempo solicitado. La expresión de impulso y cantidad de movimiento lineal queda:

$$\int_0^{t_B} \{0, -2\}\, dt = \frac{2}{32.2}\{v_{Bx},\ 0\} - \frac{2}{32.2}\{15.59, 9\}$$

$$\{0, -2\,t\}\,]_0^{t_B} = \frac{2}{32.2}\{v_{Bx} - 15.59, -9\}$$

$$\{0, -2\,t_B\} = \frac{2}{32.2}\{v_{Bx} - 15.59, -9\}$$

de donde se establecen dos ecuaciones lineales:

$$0 = \frac{2}{32.2}(v_{Bx} - 15.59)$$

$$-2\,t_B = -\frac{2\,(9)}{32.2}$$

Por tanto:

$$v_{\mathrm{Bx}} - 15.59 = 0$$

$$v_{\mathrm{Bx}} = 15.59\ \frac{\mathrm{ft}}{s}$$

y:

$$t_B = \frac{9}{32.2}$$

$$t_B = 0.2795\ \mathrm{s}$$

El tiempo necesario para que la bola alcance su punto más alto en B, y su rapidez en dicho punto es:

$$t_B = 0.2795\ \mathrm{s}\ \text{y}\ v_{\mathrm{Bx}} = 15.59\ \frac{\mathrm{ft}}{s}.$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
W = 2;
g = 32.2;
magvA = 18;
θ = 30 °;
tA = 0;
```

Vectores representativos de las velocidades inicial, en A, y final, en B:

```
vA = magvA {Cos[θ], Sin[θ]}
vB = {vBx, 0}
```

Planteamiento del principio de impulso y cantidad de movimiento lineal:

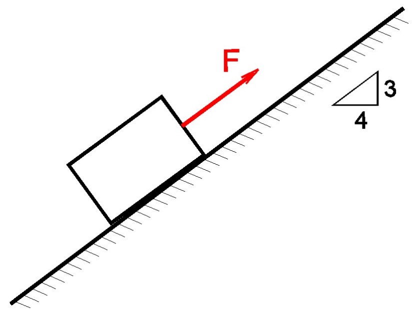
```
ec1 = ∫_tA^tB {0, -2} ⅆt == W/g vB - W/g vA
resp1 = Solve[ec1]
tBSol = tB /. resp1⟦1⟧
vBxSol = vBx /. resp1⟦1⟧ // N
```

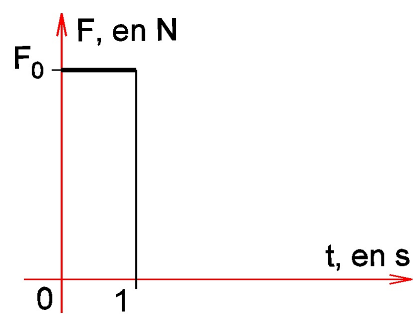
Ejercicio 5.4

Un bloque de 30 N de peso, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza F paralela al plano inclinado y magnitud dada por la gráfica mostrada. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.2, determine:

a) el valor de la ordenada F_0 de la gráfica, para que el bloque se detenga en t = 5 s, antes de iniciar su descenso; y

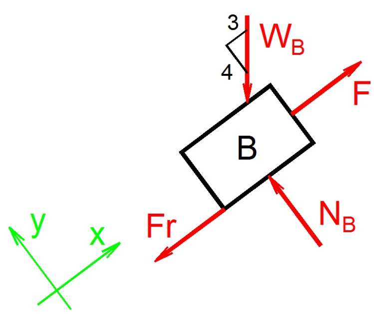
b) la variación de la cantidad de movimiento del bloque en el intervalo [4, 5] s.





Este problema puede ser resuelto con la aplicación del método del impulso y la cantidad de movimiento lineal.

Ante todo, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque; dado que la fuerza aplicada hace que el bloque suba, la fuerza de fricción es hacia abajo:



Posteriormente, se obtiene la representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque:

$\overline{F}$ = {magF, 0}

$\overline{\text{Fr}}$ = {-magFr, 0}

$\overline{N_B}$ = {0, magN$_B$}

$\overline{W_B}$ = magW$_B$ $\left\{-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$

$\overline{W_B}$ = 30 $\left\{-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right\}$

$\overline{W_B}$ = {-18, -24} N

Se establece la segunda ley de Newton y se determina la resultante:

$\overline{F} + \overline{\mathrm{Fr}} + \overline{N_B} + \overline{W_B} = m_B\, \overline{a}$

donde:

$\overline{a} = \{a_{\mathrm{Bx}},\ 0\}$

Por consiguiente:

$\{\mathrm{magF}, 0\} + \{-\mathrm{magFr}, 0\} + \{0, \mathrm{magN}_B\} + \{-18, -24\} = \frac{30}{9.81}\ \{a_{\mathrm{Bx}},\ 0\}$

A partir de la expresión anterior, se determinan las dos ecuaciones escalares siguiente:

$\mathrm{magF} - \mathrm{magFr} - 18 = 3.058\ a_{\mathrm{Bx}}$

$\mathrm{magN}_B - 24 = 0$

Por tanto, de esta última expresión se obtiene:

$\mathrm{magN}_B = 24$

A partir del resultado anterior, se obtiene magFr:

$\mathrm{magFr} = \mu\ \mathrm{magN}_B$

$\mathrm{magFr} = 0.2\ (24)$

$\mathrm{magFr} = 4.8\ \mathrm{N}$

Entonces, la resultante es:

$\mathrm{Res}_x = \mathrm{magF} - 4.8 - 18$

$\mathrm{Res}_x = \mathrm{magF} - 22.8$

Con base en la gráfica de la fuerza aplicada $\overline{F}$, la gráfica de esta resultante se muestra a continuación:

La resultante únicamente existe como se muestra hasta t = 5 s, debido a que en ese instante se pretende que el bloque se detenga, antes de iniciar su descenso.

a) el valor de la ordenada F_0 de la gráfica, para que el bloque se detenga en t = 5 s, antes de iniciar su descenso

Con base en el método de impulso y cantidad de movimiento lineal y la gráfica de la resultate, se puede establecer la siguiente expresión:

$\int_0^5 \mathrm{Res_x}\, dt = m_B\, v_5 - m_B\, v_0$

Dado que la integral se puede obtener con el cálculo del área bajo la curva de la gráfica de Res_x vs. t: y que tanto la rapidez inicial, v_0, como la rapidez en t = 5 s, v_5, son nulos:

$(F_0 - 22.8)\ (1) - (22.8)\ (5 - 1) = 3.058\ (0) - 3.058\ (0)$

$F_0 - 22.8 - (22.8)\ (4) = 0$

$F_0 = 22.8 + 91.2$

$F_0 = 114\ \mathrm{N}$

El valor de la ordenada F_0 para que el bloque se detenga en t = 5 s es:

$F_0 = 114$ N.

b) la variación de la cantidad de movimiento del bloque en el intervalo [4, 5] s

Para calcular la variación de la cantidad de movimiento del bloque en el intervalo 4 ≤ t ≤ 5 s, se requiere obtener la rapidez del mismo en t = 4 s.

Esta rapidez puede obtenerse con el empleo del mismo método de impulso y cantidad de movimiento lineal:

$\int_0^4 \text{Res}_x \, dt = m_B \, v_4 - m_B \, v_0$

$(F_0 - 22.8)\,(1) - (22.8)\,(4 - 1) = 3.058 \, v_4 - 3.058\,(0)$

$114 - 22.8 - (22.8)\,(3) = 3.058 \, v_4$

$3.058 \, v_4 = 91.2 - 67.8$

$v_4 = \frac{23.4}{3.058}$

$v_4 = 7.652 \, \frac{m}{s}$

Por consiguiente, la variación de la cantidad de movimiento solicitada es:

$\Delta\text{CM}_{4\,a\,5} = m_B \, v_5 - m_B \, v_4$

$\Delta\text{CM}_{4\,a\,5} = 3.058\,(0) - 3.058\,(7.652)$

$\Delta\text{CM}_{4\,a\,5} = -23.4 \, \frac{\text{kg}\cdot m}{s}$

La variación de la cantidad de movimiento lineal del bloque en el intervalo $4 \le t \le 5$ s es:

$\Delta\text{CM}_{4\,a\,5} = -23.4 \, \frac{\text{kg}\cdot m}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
magWB = 30;
g = 9.81;
μ = 0.2;
tf = 5;
v0 = 0;
v5 = 0;
mB = magWB / g
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
WB = magWB {-3/5, -4/5}
NB = magNB {0, 1}
Fr = magFr {-1, 0}
F = magF {1, 0}
```

Segunda ley de Newton:

```
ec1 = WB + NB + Fr + F == m {aBx, 0}
resp1 = Solve[ec1, {aBx, magNB}]
magNBsol = magNB /. resp1[[1]]
```

Cálculo de la fuerza resultante:

```
magFr = μ magNBsol
Rx = ec1⟦1⟧⟦1⟧
```

Aplicación método de impulso y cantidad de movimiento lineal:

```
ec2 = (F0 - 22.8) (1) - 22.8 (5 - 1) == mB (v5 - v0)
resp2 = Solve[ec2]
F0sol = F0 /. resp2⟦1⟧
```

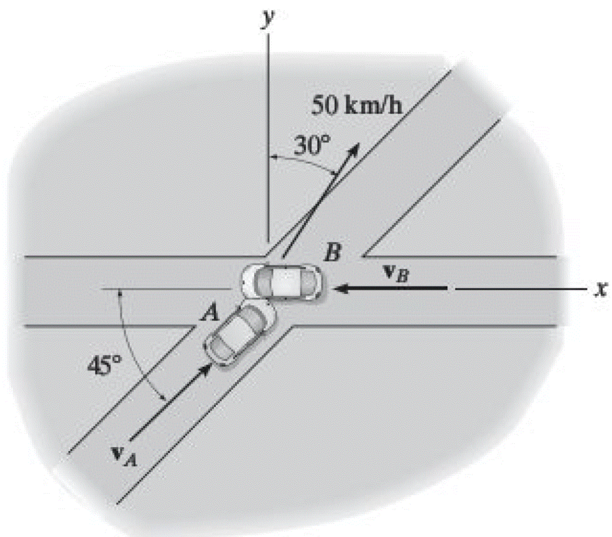
Cálculo variación de la cantidad de movimiento lineal del bloque en el intervalo [4, 5] s:

```
ec3 = (F0sol - 22.8) (1) - 22.8 (4 - 1) == mB (v4 - v0)
resp3 = Solve[ec3]
v4sol = v4 /. resp3⟦1⟧
ΔCM4a5 = mB (v5 - v4sol)
```

Ejercicio 5.5

Problema 15-39, Hibbeler, *Ingeniería Mecánica, Dinámica,* 12ª edición, Pearson, Prentice Hall, p. 245.

Dos automóviles ***A*** y ***B***, tienen una masa de 2000 kg y 1500 kg, respectivamente. Determine las magnitudes de $\boldsymbol{v_A}$ y $\boldsymbol{v_B}$ si los automóviles chocan y permanecen en contacto mientras se desplazan con una velocidad común de 50 km/h en la dirección mostrada.



Si se considera que los automóviles no están sujetos a ninguna fuerza externa, ni antes ni después del choque, puede aplicarse el principio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal y, por consiguiente, se debe cumplir la igualdad de la cantidad de movimiento lineal de ambos automóviles, tanto antes como después del choque:

$$m_A\,\overline{v_{A,1}} + m_B\,\overline{v_{B,1}} = (m_A + m_B)\,\overline{v_{AB,2}}$$

donde $\overline{v_{AB,2}}$ es la velocidad de ambos automóviles que permanecen en contacto después del choque.

Entonces, sólo se requiere obtener la representación vectorial de las velocidades incluidas en la expresión anterior:

$$\overline{v_{A,1}} = \text{magv}_A\,\{\text{Cos}\,[45°],\,\text{Sin}\,[45°]\}$$

$$\overline{v_{A,1}} = \{0.7071\,\text{magv}_A,\,0.7071\,\text{magv}_A\}$$

$$\overline{v_{B,1}} = \text{magv}_B\,\{-1,\,0\}$$

$$\overline{v_{B,1}} = \{-\text{magv}_B,\,0\}$$

$$\overline{v_{AB,2}} = \text{magv}_{AB}\,\{\text{Sin}\,[30°],\,\text{Cos}\,[30°]\}$$

La magnitud de la velocidad de A se convierte a $\frac{m}{s}$:

$$50\,\frac{\text{km}}{h} \times \frac{1000\,m}{1\,\text{km}} \times \frac{1\,h}{3600\,s} = 13.89\,\frac{m}{s}$$

$$\overline{v_{AB,2}} = 13.89\,\{0.5,\,0.866\}$$

$$\overline{v_{AB,2}} = \{6.944,\,12.03\}\,\frac{m}{s}$$

Luego de sustituir los vectores anteriores en la expresión de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, se obtiene:

$2000\,\{0.7071\,magv_A, 0.7071\,magv_A\} + 1500\,\{-magv_B, 0\} = (2000 + 1500)\,\{6.944, 12.03\}$

$\{1414.2\,magv_A, 1414.2\,magv_A\} + \{-1500\,magv_B, 0\} = 3500\,\{6.944, 12.03\}$

$\{1414.2\,magv_A - 1500\,magv_B, 1414.2\,magv_A\} = \{24{,}306, 42{,}098\}$

A partir de la ecuación vectorial anterior, se pueden obtener dos ecuaciones escalares:

$1414.2\,magv_A - 1500\,magv_B = 24{,}306$

$1414.2\,magv_A = 42{,}098$

De la segunda ecuación se obtiene:

$magv_A = \frac{42{,}098}{1414.2}$

$magv_A = 29.77\,\frac{m}{s}$

Finalmente, se sustituye el valor anterior en la primera ecuación:

$1414.2\,(29.77) - 1500\,magv_B = 24{,}306$

$1500\,magv_B = 42{,}098 - 24{,}306$

$magv_B = \frac{17{,}792}{1500}$

$magv_B = 11.86\,\frac{m}{s}$

Las magnitudes de las velocidades de los automóviles A y B son:

$magv_A = 29.77\,\frac{m}{s}$ y $magv_B = 11.86\,\frac{m}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
mA = 2000;
mB = 1500;
vABkmh = 50;
```

Representación vectorial de las velocidades:

```
vA = magvA {Cos[45 °], Sin[45 °]}
vB = magvB {-1, 0}
vABms = vABkmh * 1000/1 * 1/3600
vAB = vABms {Sin[30 °], Cos[30 °]}
```

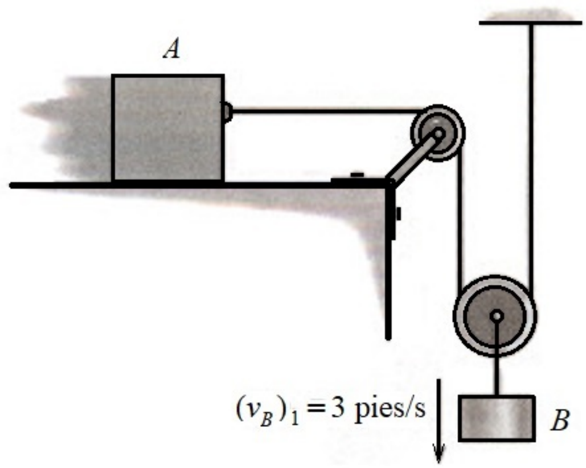
Aplicación del principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal:

```
ec = mA vA + mB vB == (mA + mB) vAB // N
resp = Solve[ec]
magvASol = magvA /. resp⟦1⟧ // N
magvBSol = magvB /. resp⟦1⟧ // N
```

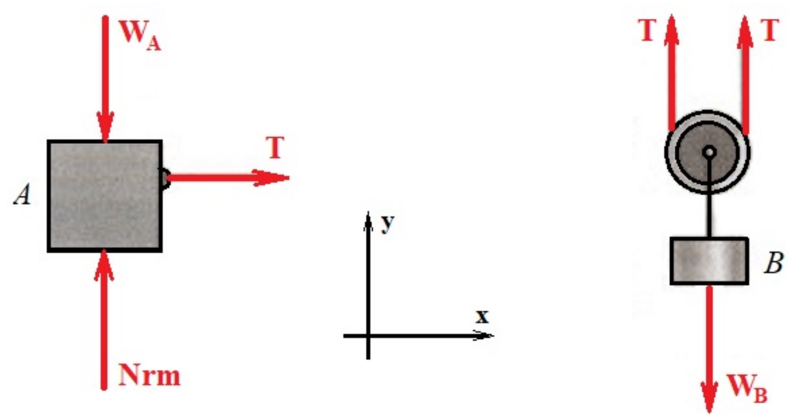
Ejercicio 5.6

Problema 15-23, Hibbeler, *Ingeniería Mecánica, Dinámica,* 10^a edición, Pearson, Prentice Hall, p. 199.

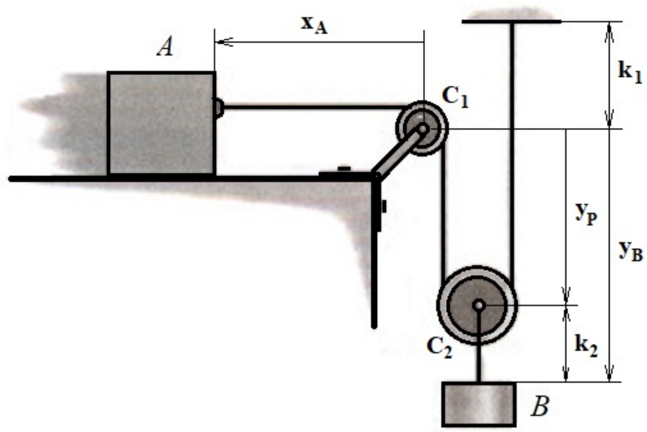
El bloque A pesa 10 lb y el bloque B, 3 lb. Si B se mueve hacia abajo con una velocidad $(v_B)_1 = 3\ \frac{\text{ft}}{s}$ en t = 0, determine la velocidad de A cuando t = 1 s. Suponga que el plano horizontal es liso. Desprecie la masa de las poleas y la cuerda.



Primero, se dibujan los diagramas de cuerpo libre de los bloques *A* y *B*, este último incluyendo a la polea móvil, con objeto de facilitar el análisis, dado que la masa de dicha polea es despreciable:



Se determina la relación cinemática entre los bloques, con base en el cálculo de la longitud de la cuerda:



$L = x_A + C_1 + y_P + C_2 + y_P + k_1$

$k_2 = y_B - y_P$

Luego, se obtiene su derivada con respecto al tiempo:

$0 = v_A + 0 + v_P + 0 + v_P + 0$

$0 = v_B - v_P$

de donde:

$v_A = -2\ v_P$

$v_B = v_P$

Por tanto:

$v_A = -2\ v_B$

Dado que la rapidez inicial del bloque B es:

$v_{B,1} = -3\ \frac{\text{ft}}{s}$ (hacia abajo)

el bloque A tendrá una rapidez inicial:

$v_{A,1} = -2\ (-3)$

$v_{A,1} = 6\ \frac{\text{ft}}{s}$ (hacia la derecha)

Dado que para el bloque A, las magnitudes de la normal, Nrm, y el peso del bloque, W_A, tienen el mismo valor, la resultante es igual a la fuerza de tensión, T, que es constante. Entonces, con base en el principio de impulso y cantidad de movimiento lineal se obtiene que:

$\int_{t_1}^{t_2} \text{T}\ d\text{t} = m_A\ v_{A,2} - m_A\ v_{A,1}$

$\int_{t_1}^{t_2} (2\ \text{T} - \text{W}_\text{B})\ d\text{t} = m_B\ v_{B,2} - m_B\ v_{B,1}$

Como:

$t_1 = 0$ s

$t_2 = 1$ s

$(\text{T})\ \text{t}\,\big]_0^1 = \frac{10}{32.2}\ v_{A,2} - \frac{10}{32.2}\ (6)$

$\text{T} = 0.3106\ v_{A,2} - 1.863$

$(2\ \text{T} - 3)\ \text{t}\,\big]_0^1 = \frac{3}{32.2}\ v_{B,2} - \frac{3}{32.2}\ (-3)$

$2\ \text{T} - 3 = 0.09317\ v_{B,2} + 0.2795$

dado que:

$v_{A,2} = -2\, v_{B,2}$

$v_{B,2} = -\frac{1}{2}\, v_{A,2}$

entonces:

$2\,T - 3 = 0.09317 \left(-\frac{1}{2}\, v_{A,2}\right) + 0.2795$

Se multiplica por (-2) la primera ecuación y se le suma a esta última:

$-2\,T = -0.6211\, v_{A,2} + 3.727$

$2\,T - 3 = -0.04658\, v_{A,2} + 0.2795 \quad +$

____

$0 - 3 = -0.6677\, v_{A,2} + 4.006$

$0.6677\, v_{A,2} = 4.006 + 3$

$v_{A,2} = \frac{7.006}{0.6677}$

$v_{A,2} = 10.49\, \frac{\text{ft}}{s}$

La velocidad del bloque A cuando $t_2 = 1$ s es:

$v_{A,2} = 10.49\, \frac{\text{ft}}{s}$.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
WA = 10;
WB = 3;
g = 32.2;
vB1 = -3;
t1 = 0;
t2 = 1;
```

Relación cinemática:

```
L = xA + C1 + yP + C2 + yP + k1
k2 = yB - yP
```

Derivadas con respecto al tiempo de las expresiones anteriores:

```
ec1 = 0 == vA + 0 + vP + 0 + vP + 0
ec2 = 0 == vB - vP
resp1 = Solve[{ec1, ec2}, {vA, vP}]
vASol = vA /. resp1[[1]]
vA1 = vASol /. vB → vB1
```

Aplicación del principio de impulso y cantidad de movimiento lineal:

$$ec3 = \int_{t1}^{t2} T\, dt == \frac{WA}{g}\, vA2 - \frac{WA}{g}\, vA1$$

$$ec4 = \int_{t1}^{t2} (2\, T - WB)\, dt == \frac{WB}{g}\, vB2 - \frac{WB}{g}\, vB1$$

```
ec5 = vA2 == vASol /. vB → vB2
resp5 = Solve[ec5, vB2]
vB2Sol = vB2 /. resp5[[1]]
resp4 = Solve[{ec3, (ec4 /. vB2 → vB2Sol)}]
vA2Sol = vA2 /. resp4[[1]]
```

Ejercicio 5.7

Problema V.9, Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 71.

El sistema mecánico está formado por dos bloques **A** y **B** de **60** y **80** N de peso, respectivamente, unidos por dos cuerdas flexibles, inextensibles y de masas despreciables que pasan por dos pequeñas poleas, una fija y otra móvil, ambas sin fricción. Si el cuerpo **A** tiene una velocidad inicial $v_{A,0}$ y

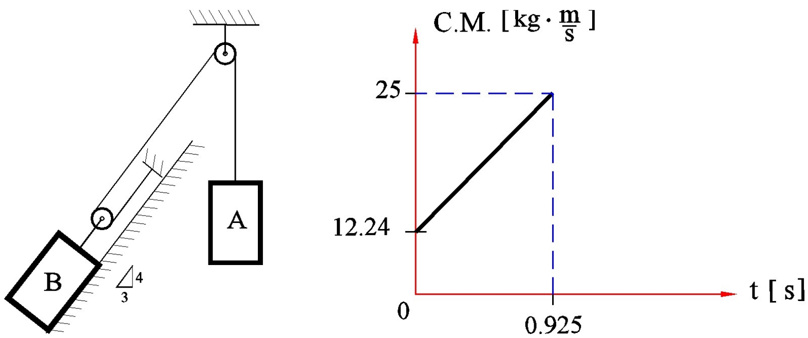
el comportamiento que tiene su cantidad de movimiento se muestra en el gráfico adjunto, obtenga:

a) la velocidad inicial del bloque **A**,

b) la velocidad del bloque **B** en t = 0.5 s,

c) la fuerza de tensión en la cuerda que sostiene a **B**, y

d) el coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque **B**.



En el eje vertical de la gráfica anterior, C.M. indica cantidad de movimiento lineal.

a) la velocidad inicial del bloque A

Para obtener la velocidad inicial del bloque A, se puede emplear el dato de su cantidad de movimiento para t = 0, con base en la definición de cantidad de movimiento lineal:

$$\text{magCM}_0 = 12.24\ \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$$

$$\text{magCM}_0 = m_A\, v_{A,0}$$

$$12.24 = \frac{\text{magW}_A}{g}\, v_{A,0}$$

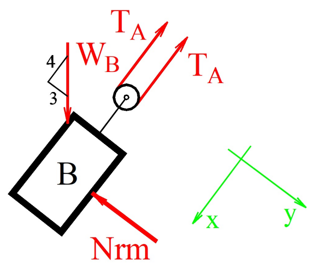
$$\frac{\text{magW}_A}{g}\, v_{A,0} = 12.24$$

$$v_{A,0} = \frac{12.24\,(9.81)}{60}$$

$$v_{A,0} = 2.001\ \frac{m}{s}$$

Dado que la gráfica de la cantidad de movimiento lineal del bloque A es creciente, implica que su rapidez aumenta con respecto al tiempo.

Si el bloque B estuviera en reposo y no hubiera fricción entre él y el plano inclinado, la fuerza de tensión en la cuerda que sostiene a A puede calcularse con base en el siguiente diagrama de cuerpo libre:



Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque B:

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, -\text{magN}\}$

$\overline{T_A} = \{-\text{magT}_A,\ 0\}$

$\overline{W_B} = \text{magW}_B \left\{\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right\}$

$\overline{W_B} = 80 \left\{\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right\}$

$\overline{W_B} = \{64, 48\}$ N

Entonces, suponiendo que está estático:

$\overline{\text{Nrm}} + 2\,\overline{T_A} + \overline{W_B} = \overline{0}$

$\{64 - 2\ \text{magT}_A,\ 48 - \text{magN}\} = \{0, 0\}$

$64 - 2\ \text{magT}_A = 0$

$2\ \text{magT}_A = 64$

$\text{magT}_A = 32$ N

Dado que dicha tensión es menor que el peso del bloque A, éste incrementará su rapidez hacia abajo, por lo que se concluye que el bloque A está moviéndose hacia abajo.

La velocidad inicial del bloque A es:

$v_{A,0} = 2.001\ \frac{m}{s}$, hacia abajo.

b) la velocidad del bloque B en t = 0.5 s

Con base en la misma gráfica de cantidad de movimiento lineal de A, puede determinarse la rapidez de este bloque y, con base en el resultado y la obtención de la relación cinemática de ambos bloques,
se puede determinar la rapidez del bloque B el cual, con base en el resultado del inciso a), dicho bloque se mueve hacia arriba.

Primero, se obtiene la ecuación de la recta que representa la variación de la cantidad de movimiento lineal de A:

$\text{CM}_A - 12.24 = \frac{25 - 12.24}{0.925 - 0}\ (t - 0)$

$\text{CM}_A = 13.79\ t + 12.24$

Por consiguiente, para $t_1 = 0.5$ s:

$\text{CM}_{A,1} = 13.79\ (0.5) + 12.24$

$\text{CM}_{A,1} = 6.897 + 12.24$

$\text{CM}_{A,1} = 19.14\ \text{kg} \cdot \frac{m}{s}$

Entonces, la rapidez de A en ese instante es:

$CM_{A,1} = m_A\, v_{A,1}$

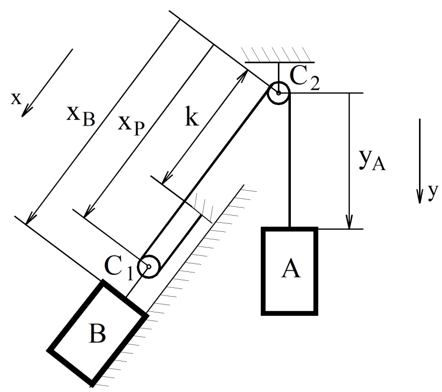
$19.14 = \frac{magW_A}{g}\, v_{A,1}$

$\frac{magW_A}{g}\, v_{A,1} = 19.14$

$v_{A,1} = \frac{19.14\,(9.81)}{60}$

$v_{A,1} = 3.129\, \frac{m}{s}$

Para obtener la relación cinemática de los bloques A y B, se dibuja el siguiente diagrama, con base en el que puede calcularse la longitud de las cuerdas (observe que para este tipo de diagramas, los ejes de referencia siempre tienen la dirección -sentido- de la polea fija hacia los cuerpos):



La longitud de la cuerda constante, L_1, que une al bloque B con la polea móvil:

$L_1 = x_B - x_P$

Su derivada con respecto al tiempo es:

$0 = v_B - v_P$

$v_P = v_B$

La longitud de la cuerda constante, L_2, que une al bloque A con la polea móvil y el punto fijo:

$L_2 = y_A + C_2 + x_P + C_1 + (x_P - \text{k})$

donde C_2, C_1 y k son constantes.

Su derivada con respecto al tiempo es:

$0 = v_A + 0 + v_P + 0 + v_P - 0$

de donde:

$v_A = -2\, v_P$

por consiguiente:

$v_A = -2\, v_B$

Con base en la relación cinemática anterior, se puede determinar la rapidez de B en t_1 = 0.5 s:

$v_{A,1} = -2\, v_{B,1}$

$3.129 = -2\, v_{B,1}$

$-2\, v_{B,1} = 3.129$

$v_{B,1} = \frac{3.129}{-2}$

$v_{B,1} = -1.564\, \frac{m}{s}$

El signo negativo se interpreta como que el bloque B va subiendo, es decir, en sentido contrario del eje de referencia mencionado para el diagrama anterior.

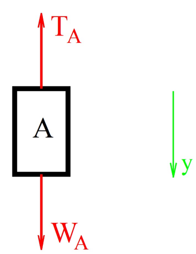
La velocidad del bloque B en t_1 = 0.5 s es:

$v_{B,1} = 1.564\, \frac{m}{s}$, hacia arriba del plano inclinado.

c) la fuerza de tensión en la cuerda que sostiene a B

En este caso, también conviene determinar la fuerza de tensión en la cuerda que sostiene a A, debido a que se cuenta con la información de su cantidad de movimiento y, a partir del resultado, obtener la fuerza de tensión solicitada.

El diagrama de cuerpo libre del bloque A es el siguiente:



La resultante de las fuerzas aplicadas a A es:

$magRes_A = magW_A - magT_A$

Con base en el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal, de t_0 a t_1, se obtiene la siguiente expresión:

$\int_{t_0}^{t_1} magRes_A\, dt = m_A\, v_{A,1} - m_A\, v_{A,0}$

$\int_{t_0}^{t_1} (magW_A - magT_A)\, dt = m_A\, (v_{A,1} - v_{A,0})$

sustituyendo los valores conocidos y dado que tanto el peso como la tensión son constantes:

$(60 - magT_A)\, t\,]_0^{0.5} = \frac{60}{9.81}\, (3.129 - 2.001)$

$(60 - magT_A)\, (0.5) = \frac{60}{9.81}\, (1.128)$

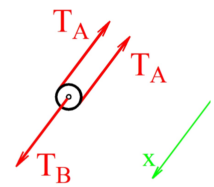
$30 - 0.5\, magT_A = 6.898$

$0.5\, magT_A = 30 - 6.898$

$magT_A = \frac{23.10}{0.5}$

$magT_A = 46.21$ N

Con objeto de relacionar las tensiones de ambas cuerdas, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la polea móvil, que tiene masa despreciable:



Con base en la segunda ley de Newton:

$\text{magRes}_P = m_P\, a_P$

$\text{magT}_B - 2\ \text{magT}_A = 0\ \text{mag}a_P$

$\text{magT}_B = 2\ \text{magT}_A$

$\text{magT}_B = 2\ (46.21)$

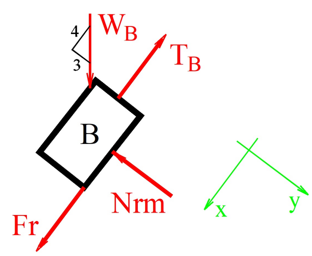
$\text{magT}_B = 92.41$ N

La fuerza de tensión de la cuerda que sostiene a B es:

$\text{magT}_B = 92.41$ N.

d) el coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque B

Para calcular el coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque B, solo se requiere emplear el principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal, ahora para B.
Para ello, se requiere previamente trazar su diagrama de cuerpo libre:



Representación vectorial de las fuerzas que actúan sobre el bloque B:

$\overline{T_B} = \{-\text{magT}_B, 0\}$

$\overline{\text{Fr}} = \{\text{magFr}, 0\}$

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, -\text{magN}\}$

$\overline{W_B} = 80\left\{-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

$\overline{W_B} = \{64, 48\}$ N

Entonces, la resultante de fuerzas es:

$\overline{\text{Res}_B} = \overline{T_B} + \overline{\text{Fr}} + \overline{\text{Nrm}} + \overline{W_B}$

$\overline{\text{Res}_B} = \{\text{magFr} + 64 - \text{magT}_B, 48 - \text{magN}\}$

Dado que la componente de la aceleración en y es nula, la magnitud de la resultante es solo su componente en x:

$\text{magRes}_B = \text{magFr} + 64 - \text{magT}_B$

Dado que se conoce la magnitud de la normal:

$\text{magN} = 48$ N

La magnitud de la fuerza de fricción cinética se puede establecer en función del coeficiente de fricción cinética entre el bloque B y el plano inclinado:

$\text{magFr} = \mu_k \ \text{magN}$

$\text{magFr} = 48\ \mu_k$

Por consiguiente:

$\text{magRes}_B = 48\ \mu_k + 64 - 92.38$

$\text{magRes}_B = 48\ \mu_k - 28.38$

Se establece la expresión para el impulso y la cantidad de movimiento lineal B, de t_0 a t_1:

$\int_{t_0}^{t_1} \text{magRes}\, dt = m_B\, v_{B,1} - m_B\, v_{B,0}$

Con base en la relación cinemética, se puede calcular la rapidez de B en $t_0 = 0$:

$v_{A.0} = 2\ \frac{m}{s}$

$v_{A,0} = -2\ v_{B,0}$

$v_{B,0} = -\frac{1}{2}\ v_{A,0}$

$v_{B,0} = -\frac{1}{2}\ (2)$

$v_{B,0} = -1\ \frac{m}{s}$

Luego de sustituir los valores conocidos, y dado que la magnitud de la resultante es constante:

$\text{magRes}_B\ t\,]_0^{0.5} = \frac{80}{9.81}\ [-1.565 - (-1)]$

$(48\ \mu_k - 28.38)\ (0.5) = \frac{80}{9.81}\ (-0.5648)$

$24\ \mu_k - 14.19 = -4.606$

$24\ \mu_k = 14.19 - 4.606$

$\mu_k = \frac{9.585}{24}$

$\mu_k = 0.4$

El coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque B es:

$\mu_k = 0.4.$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos :

```
magWA = 60;
magWB = 80;
g = 9.81;
t0 = 0;
t1 = 0.5;
Δx = 3;
Δy = 4;
CM0 = 12.24;
CM2 = 25;
t2 = 0.925;
```

a) la velocidad inicial del bloque A

```
ec1 = CM0 == (magWA/g) vA0
resp1 = Solve[ec1]
vA0Sol = vA0 /. resp1[[1]]
```

Verificación de la dirección de movimiento del bloque A:

```
Nrm = {0, -magN}
TA = {-magTA, 0}
hip = Sqrt[Δx^2 + Δy^2]
WB = magWB {Δy/hip, Δx/hip}
ec2 = Nrm + 2 TA + WB == {0, 0}
resp2 = Solve[ec2]
magTA0Sol = magTA /. resp2[[1]]
```

b) la velocidad del bloque B en t = 0.5 s

Ecuación de la cantidad de movimiento de A:

```
ec3 = CM - CM0 == (CM2 - CM0)/(t2 - t0) (t - t0)
resp3 = Solve[ec3, CM]
CMSol = CM /. resp3[[1]]
CM1 = CMSol /. t → t1
ec4 = CM1 == (magWA/g) vA1
resp4 = Solve[ec4]
vA1Sol = vA1 /. resp4[[1]]
```

Relación cinemática:

```
L1 = xB - xP
L2 = yA + C2 + yP + C1 + (yP - k)
```

Derivadas con respecto al tiempo de las expresiones anteriores:

```
ec5 = 0 == vB - vP
ec6 = 0 == vA + 0 + vP + 0 + vP - 0
resp6 = Solve[{ec5, ec6}, {vA, vP}]
vASol = vA /. resp6[[1]]
```

Cálculo de la rapidez del bloque B en t_1 = 0.5 s:

```
ec7 = vA1Sol == vASol
resp7 = Solve[ec7]
vB1Sol = vB /. resp7⟦1⟧
```

c) la fuerza de tensión en la cuerda que sostiene a B

Fuerza de tensión de la cuerda que sujeta al bloque A:

```
magResA = magWA - magTA
```

$$ec8 = \int_{t0}^{t1} magResA\, dt == \frac{magWA}{g} vA1Sol - \frac{magWA}{g} vA0Sol$$

```
resp8 = Solve[ec8]
magTASol = magTA /. resp8⟦1⟧
```

Fuerza de tensión de la cuerda que sujeta al bloque B:

```
ResP = magTB - 2 magTASol
ec8 = ResP == 0
resp8 = Solve[ec8]
magTBSol = magTB /. resp8⟦1⟧
```

d) el coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque B

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en B:

```
TB = {-magTBSol, 0}
Fr = {magFr, 0}
Nrm = {0, -magN}
```

$$WB = magWB \left\{\frac{\Delta y}{hip}, \frac{\Delta x}{hip}\right\}$$

Aplicación segunda ley de Newton:

```
ResB = TB + Fr + Nrm + WB
```

$$ec9 = ResB == \frac{magWB}{g} \{aBx, 0\}$$

```
resp9 = Solve[ec9, {aBx, magN}]
magNSol = magN /. resp9⟦1⟧
magFrSol = μk magNSol
magResB = ResB⟦1⟧ /. magFr → magFrSol
```

Rapidez inicial del bloque B:

```
ec10 = vA0Sol == vASol
resp10 = Solve[ec10]
vB0Sol = vB /. resp10[[1]]
```

Aplicación principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal:

$$ec11 = \int_{t0}^{t1} magResB\, dt == \frac{magWB}{g}\, vB1Sol - \frac{magWB}{g}\, vB0Sol$$

```
resp11 = Solve[ec11]
μkSol = μk /. resp11[[1]]
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Mecánica
Agosto de 2022

Yukihiro Minami Koyama
Gloria Ramírez Romero