FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

ACADEMIA DE MECÁNICA

Cuaderno de ejercicios resueltos

Tema 6:

Trabajo y energía de la partícula

Elaborado por:

Dra. Gloria Ramírez Romero

M.I Yukihiro Minami Koyama

Todos los derechos reservados. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México © 2022. Queda estrictamente prohibidos su uso fuera del ámbito académico, alteración, descarga, difusión o divulgación por cualquier medio, así como su reproducción parcial o total.

Cuaderno de ejercicios resueltos de Mecánica

Tema 6
Trabajo y energía de la partícula

Ejercicio 6.1

Deduzca, a partir de la segunda ley de Newton, la expresión para obtener la diferencial de trabajo que desarrolla una fuerza, así como la ecuación del trabajo y la energía.
Posteriormente, obtenga las expresiones para determinar el trabajo generado por las siguientes fuerzas, de una posición 1 a otra posición 2:

a) fuerza constante
b) fuerza de fricción cinética
c) fuerza normal
d) peso
e) fuerza restauradora lineal (generada por un resorte ideal).

Deducción de la expresión para obtener la diferencial de trabajo que desarrolla una fuerza

A partir de la segunda ley de Newton:

$\overline{F} = \mathrm{m}\,\overline{a}$

Se posmultiplica escalarmente a ambos miembros el vector $d\overline{r}$:

$\overline{F} \cdot d\overline{r} = \mathrm{m}\,\overline{a} \cdot d\overline{r}$

Considerando que la aceleración tiene componentes tangencial y normal, y que el vector $d\overline{r}$ es:

$d\overline{r} = \{d\mathrm{s}, 0\}$

$\overline{F} \cdot d\overline{r} = \mathrm{m}\,\{a_T,\ a_N\} \cdot \{d\mathrm{s}, 0\}$

$\overline{F} \cdot d\overline{r} = \mathrm{m}\,a_T\,d\mathrm{s}$

Por otro lado, la aceleración tangencial es igual a:

$a_T = \mathrm{v}\,\frac{d\mathrm{v}}{d\mathrm{s}}$

Se obtiene que:

$\overline{F} \cdot d\overline{r} = \mathrm{m}\,\mathrm{v}\,\frac{d\mathrm{v}}{d\mathrm{s}}\,d\mathrm{s}$

$\overline{F} \cdot d\overline{r} = \mathrm{m}\,\mathrm{v}\,d\mathrm{v}$

Se define como diferencial del trabajo, $d\mathrm{U}$, desarrollado por la fuerza $\overline{F}$ a:

$d\mathrm{U} = \overline{F} \cdot d\overline{r}$

Entonces, por definición, la diferencial del trabajo desarrollado por la fuerza $\overline{F}$ es:

$d\mathrm{U} = \mathrm{m}\,\mathrm{v}\,d\mathrm{v}$

Ecuación del trabajo y la energía

Si se integran ambos miembros de la última expresión, de la posición $\overline{r_1}$, para la cual la rapidez del cuerpo en estudio es v_1, a la posición $\overline{r_2}$, en donde tiene una rapidez v_2:

$$\int_{\overline{r_1}}^{\overline{r_2}} dU = \int_{v_1}^{v_2} m\, v\, dv$$

$$U\,\Big]_{\overline{r_1}}^{\overline{r_2}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2\,\Big]_{v_1}^{v_2}$$

El miembro izquierdo de la ecuación anterior puede escribirse como:

$$U\,\Big]_{\overline{r_1}}^{\overline{r_2}} = U_{1-2}^{F}$$

de manera que:

$$U_{1-2}^{F} = \frac{1}{2}\, m\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_1^2$$

Esta ecuación es conocida como la del trabajo y la energía, debido a que el término $\frac{1}{2}\, m\, v^2$ se le define como la energía cinética que tiene el cuerpo en estudio.

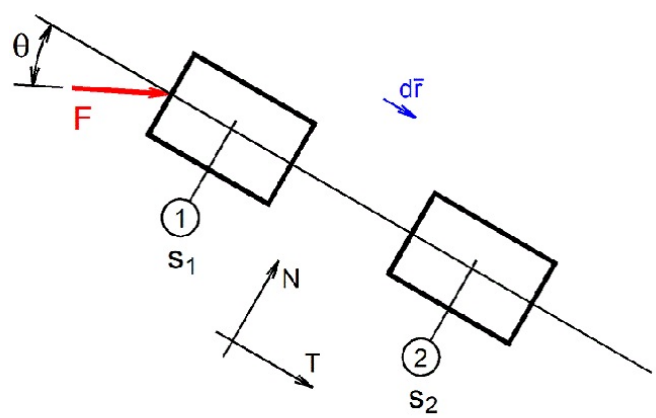
La ecuación anterior se puede leer como sigue:

“El trabajo desarrollado por la fuerza resultante F de todas las fuerzas aplicadas a un cuerpo, de una posición 1 a otra posición 2, U_{1-2}^{F}, es igual al incremento de energía cinética que se produce en dicho cuerpo”.

a) fuerza constante

Una fuerza constante es aquella que tanto su magnitud como su dirección (sentido) no varían con respecto al tiempo. Para este tipo de fuerzas, la trayectoria debe ser rectilínea.

En el siguiente dibujo se muestra un ejemplo de este tipo de fuerza.



A partir de la definición de diferencial de trabajo:

$$dU = \overline{F}\cdot d\overline{r}$$

$$dU = \{F \operatorname{Cos}[\theta],\, F \operatorname{Sin}[\theta]\}\cdot\{ds,\, 0\}$$

$$\int_1^2 dU = \int_{s_1}^{s_2} F \operatorname{Cos}[\theta]\, ds$$

$$U_{1-2}^{F} = F \operatorname{Cos}[\theta]\, s\,\Big]_{s_1}^{s_2}$$

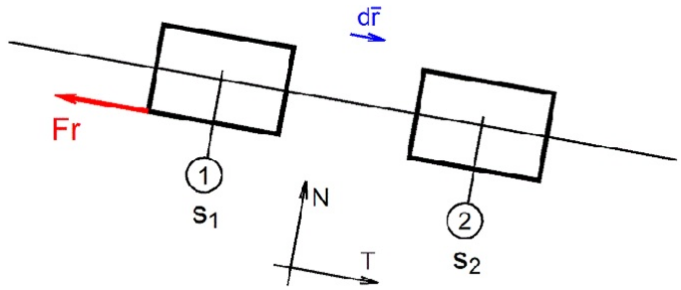
$$U_{1-2}^{F} = F \operatorname{Cos}[\theta]\,(s_2 - s_1)$$

El trabajo que desarrolla una fuerza constante, de 1 a 2 es:

$$U_{1-2}^{F} = F \operatorname{Cos}[\theta]\,(s_2 - s_1).$$

b) fuerza de fricción cinética

Dado que la fuerza de fricción cinética es siempre tangencial a la trayectoria, considerando que es en contra del movimiento del cuerpo, tal como se muestra en el siguiente dibujo:



Dado que el ángulo que forma con la trayectoria es de 180°, a partir de la expresión de la fuerza constante, puede deducirse que:

U_{1-2}^{F} = F Cos [θ] ($s_2 - s_1$)

U_{1-2}^{Fr} = magFr Cos [180°] ($s_2 - s_1$)

U_{1-2}^{Fr} = magFr (-1) ($s_2 - s_1$)

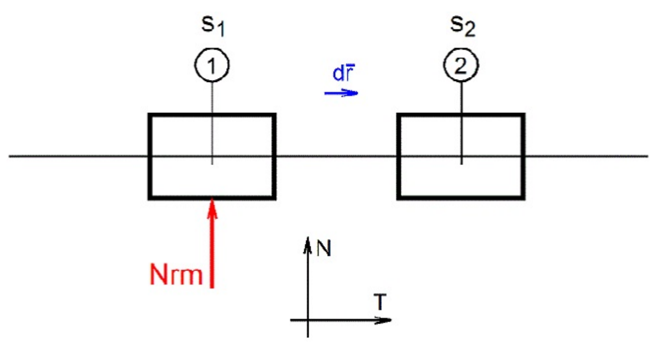
U_{1-2}^{Fr} = -magFr ($s_2 - s_1$)

El trabajo que desarrolla la fuerza de fricción cinética, de 1 a 2 es:

U_{1-2}^{Fr} = −magFr ($s_2 - s_1$).

c) fuerza normal

Por lo regular, la fuerza normal de un cuerpo sobre otro es perpendicular a la trayectoria.



Bajo las condiciones mencionadas, el trabajo que desarrolla de un punto a otro es nulo.

U_{1-2}^{F} = F Cos [θ] ($s_2 - s_1$)

U_{1-2}^{Nrm} = magN Cos [90°] ($s_2 - s_1$)

U_{1-2}^{Nrm} = magN (0) ($s_2 - s_1$)

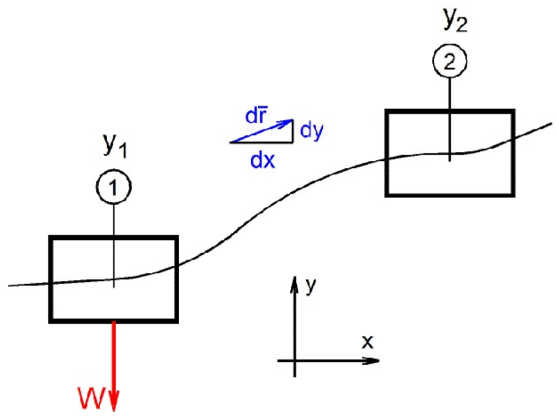
U_{1-2}^{Nrm} = 0

El trabajo que desarrolla la fuerza de normal, de 1 a 2, perpendicular a la trayectoria, es:

U_{1-2}^{Nrm} = 0.

d) peso

La fuerza conocida como peso, producida por la atracción gravitacional de la Tierra sobre el cuerpo, es siempre vertical. Entonces, independientemente de la trayectoria, el trabajo de que desarrolla el peso de una posición 1 a otra posición 2 puede deducirse a partir de la siguiente figura:



Entonces, el trabajo que desarrolla el peso, de la posición 1 a la 2 es:

$d\mathrm{U} = \overline{W} \cdot d\,\overline{r}$

$d\mathrm{U} = \{0, -\mathrm{magW}\} \cdot \{dx, dy\}$

$d\mathrm{U} = -\mathrm{magW}\; dy$

$\int_1^2 d\mathrm{U} = \int_{y_1}^{y_2} -\mathrm{magW}\; dy$

$U_{1-2}^{W} = -\mathrm{magW}\; y\,]_{y_1}^{y_2}$

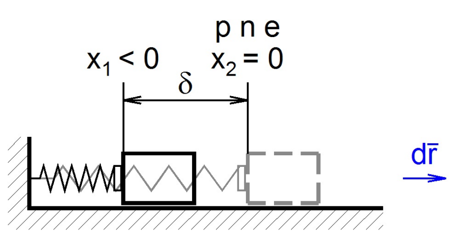
$U_{1-2}^{W} = -\mathrm{magW}\,(y_2 - y_1)$

El trabajo que desarrolla el peso, de 1 a 2, es:

$U_{1-2}^{W} = -\mathrm{magW}\,(y_2 - y_1)$.

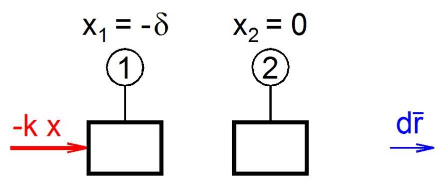
e) fuerza restauradora lineal (generada por un resorte ideal

Si se considera que un resorte ideal en posición horizontal se fija en su extremo izquierdo, y a su lado derecho se coloca un cuerpo y se comprime dicho resorte una distancia δ, tal como se muestra en la figura siguiente:



Al punto natural de equilibrio del resorte se le designa con las siglas pne.

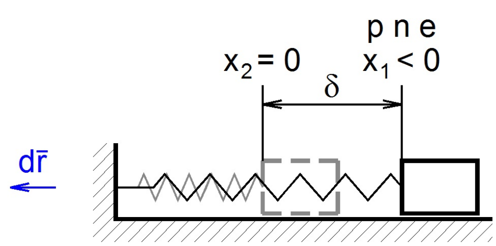
En el siguiente diagrama se ilustra la fuerza ejercida por el resorte, a la que se le denomina fuerza restauradora lineal. Se puede verificar que, si el resorte está comprimido hacia la izquierda, la fuerza que ejerce es hacia la derecha. Dado que se considera que el eje de referencia es positivo hacia la derecha, en este caso la posición x del resorte es negativa, por lo que la magntud de la fuerza del resorte es -k x, de manera que su valor sea positivo.
De otra manera, si el segmento dirigido está orientado a la derecha y el valor de la fuerza fuera negativo, implica que en realidad la fuerza actúa hacia la izquierda.



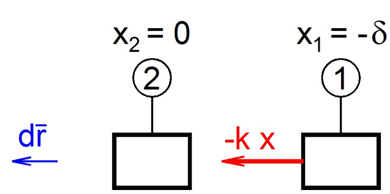
En este caso, la representación vectorial de la fuerza ejercida por el resorte es:

$\overline{F_k}$ = {-kx, 0}

La otra posibilidad es que el mismo resorte ideal en posición horizontal, fijo en su extremo izquierdo con el cuerpo también fijo al resorte del lado derecho, se le extiende una distancia δ, tal como se muestra en la figura siguiente:



Dado que la fuerza ejercida por el resorte es ahora hacia la izquierda, el cuerpo tenderá a moverse en dicho sentido, por lo que conviene que la referencia $\overline{dr}$ apunte también hacia la izquierda. Bajo estas condiciones, el diagrama de cuerpo libre del cuerpo, incluyendo las posiciones de interés, se muestra en seguida:



Para este segundo caso, la representación vectorial de la fuerza ejercida por el resorte resulta ser la misma que el caso anterior:

$\overline{F_k}$ = {-kx, 0}

De donde, el trabajo que desarrolla la fuerza del resorte, de la posición 1 a la posición 2, considerando que esta última es la posición natural de equilibrio del resorte, es:

$dU = \{-kx,\ 0\} \cdot d\,\overline{r}$

$dU = \{-kx,\ 0\} \cdot \{dx,\ 0\}$

$dU = -kx\, dx$

$$\int_1^2 dU = \int_{x_1}^{x_2} - kx \, dx$$

$$U_{1-2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, x^2 \,\Big]_{x_1}^{x_2}$$

$$U_{1-2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, x_2^2 - (-\frac{1}{2}\, k\, x_1^2)$$

$$U_{1-2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, 0^2 + \frac{1}{2}\, k\, \delta^2$$

$$U_{1-2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\, \delta^2$$

Esta expresión se puede generalizar, para una deformación inicial del resorte $x_1 = \delta_1$ y una deformación final $x_2 = \delta_2$, para las cuales la expresión queda:

$$U_{1-2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$$

Finalmente, conviene mencionar que puede demostrarse que esta expresión es válida independientemente de la trayectoria que tenga el cuerpo.

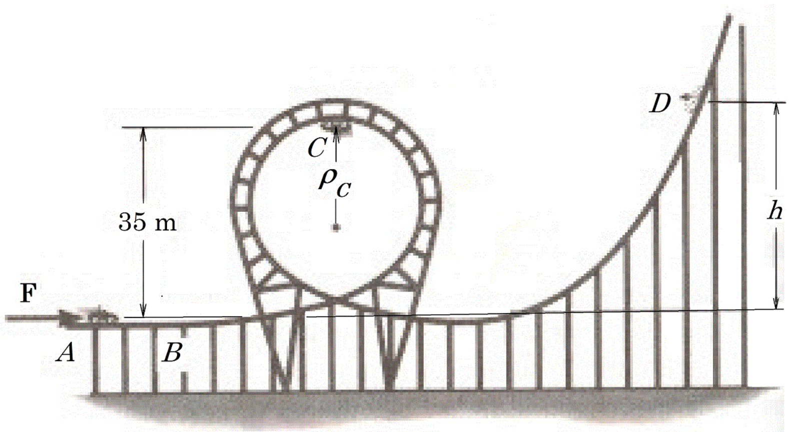
El trabajo que desarrolla la fuerza restauradora lineal es:

$$U_{1-2}^{k} = -\frac{1}{2}\, k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right).$$

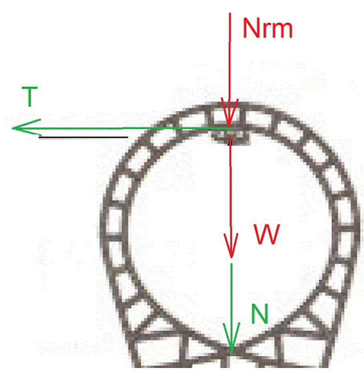
Ejercicio 6.2

Problema 14–15, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 7ª edición, Prentice Hall Hispanoamericana, p. 160.

Determine la altura h en que se encuentra la cúspide de la pendiente *D,* a la que llegará el carro de la montaña rusa de 200 kg, si es lanzado en *B* con una rapidez suficiente para completar la espira *C* sin separarse de la pista. El radio de curvatura en *C* es $\rho_C = 25\ m$.



Para resolver este problema con el empleo del método del trabajo y la energía, primero es necesario obtener la rapidez en el punto C de manera que el carro no se despegue de la pista.
Por consiguiente, se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carro de la montaña rusa en dicho punto:



Representación vectorial de las fuerzas:

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, \text{magN}\}$

$\overline{W} = \{0, \text{magW}\}$

Para que el carro no se separe de la pista:

magN > 0

En el límite cuando está a punto de despegarse, se puede considerar que:

magN = 0

La resultante entonces queda como:

$\overline{R} = \overline{\text{Nrm}} + \overline{W}$

$\overline{R} = \{0, 0\} + \{0, 200\ g\}$

$\overline{R} = \{0, 200\ g\}$

Se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \text{m} \{a_T, a_N\}$

$\{0, 200\ \text{g}\} = \text{m} \{a_T, a_N\}$

$200\ \text{g} = 200\ a_N$

$a_{N,C} = \text{g}$

$a_{N,C} = 9.81\ \frac{m}{s^2}$

La expresión de la aceleración normal es:

$a_{N,c} = \frac{v_C^2}{\rho_C}$

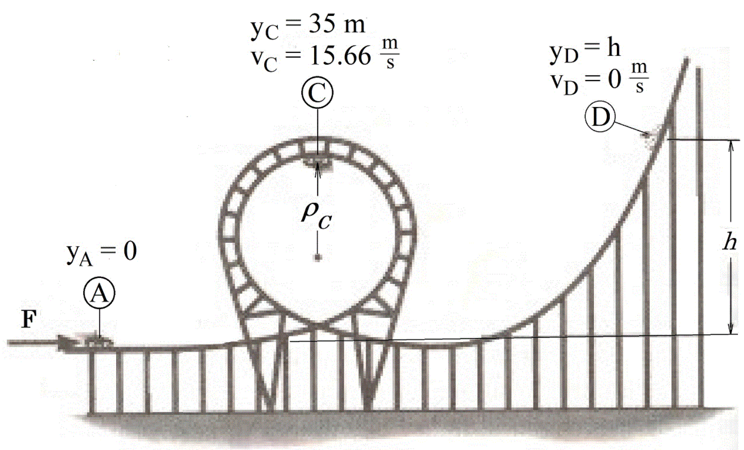
$v_C^2 = \rho_C\ a_{N,C}$

$v_C^2 = 25\ (9.81)$

$v_C = \sqrt{245.3}$

$v_C = 15.66\ \frac{m}{s}$

Se puede verificar que las fuerzas que actúan todo el tiempo sobre el carro de la montaña rusa son el peso, $\overline{W}$, y la fuerza normal, $\overline{\text{Nrm}}$.
Dado que la fuerza normal es siempre perpendicular a la trayectoria, su trabajo es nulo.
Para facilitar el cálculo del trabajo desarrollado por el peso, conviene dibujar el siguiente diagrama de posiciones y parámetros:



Por tanto, aplicando el método del trabajo y la energía:

$U_{C-D}^{W} + U_{C-D}^{\text{Nrm}} = T_D - T_C$

donde T_D y T_C corresponden a la energía cinética del carro en las posiciones C y D.
Luego de sustituir las expresiones de los trabajos del peso y de la normal, así como las de la energía cinética en C y D, se obtiene:

$-\text{magW}\ (y_D - y_C) + 0 = \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_D^2 - \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_C^2$

$y_C = 35\ \text{m}$

$y_D = \text{h}$

$v_D = 0\ \frac{m}{s}$

$-200\ (9.81)\ (\text{h} - 35) = \frac{1}{2}\ (200)\ (0) - \frac{1}{2}\ (200)\ 15.66^2$

Se multiplican ambos miembros por $-\frac{1}{200}$:

$9.81\ h - 35\ (9.81) = \frac{1}{2}\ 245.3$

$9.81\ h = 122.65 + 343.4$

$h = \frac{466.05}{9.81}$

$h = 47.5\ m$

La altura que alcanza el carro bajo las condiciones descritas en el enunciado del problema es:

$h = 47.5\ m.$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 200;
g = 9.81;
ρ = 25;
yC = 35;
```

Vectores que representan las fuerzas:

```
Nrm = {0, magN};
W = {0, m g};
```

Segunda ley de Newton:

```
R = Nrm + W
magN = 0
ec1 = R == m {aT, aN}
resp1 = Solve[ec1]
aNSol = aN /. resp1[[1]]
```

Cálculo de la rapidez en C, vC:

```
ec2 = aNSol == vC^2/ρ
resp2 = Solve[ec2]
vCSol = vC /. resp2[[2]]
```

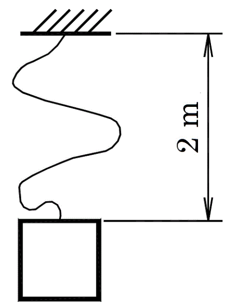
Método del trabajo y la energía, de C a D:

```
UWCaD = -m g {yD - yC}
yD = h
ec3 = UWCaD == 1/2 m vD^2 - 1/2 m vCSol^2
vD = 0
resp3 = Solve[ec3]
vDSol = vD /. resp3[[2]]
```

Ejercicio 6.3

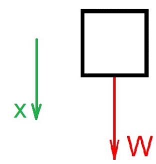
Tomado del Problema resuelto I.2 Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 20.

Un bloque de 5 kg está sujeto a un cable elástico de masa despreciable, con una longitud libre de 5 m y una constante de rigidez de $k = 100\ \frac{N}{m}$, y se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la figura. Determine la tensión máxima que debe soportar el cable.

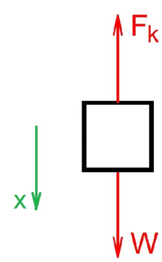


Este problema se puede subdividir en dos intervalos de movimiento: el primero es el de una caída libre, mientras el cable elástico no empiece a actuar; el segundo es cuando el cable elástico inicia su influencia sobre la caída del bloque.

En seguida se muestra el diagrama de cuerpo libre, en el primer intervalo de movimiento.

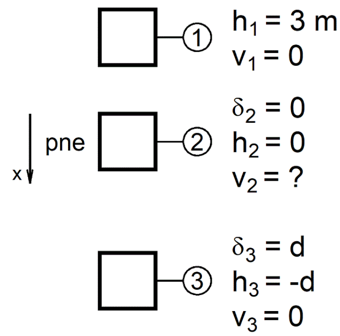


En este caso, el peso es la única fuerza aplicada al bloque y es la que desarrolla el trabajo.
En el caso del segundo intervalo de movimiento, el diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



Es claro que tanto el peso como la fuerza del cable elástico desarrollan trabajo en este intervalo.

Para facilitar el cálculo del trabajo de las fuerzas involucradas, conviene trazar un diagrama de posiciones y parámetros:



El primer intervalo es de la posición 1 a la 2, y el segundo de la 2 a la 3.
Se considera que la altura en el punto natural de equilibrio del cable elástico, pne, en la posición 2 es:

$h_2 = 0$

La altura h_1 puede calcularse con base en que la longitud libre del cable elástico es:

$L_0 = 5$ m

y que la altura a la que inicia el bloque su movimiento es:

h’ = 2 m

medidos desde el techo. Por consiguiente:

$h_1 = L_0$ - h’

$h_1 = 5 - 2$

$h_1 = 3$ m

Por último, si se considera que la posición 3 es la que alcanza el bloque antes de empezar a subir, en dicha posición su rapidez instantánea es nula. Asimismo, si la deformación del resorte en esa posición es d, la altura en dicha posición es:

$h_3 = $ -d

dado que se encuentra a una distancia d debajo de la referencia de altura nula.

El trabajo de las fuerzas involucradas es, entonces:

$U_{1-3}^{W} = \text{-magW}\,(h_3 - h_1)$

$U_{2-3}^{k} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_3^2 - \delta_2^2\right)$

Luego de sustituir los valores conocidos:

$U_{1-3}^{W} = \text{-5}\,(9.81)\,(-d - 3)$

$U_{1-3}^{W} = \text{-49.05}\,(-d - 3)$

$U_{1-3}^{W} = 49.05\text{ d} + 147.15\text{ N·m}$

$U_{2-3}^{k} = -\frac{1}{2}\,(100)\left(d^2 - 0^2\right)$

$U_{2-3}^{k} = -50\,d^2$

Con base en la expresión del trabajo y la energía:

$U_{1-3}^{W} + U_{2-3}^{k} = \frac{1}{2}\text{ m }v_3^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_1^2$

$49.05\,d + 147.15 - 50\,d^2 = \frac{1}{2}\text{ m }0^2 - \frac{1}{2}\,m\,0^2$

$49.05\,d + 147.15 - 50\,d^2 = 0$

Si se divide toda la expresión por -50:

$$d^2 - \frac{49.05}{50}\, d - \frac{147.15}{50} = 0$$

$$d^2 - 0.981\, d - 2.943 = 0$$

Se aplica la fórmula simplificada del "chicharronero", para a = 1:

$$d_{1,2} = \frac{0.981}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0.981}{2}\right)^2 + 2.943}$$

$$d_{1,2} = 0.4905 \pm \sqrt{0.4905^2 + 2.943}$$

$$d_{1,2} = 0.4905 \pm \sqrt{0.24059 + 2.943}$$

$$d_{1,2} = 0.4905 \pm \sqrt{3.1836}$$

$$d_{1,2} = 0.4905 \pm 1.7843$$

Se descarta la solución negativa:

$$d_2 = 2.2748 \text{ m}$$

Por consiguiente, la tensión máxima que debe soportar el cable puede calcularse con base en la ley de Hooke:

$$T_{max} = \text{k}\, d_2$$

$$T_{max} = (100)\,(2.2748)$$

$$T_{max} = 227.48 \text{ N}$$

La tensión máxima que debe soportar el cable elástico es:

$$T_{max} = 227.48 \text{ N.}$$

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 5;
g = 9.81;
L0 = 5;
k = 100;
hp = 2;
```

Posiciones y parámetros:

```
h1 = L0 - hp
v1 = 0;
δ2 = 0;
h2 = 0;
δ3 = d;
h3 = -d;
v3 = 0;
```

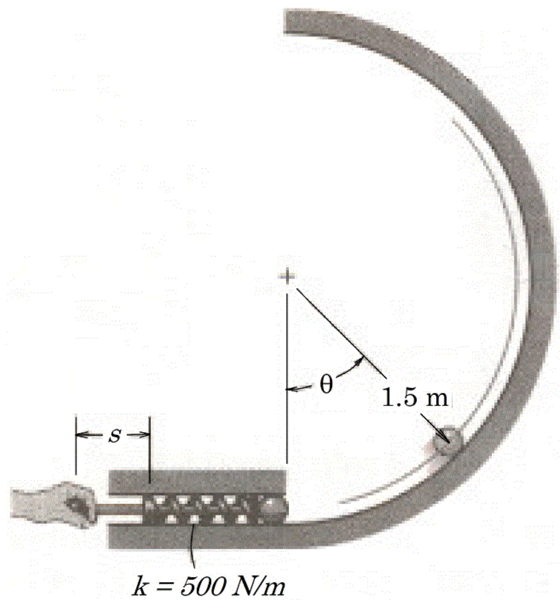
Aplicación del método del trabajo y la energía:

```
UW1a3 = -m g (h3 - h1)
Uk2a3 = -1/2 k (δ3^2 - δ2^2)
ec1 = UW1a3 + Uk2a3 == 1/2 m v3^2 - 1/2 m v1^2
resp1 = Solve[ec1]
dSol = d /. resp1[[2]]
Tmax = k dSol
```

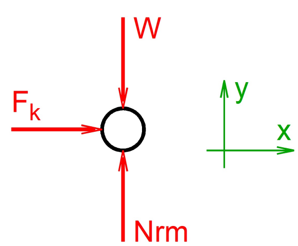
Ejercicio 6.4

Problema 14–11, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 7ª edición, Prentice Hall Hispanoamericana, p. 160.

Una bola, de 0.5 kg y tamaño despreciable, es disparada hacia arriba por una pista circular, utilizando el disparador de resorte. Dicho disparador mantiene comprimido el resorte *0.08 m* cuando $s = 0$. Si se jala el disparador $s = 0.2\ m$ y luego se suelta, determine la rapidez de la bola cuando $\theta = 90°$. También, ¿Cuál es la fuerza normal de la pista ejercida sobre la bola en ese instante?



Primero, se calcula la rapidez con la que la bola sale disparada. Para ello, se traza el diagrama de cuerpo libre de la bola cuando está en contacto con el resorte:



Se aplica el método del trabajo y la energía:

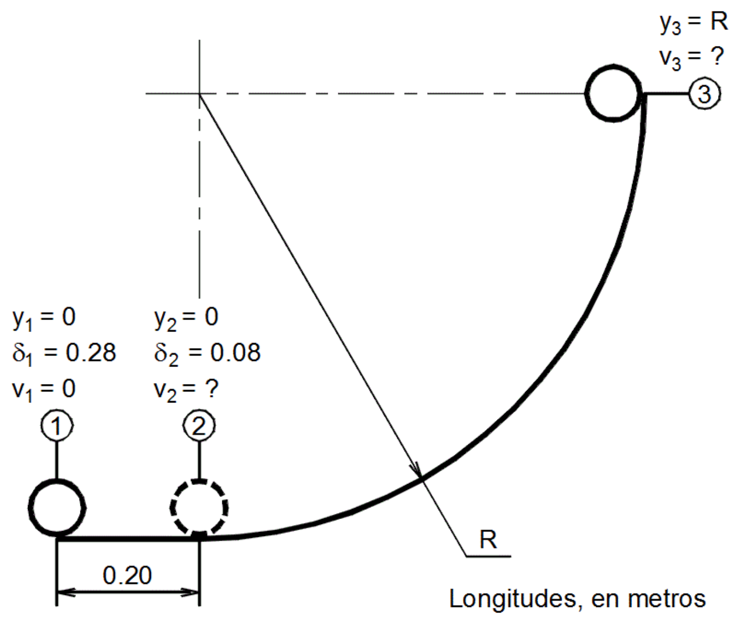
$$U^{W}_{1-2} + U^{k}_{1-2} = T_2 - T_1$$

Se calcula el trabajo de cada una de las fuerzas:

$$U^{W}_{1-2} = \text{-magW}\,(y_2 - y_1)$$

$$U^{k}_{1-2} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$$

Se realiza un análisis geométrico para establecer el valor de los parámetros que se requieren para el cálculo del trabajo de cada una de las fuerzas que actúan, así como las energías cinéticas, con base en la figura mostrada:



$y_2 = 0$

$y_1 = 0$

$\delta_1 = 0.2 + 0.08$

$\delta_1 = 0.28$ m

$\delta_2 = 0.08$ m

$v_1 = 0$

Se sustituyen los valores en la expresión del trabajo y la energía:

$-0.5\ (9.81)\ (0 - 0) - \frac{1}{2}\ (500) \left(0.08^2\ -\ 0.28^2\right) = \frac{1}{2}\ (0.5)\ v_2^2 - 0$

$-\ 250\ (0.0064 - 0.0784) = 0.25\ v_2^2$

$-\ 250\ (-\ 0.072) = 0.25\ v_2^2$

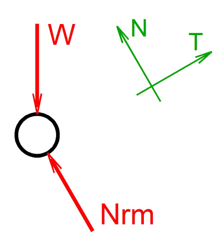
$0.25\ v_2^2 = 18$

$v_2^2 = \frac{18}{0.25}$

$v_2 = \sqrt{72}$

$v_2 = 8.4853\ \frac{m}{s}$

Ahora, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la bola una vez que se encuentra sobre la rampa circular:



Con base en el método del trabajo y la energía, y estableciendo que el punto 3 es aquel para el cual $\theta = 90°$:

$U_{2-3}^{W} = T_3 - T_2$

Por lo que se requiere calcular el trabajo del peso de 2 a 3:

$U_{2-3}^{W} = -\text{magW}\,(y_3 - y_2)$

$y_3 = 1.5$ m

$U_{2-3}^{W} = -4.905\,(1.5 - 0)$

$U_{2-3}^{W} = -7.3575$

Entonces:

$-7.3575 = \frac{1}{2}\,(0.5)\,v_3^2 - \frac{1}{2}\,(0.5)\,8.4853^2$

$-7.3575 = 0.25\,v_3^2 - 0.25\,(72)$

$0.25\,v_3^2 = -7.3575 + 18$

$v_3^2 = \frac{10.6425}{0.25}$

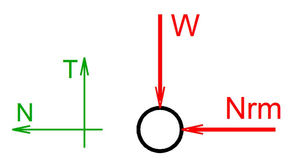
$v_3 = \sqrt{42.57}$

$v_3 = 6.5246\,\frac{m}{s}$

La rapidez de la bola cuando se encuentra en $\theta = 90°$ es:

$v_3 = 6.5246\,\frac{m}{s}$.

Para calcular la magnitud de la fuerza normal que ejerce la pista sobre la bola, se requiere dibujar el diagrama de cuerpo libre en dicha posición:



La representación vectorial de las fuerzas es la siguiente:

$\overline{\text{Nrm}} = \{0, \text{magN}\}$

$\overline{W} = \{-\text{m g}, 0\}$

En este caso, el peso solo tiene componente tangencial. Cabe hacer notar que la primera componente de los vectores es la que tiene orientación del eje tangente a la trayectoria.

Se obtiene la resultante y se aplica la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \overline{\text{Nrm}} + \overline{W}$

$\overline{R} = \{0, \text{magN}\} + \{-\text{m g}, 0\}$

$\{0, \text{magN}\} + \{-\text{m g}, 0\} = \text{m}\,\{a_T,\ a_N\}$

por tanto:

$\text{magN} = \text{m}\, a_N$

$a_N = \text{m}\, \frac{v_3^2}{R}$

$a_N = (0.5)\frac{6.5246^2}{1.5}$

$a_N = (0.5)\ \frac{42.57}{1.5}$

$a_N = 14.19\ \text{N}$

La magnitud de la normal que ejerce la pista sobre la bola es:

magN = 14.19 N.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.5;
g = 9.81;
δ2 = 0.08;
Δs = 0.2;
θf = 90 °;
v1 = 0;
k = 500;
R = 1.5;
```

Establecimiento de los parámetros para calcular el trabajo de las fuerzas involucradas durante el disparo y la energía cinética de la bola:

```
δ1 = δ2 + Δs
y1 = 0;
y2 = 0;
y3 = R;
Uk1a2 = -1/2 k (δ2^2 - δ1^2)
UW1a2 = -m g (y2 - y1)
```

Aplicación del método del trabajo y la energía durante el disparo de la bola:

```
T1 = 1/2 m v1^2
T2 = 1/2 m v2^2
ec1 = Uk1a2 + UW1a2 == T2 - T1
resp1 = Solve[ec1]
v2Sol = v2 /. resp1[[2]]
```

Aplicación del método del trabajo y la energía después del disparo de la bola:

```
UW2a3 = -m g (y3 - y2)
T3 = 1/2 m v3^2
ec2 = UW2a3 == T3 - (T2 /. v2 → v2Sol)
resp2 = Solve[ec2]
v3Sol = v3 /. resp2[[2]]
```

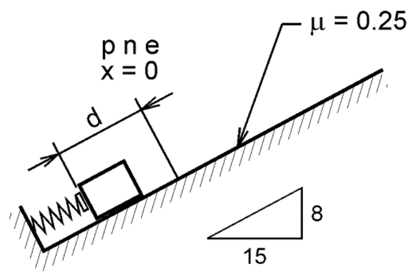
Cálculo de la fuerza normal de la pista sobre la bola en 3:

```
Nrm = {0, magN}
W = {-m g, 0}
R3 = Nrm + W
aN = v3Sol^2 / R
ec3 = R3 == m {aT, aN}
resp3 = Solve[ec3]
magNSol = magN /. resp3[[1]]
```

Ejercicio 6.5

Se tiene un cuerpo con 3.4 kg de masa que es lanzado sobre un plano inclinado por medio de un resorte cuya constante de rigidez es $k = 2000\ \frac{N}{m}$, tal como se muestra en la figura.

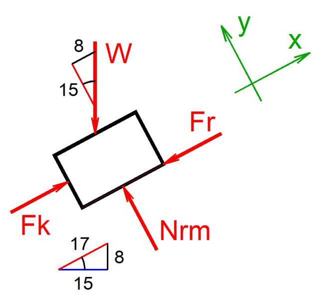
Si el coeficiente de fricción cinética entre el cuerpo y el plano es $\mu = 0.25$, el resorte se deforma una longitud d = 0.2 m y se suelta desde el reposo, determine la distancia recorrida por el cuerpo medida a partir de la posición natural de equilibrio del resorte, pne.



Longitudes, en metros

El movimiento del cuerpo puede dividirse en dos partes, durante el tiempo en que el resorte lo empuja, a la que se le puede denominar disparo, y luego de que va subiendo por el plano inclinado hasta que se detiene.

Primero, se analizará durante el disparo, cuyo diagrama de cuerpo libre es el siguiente:



Para aplicar el método del trabajo y la energía, es necesario conocer la magnitud de la fuerza de fricción, la cual puede obtenerse con el cálculo de la fuerza normal, con base en la segunda ley de Newton. Previamente, se determina la hipotenusa del triángulo relacionado con la pendiente del plano inclinado:

$$\text{hip} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$\text{hip} = \sqrt{225 + 64}$$

$$\text{hip} = \sqrt{289}$$

$$\text{hip} = 17$$

$$\overline{F_k} = \{\text{magF}_k, 0\}$$

$$\overline{\text{Fr}} = \{\text{-magFr}, 0\}$$

$\overline{W}$ = m g $\left\{-\frac{\Delta y}{\text{hip}}, -\frac{\Delta x}{\text{hip}}\right\}$

$\overline{W}$ = 3.4 (9.81) $\left\{-\frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right\}$

$\overline{W}$ = {-1.6 (9.81), -3 (9.81)}

$\overline{W}$ = {-15.696, -29.43} N

$\overline{\text{Nrm}}$ = {0, magN}

Por tanto, la resultante es:

$\overline{R} = \overline{F_k} + \overline{\text{Fr}} + \overline{W} + \overline{\text{Nrm}}$

$\overline{R}$ = {magF$_k$, 0} + {-magFr, 0} + {-15.696, -29.43} + {0, magN}

$\overline{R}$ = {magF$_k$ - magFr - 15.696, -29.43 + magN}

Se sustituye en la segunda ley de Newton:

$\overline{R}$ = m {a_x, 0}

{magF$_k$ - magFr - 15.696, -29.43 + magN} = 3.4 {a_x, 0}

Con base en la igualdad de las componentes en y:

-29.43 + magN = 0

magN = 29.43 N

Por consiguiente, la magnitud de la fuerza de fricción es:

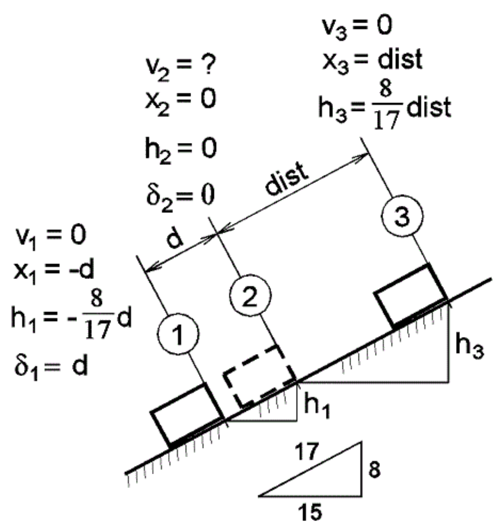
magFr = μ_k magN

magFr = (0.25) 29.43

magFr = 7.3575 N

Durante la segunda parte del movimiento, las fuerzas que actúan son las mismas excepto la fuerza del resorte, que ya no está en contacto con el cuerpo. Por consiguiente, la magnitud de la fuerza de fricción sigue siendo la misma, debido a que la fuerza del resorte solo tiene componente en x.

Para facilitar la aplicación del método de Trabajo y Energía, se dibuja un diagrama en el que se puedan determinar con facilidad las posiciones y los parámetros del movimiento del cuerpo:



Longitudes, en metros

Las alturas h_1 y h_3 se pueden obtener por medio del teorema de la proporcionalidad de los triángulos semejantes. Se establece como referencia para medir las posiciones y las alturas al punto 2.

Por consiguiente, tanto x_1 como h_1 son negativas:

$$\frac{h_1}{d} = -\frac{\Delta y}{\text{hip}}$$

$$h_1 = -\frac{8}{17}\ d$$

$$h_1 = -0.094118$$

$$\frac{h_3}{\text{dist}} = \frac{\Delta y}{\text{hip}}$$

$$h_3 = \frac{8}{17}\ \text{dist}$$

Posteriormente, se obtienen los valores del trabajo de realiza cada una de las fuerzas de 1 a 3, tomando en cuenta que la fuerza del resorte solo actúa de 1 a 2:

$$U^k_{1-2} = -\frac{1}{2}\ \text{k}\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right)$$

$$U^k_{1-2} = -\frac{1}{2}\ (2000)\left(0^2 - 0.2^2\right)$$

$$U^k_{1-2} = 1000\ (0.04)$$

$$U^k_{1-2} = 40\ \text{J}$$

$$U^{\text{Fr}}_{1-3} = -\text{magFr}\ (x_3 - x_1)$$

$$U^{\text{Fr}}_{1-3} = -7.3575\ [\text{dist} - (-0.2)]$$

$$U^{\text{Fr}}_{1-3} = -7.3575\ \text{dist} - 1.4715$$

$$U^W_{1-3} = -\text{m g}\ (h_3 - h_1)$$

$$U^W_{1-3} = -(3.4)\ (9.81)\ [\frac{8}{17}\ \text{dist} - (-0.094118)]$$

$$U^W_{1-3} = -15.696\ \text{dist} - 3.1392$$

$$U^{\text{Nrm}}_{1-3} = 0$$

Dado que tanto la rapidez inicial como la final son cero, las energías cinéticas son:

$$T_1 = \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_1^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\ \text{m}\ 0^2$$

$$T_1 = 0$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\ \text{m}\ v_3^2$$

$$T_3 = 0$$

Se sustituyen los valores en la expresión del trabajo y la energía:

$$U^k_{1-2} + U^{\text{Fr}}_{1-3} + U^W_{1-3} + U^{\text{Nrm}}_{1-3} = T_3 - T_1$$

$$40 - 7.3575\ \text{dist} - 1.4715 - 15.696\ \text{dist} - 3.1392 + 0 = 0 - 0$$

$$23.0535\ \text{dist} = 35.3893$$

$$\text{dist} = \frac{35.3893}{23.0535}$$

$$\text{dist} = 1.5351\ \text{m}$$

La distancia recorrida por el cuerpo medida desde la posición natural de equilibrio del resorte es:

dist = 1.5351 m.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 3.4;
g = 9.81;
k = 2000;
μk = 0.25;
d = 0.2;
Δx = 15;
Δy = 8;
```

Representación vectorial de las fuerzas:

```
hip = Sqrt[Δx^2 + Δy^2]
Fk = magFk {1, 0}
Fr = μ magN {-1, 0}
W = m g {-Δy/hip, -Δx/hip}
Nrm = magN {0, 1}
```

Cálculo de la resultante y sustitución en la segunda ley de Newton:

```
R = Fk + Fr + W + Nrm
ec1 = R == m {ax, 0}
resp1 = Solve[ec1, {ax, magN}]
magNSol = magN /. resp1[[1]]
```

Magnitud de la fuerza de fricción:

```
magFr = μk magNSol
```

Posiciones y parámetros del movimiento del cuerpo:

```
δ1 = d
x1 = -d;
h1 = -Δy/hip d;
v1 = 0;
δ2 = 0;
x2 = 0;
h2 = 0;
```

```
x3 = dist;
```
$$h3 = \frac{\Delta y}{hip}\, dist;$$
```
v3 = 0;
```

Cálculo del trabajo realizado por cada fuerza y de las energías cinéticas:

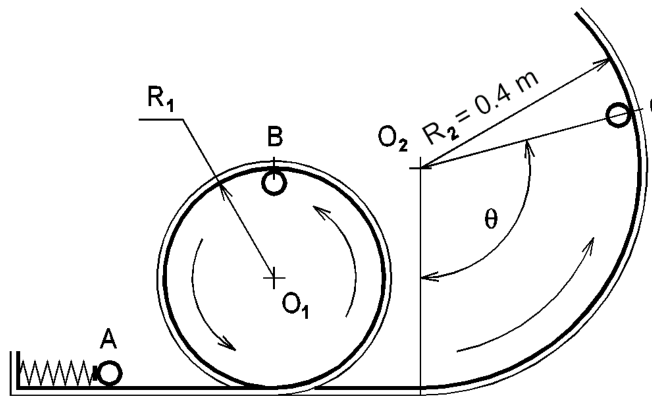
$$Uk1a2 = -\frac{1}{2}\, k\, \left(\delta 2^2 - \delta 1^2\right)$$
```
UFr1a3 = -magFr (x3 - x1)
UW1a3 = -m g (h3 - h1)
UNrm1a3 = 0
```
$$T1 = \frac{1}{2}\, m\, v1^2$$
$$T3 = \frac{1}{2}\, m\, v3^2$$

Aplicación del método del trabajo y la energía durante todo el movimiento:

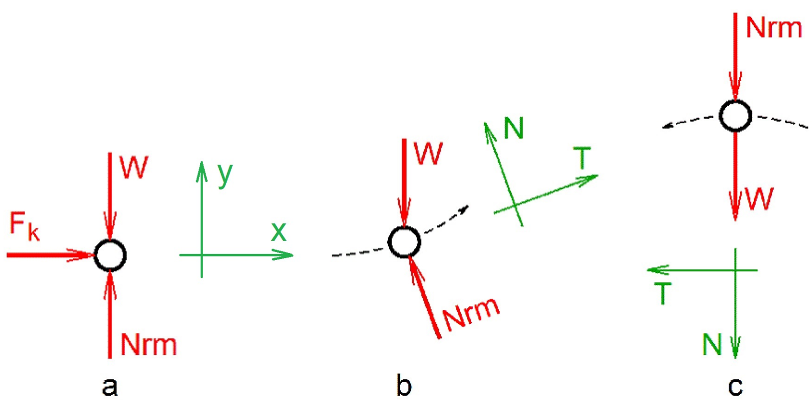
```
ec2 = Uk1a2 + UFr1a3 + UW1a3 + UNrm1a3 == T3 - T1
resp2 = Solve[ec2]
distSol = dist /. resp2[[1]]
```

Ejercicio 6.6

Un juego se compone de un disparador, un balín con masa **m = 0.1 kg** y una pista vertical formada por un rizo y una rampa circulares, como se muestra en la figura.
El disparador está formado por un resorte con constante de rigidez **k = 98.1 N/m** que se comprime ***δ*** **= 0.1 m** y se suelta hasta su posición natural de equilibrio, para que el balín recorra la pista.
Despreciando todo tipo de fricción que actúe sobre el balín, determine el valor máximo de R_1 que puede tener el rizo de manera que el balín pueda pasar por él sin despegarse, y el valor de θ sobre la rampa circular hasta donde alcanza a llegar el balín antes de caerse.



Diagramas de cuerpo libre del balín: a) en contacto con el resorte; b) en la parte curva de la pista; c) en el punto B.



Como puede observarse, la fuerza del resorte solo actúa mientras está en contacto con el balín. Posteriormente, sólo actúan el peso y la fuerza normal.
Por tanto, se puede aplicar el método del trabajo y la energía, con base en el cálculo del trabajo de la fuerza del resorte y del peso, debido a que la fuerza normal siempre es perpendicular a la trayectoria, por tanto, su trabajo es nulo.

Dado que es necesario calcular, primero, la rapidez mínima del balín de manera que esté en contacto con la pista en el punto B, es necesario aplicar en él la segunda ley de Newton.
Representación vectorial de las fuerzas en el punto B:

$\overline{\text{Nrm}}$ = {0, magN}

$\overline{W}$ = {0, m g}

Resultante y aplicación de la segunda ley de Newton:

$\overline{R} = \overline{\text{Nrm}} + \overline{W}$

$\overline{R} = \{0, \text{magN}\} + \{0, \text{m g}\}$

$\overline{R} = \{0, \text{magN} + \text{m g}\}$

$\overline{R} = \text{m}\,\overline{a}$

$\{0, \text{magN} + \text{m g}\} = \text{m}\,\{a_T,\ a_N\}$

$a_T = 0$

$\text{m}\,a_N = \text{magN} + \text{m g}$

En el punto B, para que el balín esté en contacto con la pista es necesario que:

$\text{magN}_B > 0$

Cuando está a punto de despegarse, se puede considerar que:

$\text{magN}_B = 0$

Entonces:

$\text{m}\,a_{N,B} = 0 + \text{m g}$

$a_{N,B} = \text{g}$

Dado que:

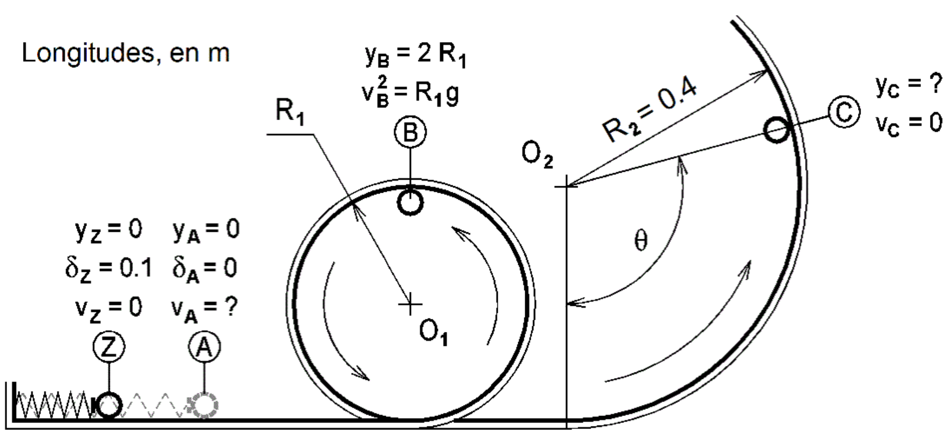
$$a_{N,B} = \frac{v_B^2}{R}$$

$$\frac{v_B^2}{R_1} = \text{g}$$

$$v_B^2 = R_1\,\text{g}$$

Ahora, se aplica el método del trabajo y la energía desde que se comprime el resorte hasta que llega al punto B. Se considera que en Z el resorte está comprimido $\delta_Z = 0.1$ m y en A el resorte deja de estar en contacto con el balín y, por tanto, $\delta_A = 0$.

A continuación se muestra un diagrama en el que pueden observarse las posiciones y los parámetos cinemáticos de los puntos de interés.



$y_Z = 0$ m

$\delta_Z = 0.1$ m

$v_Z = 0\ \frac{m}{s}$

$y_A = 0$ m

$\delta_A = 0$ m

$v_A = ?$

$y_B = 2\,R_1$

$v_B^2 = R_1\,g$

Entonces, el trabajo de las fuerzas involucradas es:

$U_{Z-A}^{k} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_A^2 - \delta_Z^2\right)$

$U_{Z-A}^{k} = -\frac{1}{2}\,(98.1)\left(0^2 - 0.1^2\right)$

$U_{Z-A}^{k} = -49.05\,(-0.01)$

$U_{Z-A}^{k} = 0.4905\text{ J}$

$U_{Z-B}^{W} = -\,m\,g\,(y_B - y_Z)$

$U_{Z-B}^{W} = -0.1\,(9.81)\,(2\,R_1 - 0)$

$U_{Z-B}^{W} = -1.962\,R_1$

Con base en la ecuación del trabajo y la energía:

$U_{Z-A}^{k} + U_{Z-B}^{W} = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_Z^2$

$0.4905 - 1.962\,R_1 = \frac{1}{2}\,(0.1)\,R_1\,g - \frac{1}{2}\,(0.1)\,0^2$

$1.962\,R_1 = 0.4905 - 0.4905\,R_1$

$1.962\,R_1 + 0.4905\,R_1 = 0.4905$

$2.4525\,R_1 = 0.4905$

$R_1 = \frac{0.4905}{2.4525}$

$R_1 = 0.2\text{ m}$

El valor máximo de R_1 para que el balín no se despegue de la pista es:

$R_1 = 0.2$ m.

Para calcular el valor de θ de la rampa circular hasta donde llega el balín, se requiere conocer los parámetros asociados a dicho punto, C:

$y_C = ?$

$v_C = 0\,\frac{m}{s}$

Por consiguiente, con base en el método del trabajo y la energía:

$U_{B-C}^{W} = -m\,g\,(y_C - y_B)$

$U_{B-C}^{W} = -0.981\,(y_C - 0.4)$

$U_{B-C}^{W} = \frac{1}{2}\,m\,v_C^2 - \frac{1}{2}\,m\,v_B^2$

$-0.981\,(y_C - 0.4) = -\frac{1}{2}\,(0.1)\,(0.2)\,(9.81)$

$0.981\,y_C - 0.3924 = 0.0981$

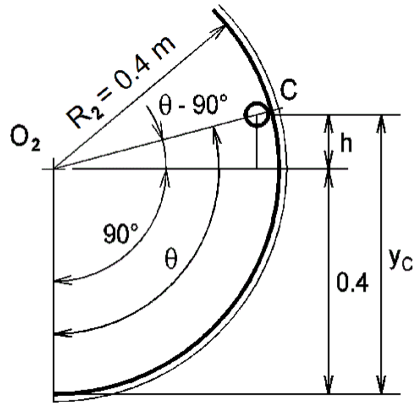
$0.981\,y_C = 0.0981 + 0.3924$

$0.981\,y_C = 0.4905$

$y_C = \frac{0.4905}{0.981}$

$y_C = 0.5\text{ m}$

Para calcular el valor de θ, dado que el radio de la rampa circular es R_2 = 0.4 m, con base en el siguiente diagrama:



Puede verificarse que:

$\text{Sin}\,[\theta - 90°] = \frac{h}{R_2}$

$h = y_C - 0.4$

h = 0.5 - 0.4

h = 0.1 m

$\text{Sin}\,[\theta - 90°] = \frac{0.1}{0.4}$

θ - 90° = ArcSin [0.25]

θ - 90° = 14.48°

θ = 14.48° + 90°

θ = 104.48°

El valor del ángulo θ hasta donde llega el balín es:

θ = 104.48°.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
m = 0.1;
g = 9.81;
k = 98.1;
δ = 0.1;
R2 = 0.4;
```

Representación vectorial de las fuerzas en el punto B:

```
Nrm = {0, magN}
W = {0, m g}
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

```
ec1 = Nrm + W == m {aTB, aNB}
resp1 = Solve[ec1 /. magN → 0]
aNBSol = aNB /. resp1[[1]]
```

$$ec2 = aNBSol == \frac{vB^2}{R1}$$

```
resp2 = Solve[ec2, vB]
vBSol = vB /. resp2[[2]]
```

Posiciones y parámetros:

```
yZ = 0;
δZ = δ;
vZ = 0;
yA = 0;
δA = 0;
yB = 2 R1;
vC = 0;
```

Trabajo desarrollado por las fuerzas involucradas:

$$UkZaA = -\frac{1}{2} k \left(\delta A^2 - \delta Z^2\right)$$

```
UWZaB = -m g (yB - yZ)
```

Aplicación del método del trabajo y la energía:

$$ec3 = UkZaA + UWZaB == \frac{1}{2} m\, vBSol^2 - \frac{1}{2} m\, vZ^2$$

```
resp3 = Solve[ec3]
R1Sol = R1 /. resp3[[1]]
```

Cálculo del ángulo θ hasta donde llega el balín:

```
UWBaC = -m g (yC - (yB /. R1 → R1Sol))
ec4 = UWBaC == 1/2 m vC^2 - 1/2 m (vBSol /. R1 → R1Sol)^2
resp4 = Solve[ec4]
yCSol = yC /. resp4[[1]]
ec5 = Sin[θ - 90 °] == h/R2
h = yCSol - R2
resp5 = Solve[ec5]
θSol = θ /. resp5[[2]]
θSolDeg = θSol/°
```

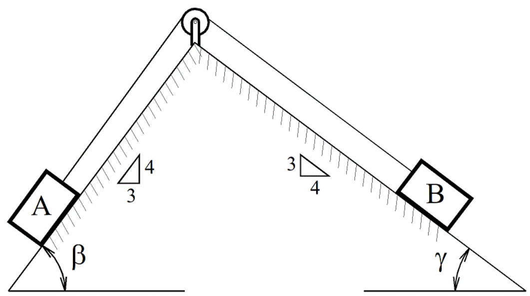
Ejercicio 6.7

Problema II.1 Serrano, Franco y Minami, Cuaderno de ejercicios de Dinámica, UNAM, Facultad de Ingeniería, p. 23.

El sistema mecánico formado por los bloques A y B, de 300 y 200 N de peso, respectivamente, unidos por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una pequeña polea fija y sin fricción, parte del reposo; si el coeficiente de fricción entre el bloque A y la superficie izquierda vale 0.2 y el plano inclinado derecho es liso, determine:

a) la tensión en el cable;

b) la rapidez de B después de haber recorrido 2 metros.

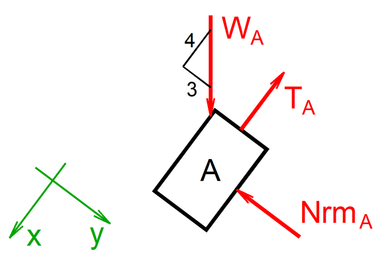


Un aspecto importante a resolver en el problema, es la necesidad de asegurar la dirección (sentido) de la tendencia al movimiento de los bloques.

Una manera relativamente sencilla es calcular la magnitud de la tensión en el cable en uno de los bloques, suponiendo que no existe fricción y que está en reposo, y verificar qué sucedería si se aplica dicha fuerza de tensión al otro bloque.

Por ejemplo, se puede analizar, bajo las consideraciones indicadas, al bloque A.

El diagrama de cuerpo libre se muestra a continuación:



Se determina la hipotenusa del triángulo rectángulo relacionado con la pendiente del plano inclinado:

$$\text{hip}_A = \sqrt{\Delta x_A^2 + \Delta y_A^2}$$

$$\text{hip}_A = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$\text{hip}_A = \sqrt{9 + 16}$$

$$\text{hip}_A = \sqrt{25}$$

$$\text{hip}_A = 5$$

La representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque es:

$$\overline{T_A} = \{\text{-magT}, 0\}$$

$$\overline{\text{Nrm}_A} = \{0, -\text{magN}_A\}$$

$\overline{W_A} = \text{magW}_A \left\{\frac{\Delta y_A}{\text{hip}_A},\ \frac{\Delta x_A}{\text{hip}_A}\right\}$

$\overline{W_A} = 300 \left\{\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right\}$

$\overline{W_A} = \{240, 180\}$ N

Al aplicar la segunda ley de Newton, considerando que la aceleración es nula, la expresión queda:

$\overline{T_A} + \overline{\text{Nrm}_A} + \overline{W_A} = \overline{0}$

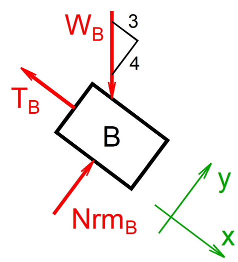
$\{240 - \text{magT}, 180 - \text{magN}_A\} = \{0, 0\}$

Luego de resolver la componente en x de la ecuación anterior:

$240 - \text{magT} = 0$

$\text{magT} = 240$ N

Ahora, se verifica qué le sucede al bloque B si la magnitud de la tensión en el cable es el obtenido. Para ello, se muestra abajo el diagrama de cuerpo libre de B:



Previo al análisis, se obtiene la hipotenusa del triángulo rectángulo asociado a la pendiente del plano inclinado:

$\text{hip}_B = \sqrt{\Delta x_B^2 + \Delta y_B^2}$

$\text{hip}_B = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$\text{hip}_B = \sqrt{16 + 9}$

$\text{hip}_B = \sqrt{25}$

$\text{hip}_B = 5$

Representación vectorial de las fuerzas involucradas:

$\overline{T_B} = \{-\text{magT}, 0\}$

$\overline{T_B} = \{-240, 0\}$

$\overline{\text{Nrm}_B} = \{0, \text{magN}_B\}$

$\overline{W_B} = \text{magW}_B \left\{\frac{\Delta y_B}{\text{hip}_B},\ -\frac{\Delta x_B}{\text{hip}_B}\right\}$

$\overline{W_B} = 200 \left\{\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right\}$

$\overline{W_B} = \{120, -160\}$ N

Con base en la segunda ley de Newton:

$\overline{T_B} + \overline{\text{Nrm}_B} + \overline{W_B} = m_B\, \overline{a_B}$

$\{120 - 240, \text{magN}_B - 160\} = m_B\, \{a_{B,x}, 0\}$

Al resolver la componente en x de la expresión anterior:

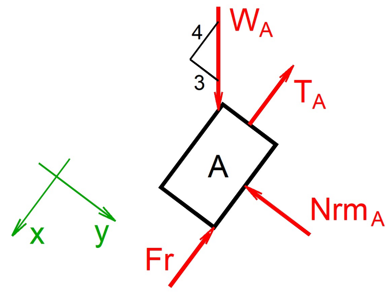
$-120 = m_B\, a_{B,x}$

Dado que la aceleración $a_{B,x}$ es negativa, con base en el sistema de referencia establecido implica que el bloque B tiende a subir y, por consiguiente, el bloque A tiende a bajar.

a) La tensión en el cable

Para determinar la magnitud de la tensión en el cable, se pueden plantear las ecuaciones de movimiento de ambos bloques, con base en la segunda ley de Newton.

Primero, se muestra el diagrama de cuerpo libre del bloque A completo. Ya que el bloque A tiende a moverse hacia abajo, la fuerza de fricción entre el plano inclinado y el bloque será hacia arriba:



Conviene recordar que el sentido del eje de referencia principal, x, es del centro de la polea fija hacia los bloques, con objeto de que sean consistentes los signos de la rapidez y la aceleración que se obtienen con base en la relación cinemática que se obtendrá posteriormente.
Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el bloque:

$$\overline{\mathrm{Fr}} = \{\text{-magFr}, 0\}$$

$$\overline{T_A} = \{\text{-magT}, 0\}$$

$$\overline{\mathrm{Nrm}_A} = \{0, -\mathrm{magN}_A\}$$

$$\overline{W_A} = \mathrm{magW}_A \left\{\frac{\Delta y_A}{\mathrm{hip}_A}, \frac{\Delta x_A}{\mathrm{hip}_A}\right\}$$

$$\overline{W_A} = 300 \left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$$

$$\overline{W_A} = \{240, 180\}\ \mathrm{N}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton:

$$\overline{\mathrm{Fr}} + \overline{T_A} + \overline{\mathrm{Nrm}_A} + \overline{W_A} = m_A\, \overline{a_A}$$

$$\{240 - \mathrm{magFr} - \mathrm{magT}, 180 - \mathrm{magN}_A\} = \frac{300}{9.81} \{a_{A,x}, 0\}$$

Si se resuelve la componente y de la ecuación anterior:

$$180 - \mathrm{magN}_A = 0$$

$$\mathrm{magN}_A = 180\ \mathrm{N}$$

Con base en el valor obtenido, se puede calcular la magnitud de la fuerza de fricción cinética:

$$\mathrm{magFr} = \mu_k\, \mathrm{magN}_A$$

Por tanto:

$$\mathrm{magFr} = 0.2\, \mathrm{magN}_A$$

$$\mathrm{magFr} = 0.2\, (180)$$

$$\mathrm{magFr} = 36\ \mathrm{N}$$

Entonces, la ecuación de movimiento de A queda:

$$240 - 36 - \mathrm{magT} = 30.581\, a_{A,x}$$

$$204 - \mathrm{magT} = 30.581\, a_{A,x}$$

En el caso del bloque B, las ecuaciones de movimiento son similares a las que se obtuvieron previamente:

$$\overline{T_B} + \overline{\mathrm{Nrm}_B} + \overline{W_B} = m_B\, \overline{a_B}$$

Para el cual se desconoce la magnitud de la tensión en la cuerda:

$\overline{T_B}$ = {-magT, 0}

De donde:

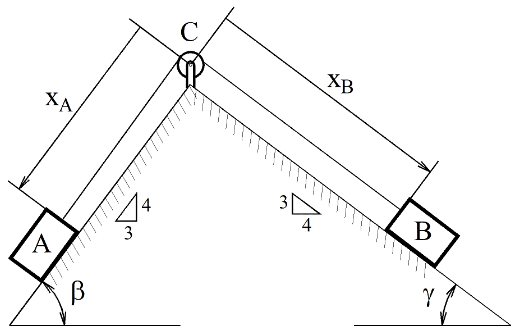
{120 - magT, magN$_B$ - 160} = m_B {$a_{B,x}$, 0}

La ecuación de movimiento es, entonces:

120 - magT = $\frac{200}{9.81}$ $a_{B,x}$

120 - magT = 20.387 $a_{B,x}$

También se requiere establecer la relación cinemática entre los bloques.
En seguida se muestra un diagrama a partir del cual puede calcularse dicha relación:



La longitud constante de la cuerda, L, es:

L = x_A + C + x_B

Si se deriva la expresión anterior con respecto al tiempo, se obtiene:

0 = $v_{A,x}$ + 0 + $v_{B,x}$

por consiguiente:

$v_{A,x} = -v_{B,x}$

Si se vuelve a derivar esta última ecuación con respecto al tiempo:

$a_{A.x} = -a_{B,x}$

Se resuelve el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de movimiento de dichos bloques junto con la relación cinemática:

204 - magT = 30.581 $a_{A,x}$

120 - magT = 20.387 $a_{B,x}$

$a_{A.x} = -a_{B,x}$

Se sustituye la relación cinemática en la primera ecuación:

204 - magT = - 30.581 $a_{B,x}$

Se multiplica la primera ecuación por 20.387, la segunda por 30.581 y se suman miembro a miembro:

$204\ (20.387) - \text{magT}(20.387) = (-30.581)\ (20.387)\ a_{B,x}$

$120\ (30.581) - \text{magT}\ (30.581) = (20.387)\ (30.581)\ a_{B,x}$

$4159.0214 - 20.387\ \text{magT} = -623.4659\ a_{B,x}$

$3669.7248 - 30.581\ \text{magT} = 623.4659\ a_{B,x} \qquad +$

____

$4159.0214 - 20.387\ \text{magT} + 3669.7248 - 30.581\ \text{magT} = 0$

$50.968\ \text{magT} = 7828.7462$

$\text{magT} = \frac{7828.7462}{50.968}$

$\text{magT} = 153.6\ \text{N}$

La magnitud de la tensión del cable es:

magT = 153.6 N.

b) la rapidez de B después de haber recorrido 2 metros

Para la resolución de este inciso, se aplicará el método del trabajo y la energía.
Se considera que el punto final está a 2 m del punto inicial, en el caso del bloque A abajo, y en el de B arriba, sobre el plano inclinado correspondiente.
Las alturas inicial y final de cada uno de los bloques se establecerán con base en considerar que el punto más bajo es la referencia.
En el caso del bloque A, la altura del punto final es:

$y_{A,2} = 0$

Con base en este valor, se puede obtener la altura del punto inicial aplicando el teorema de proporcionalidad de los lados homólogos de triángulos semejantes:

$\frac{y_{A,1}}{2} = \frac{\Delta y_A}{\text{hip}_A}$

$y_{A,1} = \frac{4\,(2)}{5}$

$y_{A,1} = 1.6\ \text{m}$

Con respecto al bloque B, la altura inicial es la que se considera nula:

$y_{B,1} = 0$

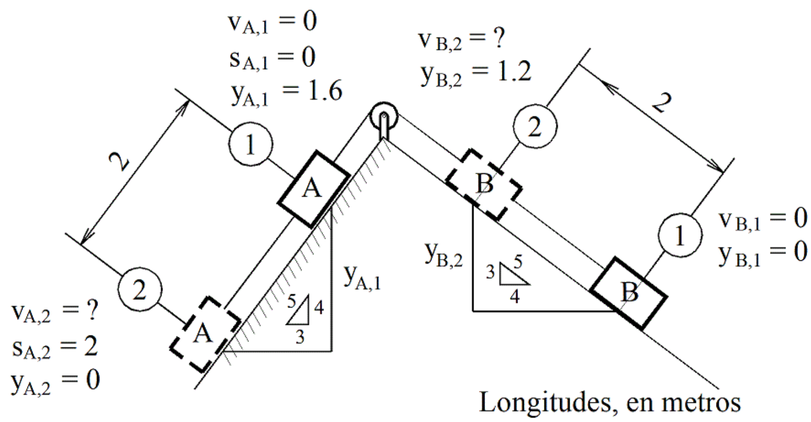
y a partir de la cual, con base en el mismo teorema anterior, puede determinarse la altura final:

$\frac{y_{B,2}}{2} = \frac{\Delta y_B}{\text{hip}_B}$

$y_{B,2} = \frac{3\,(2)}{5}$

$y_{B,2} = 1.2\ \text{m}$

Para el cálculo del trabajo que desarrolla cada una de las fuerzas que actúan, se establecen las posiciones y los parámetros de interés para el problema, con base en el siguiente diagrama:



Las fuerzas que desarrollan trabajo son el peso y la fricción en el bloque A, el peso en el bloque B. Conviene recordar que para cuerpos conectados, se puede eliminar el trabajo de la fuerza de tensión de la cuerda que los une, debido a que la suma de trabajos de dicha tensión que desarrolla en cada bloque es cero, siempre y cuando se plantee la ecuación de todas las fuerzas "externas" que actúan en el sistema de cuerpos conectados y se iguala a la suma del incremento de la energía cinética de cada cuerpo.

Los trabajos desarrollados por las fuerzas son:

$U_{1-2}^{W_A} = -\text{magW}_A \left(y_{A,2} - y_{A,1}\right)$

$U_{1-2}^{\text{Fr}} = -\text{magFr} \left(s_{A,2} - s_{A,1}\right)$

$U_{1-2}^{W_B} = -\text{magW}_B \left(y_{B,2} - y_{B,1}\right)$

Luego se sustituir los valores conocidos:

$U_{1-2}^{W_A} = \text{-300 (0 - 1.6)}$

$U_{1-2}^{W_A} = 480\ \text{N·m}$

$U_{1-2}^{\text{Fr}} = \text{-36 (2 - 0)}$

$U_{1-2}^{\text{Fr}} = -72\ \text{N·m}$

$U_{1-2}^{W_B} = \text{-200 (1.2 - 0)}$

$U_{1-2}^{W_B} = -240\ \text{N·m}$

Se aplica el método del trabajo y la energía al sistema de cuerpos conectados:

$U_{1-2}^{W_A} + U_{1-2}^{\text{Fr}} + U_{1-2}^{W_B} = \frac{1}{2}\, m_A\, v_{A,2}^2 - \frac{1}{2}\, m_A\, v_{A,1}^2 + \frac{1}{2}\, m_B\, v_{B,2}^2 - \frac{1}{2}\, m_A\, v_{B,1}^2$

$480 - 72 - 240 = \frac{1}{2}\,\frac{300}{9.81}\, v_{A,2}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{300}{9.81}\, 0^2 + \frac{1}{2}\,\frac{200}{9.81}\, v_{B,2}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{200}{9.81}\, 0^2$

$168 = 15.2905\, v_{A,2}^2 + 10.1937\, v_{B,2}^2$

Con base en la relación cinemática de rapideces:

$168 = 15.2905\,(-v_{B,2})^2 + 10.1937\, v_{B,2}^2$

$168 = 25.4842\, v_{B,2}^2$

$v_{B,2}^2 = \frac{168}{25.4842}$

$v_{B,2}^2 = 6.5923$

$v_{B,2} = 2.5676\, \frac{m}{s}$ (hacia arriba)

La rapidez de B después de haber recorrido 2 metros es:

$v_{B,2} = 2.568\, \frac{m}{s}$, hacia arriba.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magWA = 300;
magWB = 200;
g = 9.81;
μk = 0.2;
xBf = 2;
ΔxA = 3;
ΔyA = 4;
ΔxB = 4;
ΔyB = 3;
```

Análisis de la tendencia al movimiento de los bloques:

```
hipA = Sqrt[ΔxA^2 + ΔyA^2]
TA = {-magT, 0}
NrmA = {0, -magNA}
WA = magWA {ΔyA/hipA, ΔxA/hipA}
ec1 = TA + NrmA + WA == {0, 0}
resp1 = Solve[ec1]
magTSolProv = magT /. resp1[[1]]
hipB = Sqrt[ΔxB^2 + ΔyB^2]
TB = {-magTSolProv, 0}
NrmB = {0, magNB}
WB = magWB {ΔyB/hipB, -ΔxB/hipB}
```

```
ec2 = TB + NrmB + WB == (magWB/g) {aBx, 0}
resp2 = Solve[ec2, {aBx, magNB}]
aBxSolProv = aBx /. resp2[[1]]
```

a) La tensión en el cable

```
Fr = {-magFr, 0}
ec3 = Fr + TA + NrmA + WA == (magWA/g) {aAx, 0}
resp3 = Solve[ec3, {aAx, magNA}]
magNASol = magNA /. resp3[[1]]
magFrSol = μk magNASol
TB = {-magT, 0}
ec4 = TB + NrmB + WB == (magWB/g) {aBx, 0}
```

Relación cinemática:

```
L = xA + xB
ec5 = 0 == vAx + vBx
vAxSol = vAx /. resp5[[1]]
ec6 = 0 == aAx + aBx
```

Cálculo de la magnitud de la fuerza de tensión en el cable:

```
resp7 = Solve[{(ec3 /. magFr → magFrSol), ec4, ec6}]
magTSol = magT /. resp7[[1]]
```

b) la rapidez de B después de haber recorrido 2 metros

Posiciones y parámetros de los bloques:

```
ec8 = yA1/xBf == ΔyA/hipA
resp8 = Solve[ec8]
yA1Sol = yA1 /. resp8[[1]]
ec9 = yB2/xBf == ΔyB/hipB
resp9 = Solve[ec9]
yB2Sol = yB2 /. resp9[[1]]
sA1 = 0;
vA1 = 0;
sA2 = xBf
yB1 = 0;
vB1 = 0;
yA2 = 0;
```

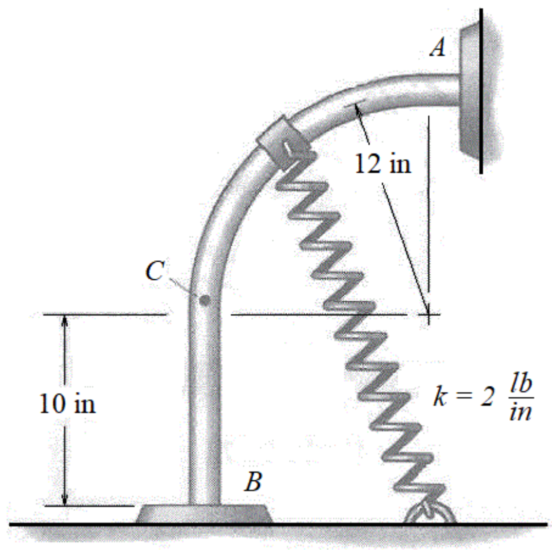
Método del trabajo y la energía:

```
UWA1a2 = -magWA (yA2 - yA1Sol)
UWB1a2 = -magWB (yB2Sol - yB1)
UFr1a2 = -magFrSol (sA2 - sA1)
ec10 = UWA1a2 + UWB1a2 + UFr1a2 == 1/2 magWA/g vA2^2 - 1/2 magWA/g vA1^2 + 1/2 magWB/g vB2^2 - 1/2 magWB/g vB1^2
resp10 = Solve[{(ec5 /. {vAx -> vA2, vBx -> vB2}), ec10}]
vB2Sol = vB2 /. resp10[[2]]
```

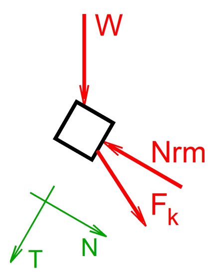
Ejercicio 6.8

Problema 14–77, Hibbeler, Ingeniería Mecánica, Dinámica, 7ª edición, Prentice Hall Hispanoamericana, p. 182.

Un collarín de 5 libras es soltado desde el reposo en A y se desplaza por una guía lisa. Determine la rapidez cuando su centro llega al punto C y la fuerza normal que ejerce sobre la barra en este punto. El resorte tiene una longitud no deformada de 12” y el punto C se ubica justo antes de terminar la parte curva de la barra.



Se aplicará el método del trabajo y la energía para resolver el problema.
Antes que todo, se visualizarán las fuerzas que desarrollan trabajo durante todo el movimiento del collarín, para lo que se analizará su diagrama de cuerpo libre:



Puede observarse que las fuerzas que desarrollan trabajo son el peso y la fuerza del resorte, ya que fuerza la normal siempre es perpendicular a la trayectoria.
Primero, se calculan las deformaciones inicial y final del resorte, medidos en ft.
En la posición inicial, la longitud del resorte es la suma del radio de la barra circular y la altura de la barra vertical:

$L_A = R_b + h_b$

$L_A = 12 + 10$

$L_A = 22\text{ in}$

Dado que la longitud no deformada del resorte es:

$L_0 = 12$ in

La deformación inicial del resorte es:

$\delta_A = L_A - L_0$

$\delta_A = 22 - 12$

$\delta_A = 10$ in

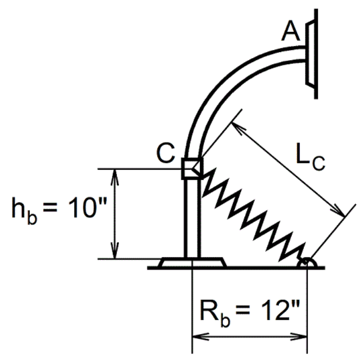
Se convierte dicha longitud a ft:

$\delta_A = 10 \text{ in} \times \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}}$

$\delta_A = \frac{10}{12}$ ft

$\delta_A = 0.8333$ ft

Respecto a la deformacion final del resorte, conviene dibujar un diagrama para visualizar la longitud del resorte en dicha posición:



La longitud final de resorte es:

$L_C = \sqrt{R_b^2 + h_b^2}$

$L_C = \sqrt{12^2 + 10^2}$

$L_C = \sqrt{144 + 100}$

$L_C = \sqrt{244}$

$L_C = 15.6205$ in

Por tanto, la deformación final del resorte es:

$\delta_C = L_C - L_0$

$\delta_C = 15.6205 - 12$

$\delta_C = 3.6205$ in

Se convierte dicha longitud a ft:

$\delta_C = 3.6205 \text{ in} \times \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}}$

$\delta_C = \frac{3.6205}{12}$ ft

$\delta_C = 0.3017$ ft

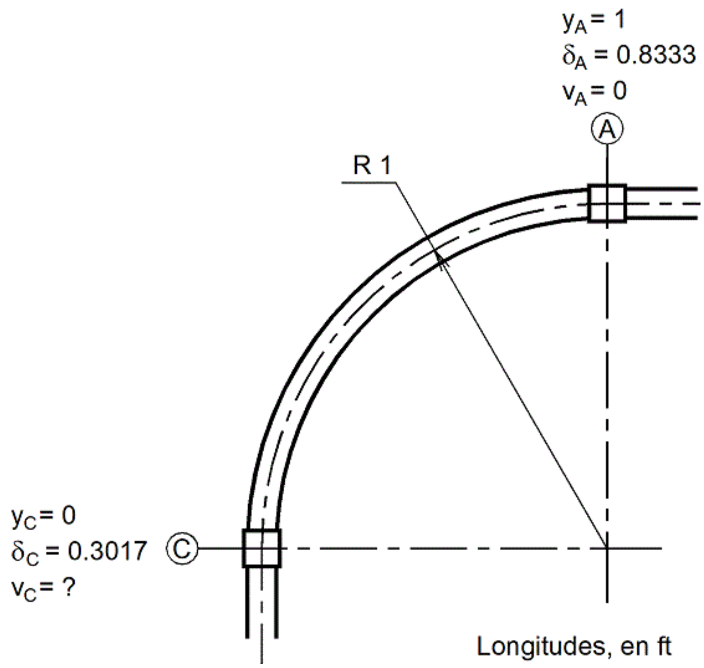
Se obtiene el radio de la barra circular en ft:

$R_b = 12$ in

$R_{b,\text{ft}} = 12 \text{ in} \times \frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in}}$

$R_{b,\text{ft}} = 1$ ft

Para facilitar el cálculo del trabajo desarrollado por dichas fuerzas, se dibuja un diagrama en el que se especifiquen las posiciones y los parámetros del collarín:



Se obtiene la constante del resorte de manera que sus unidades sean $\frac{\text{lb}}{\text{ft}}$:

$$k = 2\ \frac{\text{lb}}{\text{in}}\ x\ \frac{12\ \text{in}}{1\ \text{ft}} = 24\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}}$$

Posteriormente, se calcula el trabajo que desarrollan las fuerzas de interés aplicadas al collarín:

$$U_{A-C}^{W} = -\text{magW}\,(y_C - y_A)$$
$$U_{A-C}^{k} = -\frac{1}{2}\,k\left(\delta_C^2 - \delta_A^2\right)$$

Luego de sustituir los valores conocidos se obtiene:

$$U_{A-C}^{W} = \text{-5 (0 - 1)}$$
$$U_{A-C}^{W} = 5\ \text{lb·ft}$$
$$U_{A-C}^{k} = -\frac{1}{2}\ (24)\left(0.3017^2 - 0.8333^2\right)$$
$$U_{A-C}^{k} = \text{-12 (0.091028 - 0.694444)}$$
$$U_{A-C}^{k} = \text{-12 (-0.603417)}$$
$$U_{A-C}^{k} = 7.2410\ \text{lb·ft}$$

Finalmente, se aplica la ecuación del trabajo y la energía:

$$U_{A-C}^{W} + U_{A-C}^{k} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{magW}}{g}\ v_C^2 - \frac{1}{2}\ \frac{\text{magW}}{g}\ v_A^2$$

Por consiguiente:

$$5 + 7.2410 = \frac{1}{2}\,\frac{5}{32.2}\left(v_C^2 - 0^2\right)$$

$$12.2410 = 0.07764\, v_C^2$$

$$0.07764\, v_C^2 = 12.2410$$

$$v_C^2 = \frac{12.2410}{0.07764}$$

$$v_C^2 = 157.6641$$

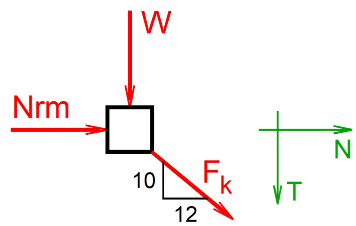
$$v_C = \sqrt{157.6641}$$

$$v_C = 12.5564\ \frac{\text{ft}}{s}$$

La rapidez del collarín en C es:

$$v_C = 12.5564\ \frac{\text{ft}}{s}.$$

Ahora, se procede a calcular la fuerza normal ejercida por la barra sobre el collarín en el punto C, para lo cual se dibuja el diagrama de cuerpo libre del collarín en dicho punto:



La representación vectorial de las fuerzas es:

$$\overline{\text{Nrm}} = \{0, \text{magN}\}$$

$$\overline{W} = \{\text{magW}, 0\}$$

$$\overline{F_k} = \text{magF}_k \left\{\frac{h_b}{L_C}, \frac{R_b}{L_C}\right\}$$

La magnitud de la fuerza del resorte en este punto es:

$$\text{magF}_k = \text{k}\ \delta_C$$

$$\text{magF}_k = 24\ (0.3017)$$

$$\text{magF}_k = 7.2408\ \text{lb}$$

Por tanto:

$$\overline{F_k} = 7.2408 \left\{\frac{10}{15.6205}, \frac{12}{15.6205}\right\}$$

$$\overline{F_k} = \{4.63545, 5.56254\}\ \text{lb}$$

Luego, se aplica la segunda ley de Newton:

$$\overline{\text{Nrm}} + \overline{W} + \overline{F_k} = \frac{\text{magW}}{g}\{a_{T,C},\ a_{N,C}\}$$

$$\{5 + 4.63545, \text{magN} + 5.56254\} = \frac{5}{32.2}\{a_{T,C},\ a_{N,C}\}$$

De la expresión para la componente normal se tiene que:

$$\text{magN} + 5.56254 = \frac{5}{32.2}\, a_{N,C}$$

Dado que la aceleración normal en C es:

$$a_{N,C} = \frac{v_C^2}{R_{b,\text{ft}}}$$

Por lo cual:

$$a_{N,C} = \frac{12.5564^2}{1}$$

$$a_{N,C} = 157.6632\ \frac{\text{ft}}{s^2}$$

Y la magnitud de la fuerza normal es:

$$\text{magN} = \frac{5}{32.2}\ (157.6632) - 5.56254$$

$$\text{magN} = 24.4819 - 5.5654$$

$$\text{magN} = 18.9193\ \text{lb}$$

La magnitud de la fuerza normal ejercida por la pista en el punto C es:

magN = 18.9193 lb.

Resolución del problema con funciones de Mathematica

Datos:

```
magW = 5;
g = 32.2;
L0in = 12;
Rbin = 12;
hbin = 10;
kin = 2;
```

Cálculo de las deformaciones inicial y final del resorte:

```
LAin = Rbin + hbin
LAft = LAin 1/12
L0ft = L0in 1/12
δA = LAft - L0ft // N
LCin = Sqrt[Rbin^2 + hbin^2]
LCft = LCin 1/12
δC = LCft - L0ft // N
```

Posiciones y parámetros:

```
Rbft = Rbin 1/12
yA = Rbft
vA = 0
yC = 0
kft = kin 12
```

Cálculo del trabajo que desarrollan todas las fuerzas aplicadas al collarín:

```
UWAaC = -magW (yC - yA)
```

$$\text{UkAaC} = -\frac{1}{2}\,\text{kft}\left(\delta\text{C}^2 - \delta\text{A}^2\right)$$

Expresión de trabajo y energía:

$$\text{ec1} = \text{UWAaC} + \text{UkAaC} == \frac{1}{2}\,\frac{\text{magW}}{\text{g}}\,\text{vC}^2 - \frac{1}{2}\,\frac{\text{magW}}{\text{g}}\,\text{vA}^2$$

```
resp1 = Solve[ec1]
vCSol = vC /. resp1[[2]]
```

Representación vectorial de las fuerzas que actúan en el collarín en el punto C:

```
Nrm = {0, magN}
W = {magW, 0}
```

$$\text{Fk} = \text{magFk}\left\{\frac{\text{hbin}}{\text{LCin}}, \frac{\text{Rbin}}{\text{LCin}}\right\}$$

```
magFk = kft δC
```

Aplicación de la segunda ley de Newton:

$$\text{ec2} = \text{Nrm} + \text{W} + \text{Fk} == \frac{\text{magW}}{\text{g}}\,\{\text{aTC}, \text{aNC}\}$$

$$\text{aNC} = \frac{\text{vCSol}^2}{\text{Rbft}}$$

```
resp2 = Solve[ec2]
magNSol = magN /. resp2[[1]]
```

UNAM, Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas, Mecánica
Agosto de 2022

Yukihiro Minami Koyama
Gloria Ramírez Romero

Todos los derechos reservados. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México © 2022. Queda estrictamente prohibidos su uso fuera del ámbito académico, alteración, descarga, difusión o divulgación por cualquier medio, así como su reproducción parcial o total.