UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

SEGUNDO EXAMEN EXTRAODINARIO

ÁLGEBRA LINEAL

Semestre 2024-1 7 de noviembre de 2023

Sinodales:

DI. Sofía Magdalena Ávila Becerril

MI. Héctor Rodrigo Amezcua Rivera

Nombre del Alumno: ____

Apellido Paterno Apellido Materno Nombre(s)

Instrucciones:
El examen consta de seis reactivos los cuales deberás de contestar de forma ordenada y resaltado el resultado final. **Se califica planteamiento del problema, desarrollo y resultado.** La duración máxima del examen es de 2.0 horas.

Ejercicio 1: Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y sean $A = \{\overline{a}_1, (3,0)\}$ y $B = \{(-2,1), \overline{b}_2\}$ dos de sus bases. Además, sea

$$M_B^A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz de transición de la base A a la base B. Determine:

1. Los vectores $\overline{a}_1 \in A$ y $\overline{b}_2 \in B$
2. El vector $\overline{v}$ para el cual $[\overline{v}]_B = (1,-1)^T$

20 puntos.

Ejercicio 2: Sea V el espacio vectorial generado por el conjunto

$$G = \{x^2 - x, 2x^2 + x + 1, 4x^2 - x + a\}$$

Realice lo siguiente:

1. Encuentre el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el espacio V sea de dimensión 2
2. Obtenga una base del espacio V

15 puntos.

Ejercicio 3: Considere el subespacio de las matrices de dos por dos, dado por $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y la transformación lineal $T : A \to A$ con regla de correspondencia:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b & b - c \\ b + 2c & a - 2b \end{pmatrix}$$

Determine:

1. El núcleo de T
2. Una matriz asociada a T
3. Si es posible, la inversa de T

20 puntos.

Ejercicio 4: Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Si el operador lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que

$$T(-1, 1) = -(-1, 1)$$
$$T(1, 5) = 5(1, 5)$$

Determine:

1. Los valores propios de T
2. El espacio característico asociado al mayor de los valores propios
3. La regla de correspondencia de T

15 puntos.

Ejercicio 5: Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$W = \{(x, y, z) | -2x + 4y - 2z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

con un producto interno definido como:

$$\langle u | v \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3, \forall \bar{u} = (u_1, u_2, u_3), \bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Determine el coplemento ortogonal, $W^{\perp}$, del subespacio W.

15 puntos.

Ejercicio 6: Sean el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ con producto interno usual y el operador lineal $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ con regla de correspondencia

$$T(a, b, c) = (\ bi + (1 - i)c,\ ai + 2c,\ (-1 - i)a - 2b\ ).$$

Determine si T es un operador antihermitiano.

15 puntos.