UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA LINEAL
PRIMER EXAMEN FINAL (1220)
5 DE DICIEMBRE DE 2023

NOMBRE DEL ALUMNO: ____ **Tipo A**
NUMERO DE CUENTA: ____ **SEMESTRE 24-1**

Instrucciones: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**. **Para la realización del examen no se permitirá el empleo de dispositivos electrónicos ni de formulario.**

1. Sea el conjunto $S = \{x | x \in Q; x \neq -1\}$ y la operación binaria * definida como:

$$x * y = x + y + xy \quad \forall \ x, y \ \in S$$

Si se sabe que $(s,*)$ es un grupo abeliano, utilizar sus propiedades para obtener el valor de a que satisface la ecuación:

$$a * \frac{7}{4} = \frac{1}{5} * \frac{7}{4} * \frac{3}{2}$$

16 puntos.

2. Sea $A = \{x + 3,\ 2x - 1\}$ y $B = \{8x + 3,\ 5x + 1\}$ dos bases del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a uno con coeficientes reales.

Determinar:

a) La matriz de transición de la base B a la base A.

b) Las coordenadas del vector $(3x + 2)$ en la base A, si se sabe que $(3x + 2)_B = (1 \ -1\ )$

16 puntos.

TIPO A

3. Sean los espacios vectoriales $M = \{(a\ b\ c\ d\ )|a, b, c, d \in R\}$, $N = \{(x\ y\ y\ z\ )|x, y, z\ \in R\}$ y la transformación lineal $T: M \to N$ definida por:

$$T = (a\ b\ c\ d\ ) = (a - b\ d - c\ d - c\ 2a + b + c\ )$$

Determinar:

a) El núcleo de la transformación T.

b) La dimensión del recorrido de T.

c) Si existe la transformación inversa T^{-1} y, en caso afirmativo, obtener su regla de correspondencia.

18 puntos

4. Sean los operadores lineales $T: R^2 \to R^2$ y $S: R^2 \to R^2$, definidos por:

$$T(x, y) = (2x, x - y)S(x, y) = (x + 2y, 0)$$

Determinar si la transformación $H = S \circ T + 2I$, donde I es la transformación identidad de R^2, es diagonalizable y, en caso de serlo, obtener una matriz diagonal D asociada a H.

18 puntos

5. Sea el espacio vectorial R^3 con producto interno usual y $W = \{(z, -z, z)|z \in R\}$ un subespacio de R^3.

Determinar:

a) El complemento ortogonal $W^\perp$ y una de sus bases.

b) El vector $\underline{a} \in W$ más cercano a $\underline{v} = (1,1,0)$

16 puntos

6. Sea el espacio vectorial R^3 con producto interno usual y el operador lineal $T: R^2 \to R^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (-5x + 5y, 5x - 5y)$$

a) Demostrar que T es un operador simétrico.

b) Determinar los espacios característicos de T.

c) Obtener la descomposición espectral de T.

18 puntos