



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
ÁLGEBRA LINEAL



SEMESTRE 2025-1

TIPO A

NOMBRE: _____ NO. DE CUENTA: _____

INSTRUCCIONES:

Lea cuidadosamente los enunciados de los **5 reactivos** que componen el examen antes de comenzar a resolverlo. La duración máxima del examen es de **2 horas**. **Para la realización del examen no se permite el uso de calculadora o cualquier dispositivo electrónico ni de formulario.**

1. Sea el sistema algebraico $(M, \circ)$, donde $\circ$ representa la composición de dos funciones $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y M es un conjunto de funciones reales de variable real formado por $f(x)$; $g(x)$ y $h(x)$; cuyas respectivas reglas de correspondencia son:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} ; g(x) = \frac{x-1}{x} ; h(x) = x$$

- a) Completar la siguiente tabla para la operación binaria mencionada.

$\circ$	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
$f(x)$		$h(x)$	
$g(x)$	$h(x)$	$f(x)$	
$h(x)$			$h(x)$

- b) Considerando que la composición es asociativa, determinar si $(M, \circ)$ es un Grupo Abeliano. En caso de no ser así, indicar que propiedades se cumplen.

20 puntos

2. Sea W el subespacio generado por las matrices

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & \mathbf{a} \end{pmatrix} \right\}$$

Determine:

- a) El valor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ para que la dimensión sea dos.
- b) Una base de W utilizando el valor obtenido en el inciso anterior.

20 puntos

3. Sea la transformación lineal $T : P \rightarrow M_{2 \times 2}$; donde $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y

$$M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}. \text{ Se conoce que:}$$

$$T(x - 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} ; \quad T(-3x + 6) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} ; \quad T(2x) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine

- a) La regla de correspondencia de la transformación T .
- b) La imagen del polinomio $r(x) = 5x + 2$

20 puntos

4. Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por el conjunto

$$G = \{(1, 1, 1), (2, 1, -1)\}$$

Determine el complemento ortogonal $W^\perp$ respecto al producto interno usual en $\mathbb{R}^3$.

20 puntos

5. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y el operador lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y, z) = (2x + y, \quad x + 2y, \quad z)$$

Determine la descomposición espectral del operador T .

20 puntos