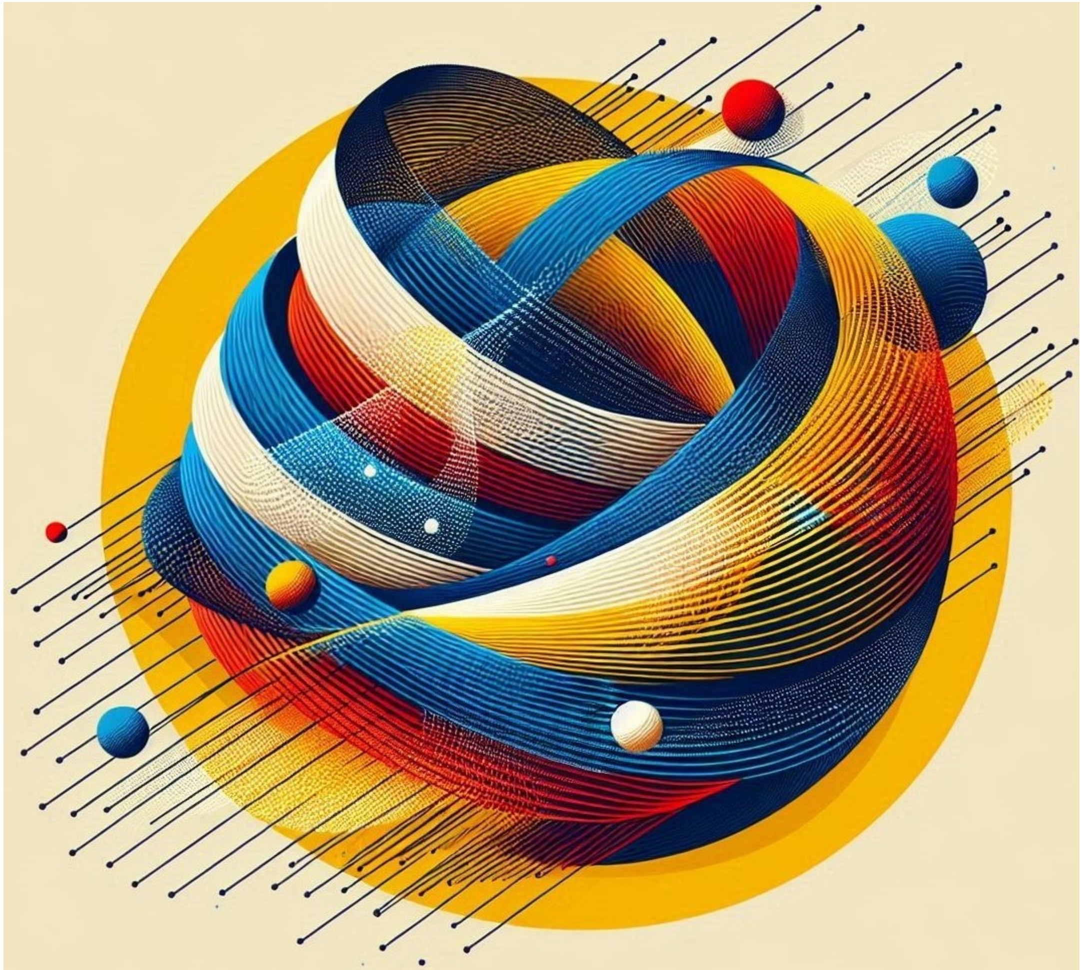
Álgebra Lineal 1220



Espacios Vectoriales

Recopilación de ejercicios sugeridos para el tema de *Espacios Vectoriales* de la asignatura de *Álgebra Lineal.*

Autores:

- Sofía Magdalena Ávila Becerril
- Roberto Guzmán González
- Aldo Jiménez Arteaga
- Rosalba Rodríguez Chávez
- Juan Gustavo Rueda Escobedo

2.1 Ejercicios

Ejercicio 2.1

Determine el valor o los valores de $m \in \mathbb{R}$ que hacen que la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sea de rango dos.

Ejercicio 2.2

Sea E, definido en (2.1), un subespacio del espacio vectorial real de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales ($E \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$).

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2a-5b & a-b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.1}$$

Determinar si cada uno de los subconjuntos

1. $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
2. $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \right\}$
3. $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

es una base de E. En caso afirmativo, obtener el vector de coordenadas del vector $\overline{v} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$ respecto a esa base.

Ejercicio 2.3

Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios:

1. $W_1 = \{(x, y, z)$ tal que $z = \mathrm{e}^y\}$.
2. $W_2 = \{(x, y, z)$ tal que $|x| = |y|\}$.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.4

Sea $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespacio generado por el conjunto de vectores

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine la dimensión de $\mathcal{E}$ y diga si el conjunto B es una base para $\mathcal{E}$ o no.

Ejercicio 2.5

Sea $\mathbf{P}_2(x)$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado dos o menor, es decir, polinomios de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Considere las siguientes dos bases para $\mathbf{P}_2(x)$:

$$\mathcal{B}_1 = \{1 - x,\, x - x^2,\, 1 + x^2\},$$
$$\mathcal{B}_2 = \{2x + x^2,\, -2 + x^2,\, 1 + 2x^2\}.$$

Proporciones la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.

Ejercicio 2.6

Considere el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ con bases $\mathcal{A} = \{a_1,\, a_2,\, a_3\}$ y $\mathcal{B} = \{b_1,\, b_2,\, b_3\}$. Con respecto a la base $\mathcal{A}$ se sabe que los vectores de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ son

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \; b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}, \; b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{A}}.$$

A partir de esta información, determine la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 2.7

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}}_{=b}.$$

A partir del análisis del espacio columna de A, determine si el sistema es compatible o no.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.8

Escribe una *V* o una *F* en el paréntesis correspondiente a cada proposición según sea verdadera o falsa de acuerdo al enunciado.

( ) Sea $M = \{(x,\, y,\, 2x - 3y) \,|\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$ un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales en $\mathbb{R}^3$. Una base de M es $\{(1, 0, 2),\, (0, 1, -3)\}$.

( ) Para que el conjunto A, definido en (2.2), sea linealmente dependiente, el parámetro m debe pertenecer al conjunto $\{m \in \mathbb{R} \,|\, m \neq -1\}$.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2m \\ 2m & -2 \end{bmatrix} \right\}. \tag{2.2}$$

( ) Considere la matriz A definida en (2.3). Si $b = 4$ entonces el rango de A es 2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & b \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

( ) Sea B el conjunto definido en (2.4). Entonces, el conjunto generado por B es $L(B)$:

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\}, \qquad L(B) = \left\{ \begin{bmatrix} a & ci \\ -ci & b \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2.4}$$

Ejercicio 2.9

Sean el plano $P = \{(x,\, y,\, z) \,|\, x - y + z = 0\}$ y la recta $L = \{(x,\, y,\, z) \,|\, x - 1 = 2y - 2 \text{ y } z = 3\}$. Determine si el conjunto que resulta de la intersección entre el plano P y la recta L es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 2.10

Sean $A = \{a_1,\, a_2\}$, $B = \{b_1,\, b_2\}$ y $C = \{c_1,\, c_2\}$ bases del espacio $\mathbb{R}^2$. Se sabe que

$$a_1 = 2b_1 + b_2,$$
$$a_2 = -b_1 + 3b_2.$$

Además, la matriz de cambio de base de la base B a la base C es

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obtener:

a) La matriz de cambio de base de la base A a la base C.

b) El vector de coordenadas del vector v respecto a la base B si el vector de coordenadas de v respecto a la base C es

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}_C .$$

Ejercicio 2.11

Verificar si $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial real con la suma vectorial y la multiplicación por un escalar definidas como

$$(a,\, b) + (c,\, d) = (a + c + 1,\, b + d),$$
$$k(a,\, b) = (k + ka - 1,\, kb).$$

Ejercicio 2.12

Sea $\mathbf{P}_2(x)$ el espacio de polinomios con coeficientes reales de grado dos o menor. Considere el conjunto $\mathbf{H}(x) \subset \mathbf{P}(x)$ definido como $\mathbf{H}(x) = \{ax^2 + bx + c \,|\, a + 3b - c = 0;\ a, b, c \in \mathbb{Z}\}$. Considerando las operaciones usuales en $\mathbf{P}_2(x)$, haga lo siguiente:

a) Verifique si la suma vectorial y la multiplicación por un escalar son cerradas en $\mathbf{H}(x)$.

b) Diga si $\mathbf{H}(x)$ es un subespacio de $\mathbf{P}_2(x)$.

Ejercicio 2.13

Determinar el valor de k para que el polinomio $p(x) = x^2 + k$ sea combinación lineal de los polinomios del conjunto $\{x^2 + x, x + 1\}$.

Ejercicio 2.14

Dados los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$A = \big\{(a, b, c) \;\big|\; 2a - b = 0;\ a, b, c \in \mathbb{R}\big\},$$
$$B = \big\{(a, b, c) \;\big|\; b = c;\ a, b, c \in \mathbb{R}\big\}.$$

Demostrar que el subconjunto $A \cap B$ es un subespacio del espacio $\mathbb{R}^3$ sobre el campo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.15

Considere el conjunto $A = \{(i, 1 + i)\,, (1 + 2i, 3 + i)\,, (1, 1 - i)\}$ con elementos pertenecientes a $\mathbb{C}^2$. Haga lo siguiente:

a) Determine el espacio $L(A)$ generado por el conjunto A.

a) Obtenga una base para $L(A)$.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.16

Determine si el siguiente conjunto es linealmente independiente o no:

$$H = \left\{\cos^2(x), \operatorname{sen}^2(x), \cos(2x)\right\}.$$

2.2 Respuestas

- **Ejercicio 2.1:** El valore es $m = 0$.
- **Ejercicio 2.2:** Sólo B es una base de E. Las coordenadas de $\overline{v}$ con respecto a B son:

$$\left[\overline{v}\right]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- **Ejercicio 2.3:** Ninguno es subespacio.
- **Ejercicio 2.4:** El máximo número de vectores linealmente independientes en B es dos. Por lo tanto, la dimensión de $\mathcal{E}$ es dos y B no es una base para este subespacio.
- **Ejercicio 2.5:** La matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$ es

$$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -3 & -3 & -2 \\ 4 & -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

- **Ejercicio 2.6:** A partir de la información proporcionada, se pude construir directamente la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{A}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

  La matriz de cambio de base de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{B}$ se corresponde con la inversa de esta matriz, la cual es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- **Ejercicio 2.7:** El sistema es compatible ya que b es elemento del espacio columna de la matriz A. En particular, se tiene que

$$b = \begin{bmatrix} -5 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- **Ejercicio 2.8:** *V*, *F*, *V*, *V*.
- **Ejercicio 2.9:** La intersección consiste únicamente del punto $(-5, -2, 3)$. Esto no resulta en un subespacio.
- **Ejercicio 2.10:**

a) La matriz de cambio de base de la base A a la base C es

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

b) El vector de coordenadas de v con respecto a la base B es

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B .$$

- **Ejercicio 2.11:** $\mathbb{R}^2$ si es un espacio vectorial real con las operaciones definidas.
- **Ejercicio 2.12:** $\mathbf{H}(x)$ no es un subespacio de $\mathbf{P}_2(x)$ porque $\mathbf{H}(x)$ no es cerrado respecto a la multiplicación por escalares.
- **Ejercicio 2.13:** Con $k = -1$ el polinomio $p(x)$ es combinación lineal del conjunto $\{x^2 + x,\, x + 1\}$.
- **Ejercicio 2.14:** La intersección $A \cap B$ sí es un subeapacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
- **Ejercicio 2.15:**

  a) $L\,(A) = \left\{\alpha\,(1, 1 - i) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C}\right\} = \left\{(\alpha, \alpha - \alpha i) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{C}\right\}$.

  a) Una base es $B_{L(A)} = \{(1, 1 - i)\}$.
- **Ejercicio 2.16:** El conjunto H es linealmente dependiente.