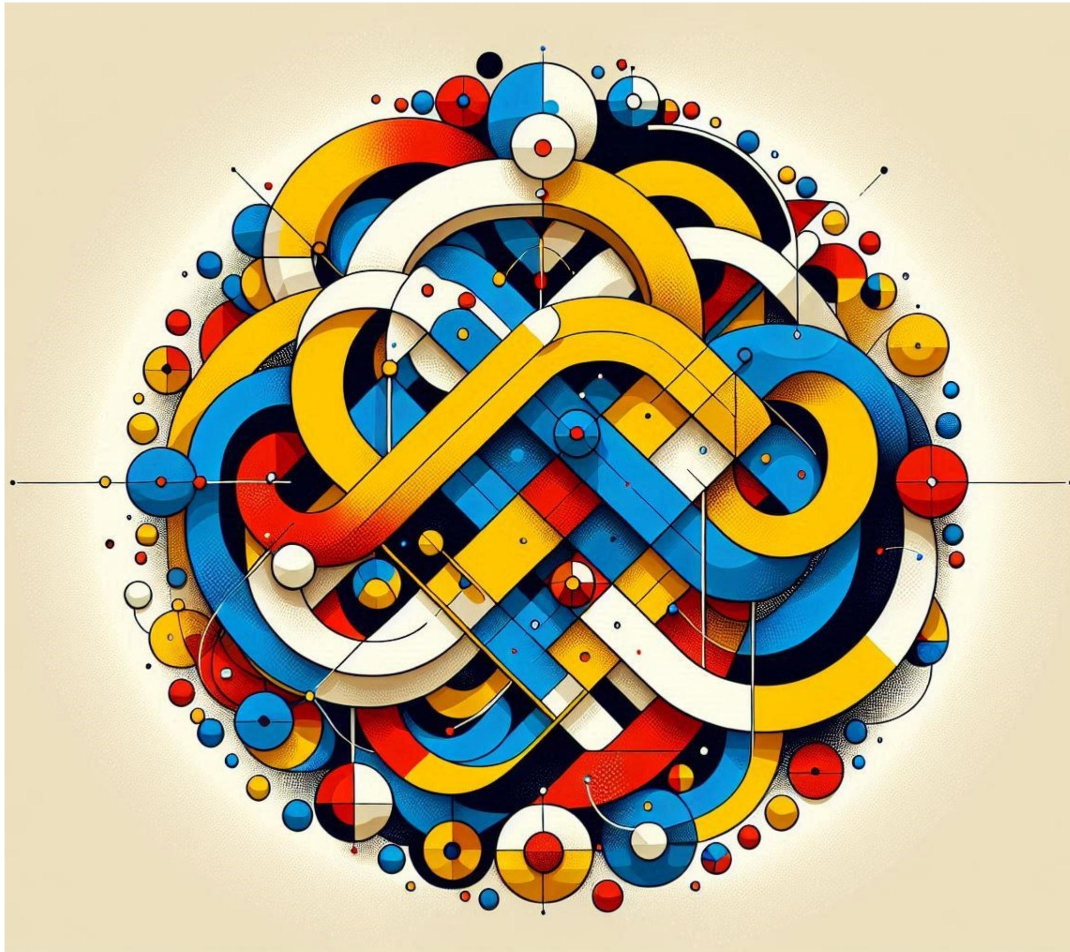
División de Ciencias Básicas

Álgebra Lineal 1220



Grupos y Campos

Recopilación de ejercicios sugeridos para el tema de *Grupos y Campos* de la asignatura de *Álgebra Lineal.*

Autores:

- Sofía Magdalena Ávila Becerril
- Roberto Guzmán González
- Aldo Jiménez Arteaga
- Rosalba Rodríguez Chávez
- Juan Gustavo Rueda Escobedo

1.1 Ejercicios

Ejercicio 1.1

Considere al conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$. La operación binaria $\oplus$ está definida por la tabla que se muestra a continuación. Sin embargo, la tabla está incompleta. Complete la tabla para que la estructura $\{\mathcal{A}, \oplus\}$ resulte en un grupo abeliano.

$\oplus$	0	1	2
0	–	1	2
1	–	2	–
2	2	0	1

Ejercicio 1.2

Sean la operación $\star$ definida por

$$x \star y = x\,\overline{y}, \quad x, y \in \mathbb{C},$$

donde $\overline{y}$ es el conjugado del número complejo y. Verificar si la operación $\star$ es asociativa.

Ejercicio 1.3

Sea M el conjunto de matrices de 2×2 y sea $\star$ la operación binaria multiplicación de matrices. Determine si el sistema $\{M, \star\}$ es un grupo.

Ejercicio 1.4

Un ejemplo de un grupo abeliano es el conjunto $H = \{1, 2, 3, 4\}$ y la operación $\star$ definida como el módulo 5. La operación $\star$ consiste en el residuo de multiplicar los números y al resultado dividirlo entre cinco. Considere los siguientes ejemplos son:

- $1 \cdot 1 = 1$, con residuo 1 al dividir por 5. Entonces $1 \star 1 = 1$.
- $2 \cdot 2 = 4$, con residuo 4 al dividir por 5. Entonces $2 \star 2 = 4$.
- $2 \cdot 4 = 8$ y $8 = 5 \cdot (1 + \frac{3}{5})$, es decir, el residuo es 3 con respecto a 5. Entonces $2 \star 4 = 3$.
- $3 \cdot 4 = 12$ y $12 = 5 \cdot (2 + \frac{2}{5})$, es decir, el residuo es 2 con respecto a 5. Entonces $3 \star 4 = 2$.

Usando la información anterior, realice lo siguiente:

1.1. Ejercicios

a) Complete la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|cccc} \star & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & - & - & - \\ 2 & - & 4 & - & 3 \\ 3 & - & - & - & 2 \\ 4 & - & - & - & - \end{array}.$$

b) Determine el elemento idéntico del grupo $\{H, \star\}$.

c) Determine el elemento inverso de cada elemento de H.

Ejercicio 1.5

Un campo está dado por el conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1, a\}$ y las operaciones suma $\oplus$ y multiplicación $\odot$ definidas en las siguientes tablas.

$$\begin{array}{c|ccc} \oplus & 0 & 1 & a \\ \hline 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \odot & 0 & 1 & a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & a & 1 \end{array}.$$

Si $\overline{x}$ denota al inverso aditivo de x y x^{-1} al inverso multiplicativo, determine el resultado de la siguiente operación:

$$(a \odot \overline{a}) \oplus (1 \odot a^{-1}) =$$

Ejercicio 1.6

Sea $\mathbb{R}_{<0}$ el conjunto de los números reales negativos donde se define la operación

$$x \oplus y = -\alpha\, xy \qquad x, y \in \mathbb{R}_{<0}.$$

Detremine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el elemento idéntico de $\oplus$ sea $e = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ejercicio 1.7

Sean el conjunto $\mathcal{H}$ de matrices cuadradas de orden dos ($\mathcal{H} = \mathbb{R}^{2\times 2}$) con determinante uno (si $A \in \mathcal{H}$ entonces $\det(A) = 1$) y la operación $\star$ definida por $A \star B = A \cdot B$. Verificar si el sistema $\{\mathcal{H}, \star\}$ forma un grupo abeliano.

1.1. Ejercicios

Ejercicio 1.8

Sea el conjunto $L = \{mx + b \,|\, m \neq 0;\ m, b \in \mathbb{R}\}$, donde se define la composición de funciones y se denota por $\circ$. Determina si el sistema $(L, \circ)$ forma un grupo abeliano.

Ejercicio 1.9

Sean X un subconjunto de los reales, $E(X)$ el conjunto de funciones $f : X \to X$ y sea $\circ$ la operación composición, definida como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall f, g \in E(X).$$

Determine bajo qué condiciones $\{E(X), \circ\}$ es un grupo.

Ejercicio 1.10

Considere el campo formado por el conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ y las operaciones suma $\oplus$ y multiplicación $\odot$ definidas en la siguiente tabla:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\odot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

.

Usando las propiedades de las operaciones $\oplus$ y $\odot$, en particular las de elemento neutro e inverso, encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (2 \odot x) \oplus (3 \odot y) &= 3, \\ (x) \oplus (2 \odot y) &= 2. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.11

Sea $\mathbb{R}^3$ y el conjunto $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, tal que S puede ser definido como $\mathbb{R}^4$. Defina la operación binaria $\star$ como:

$$(a, \overline{u}) \star (b, \overline{v}) = (ab - \overline{u} \cdot \overline{v},\ a\overline{v} + b\overline{u} + \overline{u} \times \overline{v}) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \forall\, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^3,$$

donde $\cdot$ y $\times$ denotan el producto punto y el producto cruz en $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Muestre si $(S, \star)$ cumple las propiedades de cerradura y asociatividad.

1.2 Respuestas

- **Ejercicio 1.1:** La tabla queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c|ccc} \oplus & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}.$$

- **Ejercicio 1.2:** La operación no es asociativa.
- **Ejercicio 1.3:** No es un grupo porque no todo elemento de M tiene elemento inverso.
- **Ejercicio 1.4:**

  a) La tabla es

$$\begin{array}{c|cccc} \star & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}.$$

  b) El idéntico del grupo es $e = 1$.

  c) Los inversos son: $\overline{1} = 1$, $\overline{2} = 3$, $\overline{3} = 2$, $\overline{4} = 4$

- **Ejercicio 1.5:** El resultado de la operación es 1.
- **Ejercicio 1.6:** $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- **Ejercicio 1.7:** La operación $\star$ no es conmitativa, por lo tanto, la estructura no es un grupo abeliano.
- **Ejercicio 1.8:** El sistema es un grupo, pero no es un grupo abeliano.
- **Ejercicio 1.9:** Se requiere que:

  a) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ siempre sea una función bien definida con dominio y codominio en X. Esto garantiza cerradura.

  b) la función $f(x) = x$ sea elemento de $E(X)$. Así, existe elemento idéntico.

  c) el conjunto $E(X)$ esté formado por funciones biyectivas. Esto permite que cada elemento tenga inverso.

- **Ejercicio 1.10:** El conjunto de soluciones del sistema es el siguiente:

Valor de x	0	1	2	3
Valor de y	1	2	0	3

- **Ejercicio 1.11:** Se cumple con cerradura pero no con asociatividad.