APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DIFERENCIABLE

Se dice que una función *y=f(x)* es diferenciable en un punto si su incremento puede escribirse de la forma

$$\Delta f = g(x)\Delta x + h(x, \Delta x)\Delta x$$

y es tal que $g(x)$ no depende de los incrementos Δx y

$h(x, \Delta x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Ejemplo: Determinar si la función $f(x) = x^2 + 3x$ es diferenciable.

Calculemos el incremento Δf

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)$$

$$\Delta f = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x - (x^2+3x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x$$

$$\Delta f = (2x+3)\Delta x + (\Delta x)\Delta x$$

si hacemos $g(x) = (2x+3)$, $h(x,\Delta x) = \Delta x$ se tiene

que $\Delta f = g(x)\Delta x + h(x,\Delta x)\Delta x$ donde $g(x)$ no depende de Δx y $h(x,\Delta x) = \Delta x \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ por lo tanto, podemos decir que la función $y = f(x)$ es diferenciable.

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Se tiene entonces que si *y=f(x)* es diferenciable, su incremento se puede expresar como $\Delta f = g(x)\Delta x + h(x,\Delta x)\Delta x$, pero surge la pregunta **¿quién o qué es *g(x)*?**

Para responder la pregunta, dividamos Δf entre Δx, de este modo se tiene que

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{g(x)\Delta x + h(x,\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = g(x) + h(x,\Delta x)$$

tomando el límite de $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$ se tiene

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{g(x)\Delta x + h(x,\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} g(x) + \lim_{\Delta x \to 0} h(x,\Delta x) = g(x) + 0$$

de donde se tiene que $f'(x) = g(x)$ por lo tanto

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + h(x,\Delta x)\Delta x$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Se tiene entonces que el incremento de una función diferenciable $y = f(x)$ se puede escribir como

$$\Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\textbf{Diferencial de } f} + \underbrace{h(x,\Delta x)\Delta x}_{\textbf{término no líneal}}$$

al primer término $f'(x)\Delta x$ se le llama *diferencial de f* y se representa por $d f(x) = f'(x)\Delta x$ y al segundo término $h(x,\Delta x)\Delta x$ se le conoce como *término no lineal* .

Ahora si consideramos a la función identidad $f(x)=x$, se tiene que $f'(x)=1$ por lo que $d f(x) = \Delta x$, pero como $y = f(x) = x$ se tiene que $dx = \Delta x$ por lo que podemos reescribir a la diferencial de f como

$$d f(x) = f'(x)\, dx \rightarrow \qquad \frac{d f(x)}{dx} = f'(x)$$

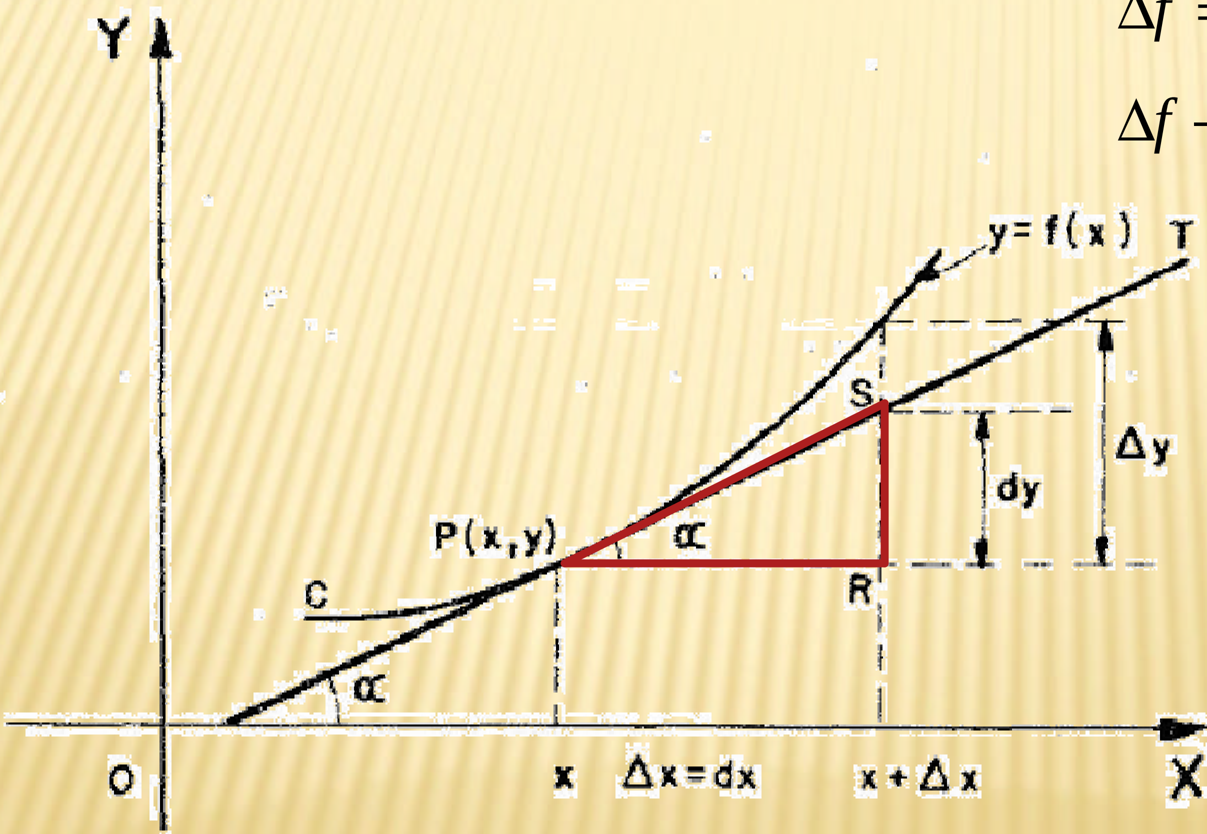
APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Interpretación geométrica.

$$\Delta f = f'(x)dx + h(x,\Delta x)\Delta x$$

$$\Delta f = df + h(x,\Delta x)\Delta x$$

$$\Delta f - df = h(x,\Delta x)\Delta x$$



$$\tan a = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Puesto que la diferencial de la función y = *f (x)* es una nueva función de *x* podemos volver a diferenciarla es decir:

Sea $d\,f(x) = f'(x)\,dx$ al diferenciar nuevamente la función se tiene

$$d(d\,f(x)) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\,dx\right)dx$$

puesto que que se deriva respecto a *x* , *dx* se considera constante, por lo tanto la segunda diferencial de la función está dada por

$$d(d\,f(x)) = \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right)dx\,dx$$

$$d^2 f(x) = f''(x)\,(dx)^2$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

al continuar repitiendo el proceso se obtendrán las diferenciales sucesivas

$$d^3 f(x) = f'''(x)\,(dx)^3$$

$$d^4 f(x) = f^{IV}(x)\,(dx)^4$$

$$d^5 f(x) = f^{V}(x)\,(dx)^5$$

$$\vdots$$

$$d^n f(x) = f^{n}(x)\,(dx)^n$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

¿ Qué pasa con el término no lineal $h(x, \Delta x)\Delta x$ del incremento?

¿Para qué sirven las diferenciales sucesivas?

¿La diferencial sólo sirve para calcular el valor aproximado del $\cos 46^\circ$ y cosas así?

CONTINUEMOS

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Supongamos que una función *f (x)*, la podemos representar por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-.a)^4 + c_5(x-a)^5 + c_6(x-a)^6 + \ldots$$

entonces al derivarla sucesivamente n veces obtenemos

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + 5c_5(x-.a)^4 + 6c_6(x-a)^5 + \ldots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3(2)c_3(x-a) + 4(3)c_4(x-a)^2 + 5(4)c_5(x-.a)^3 + 6(5)c_6(x-a)^4 + \ldots$$

$$f'''(x) = 3(2)c_3 + 4(3)(2)c_4(x-a) + 5(4)(3)c_5(x-.a)^2 + 6(5)(4)c_6(x-a)^3 + \ldots$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + \frac{(n+2)!}{2}c_{n+2}(x-.a)^2 + \frac{(n+3)!}{2(3)}c_{n+3}(x-a)^3 + \ldots$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Al valuar a la función y sus derivadas sucesivas en $x = a$ se obtiene:

$$f(a) = c_0 \;,\; f'(a) = c_1 \;,\; f''(a) = 2c_2 = 2!c_2 \;,\; f'''(a) = 3(2)c_3 = 3!c_3 \;,\; f^n(a) = n!c_n$$

de donde los valores de las constantes son

$$c_0 = f(a) \;,\; c_1 = f'(a) \;,\; c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \;,\; c_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \;,\; c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$$

finalmente se tiene que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

expresión que al representarla por medio del símbolo de sumatoria queda

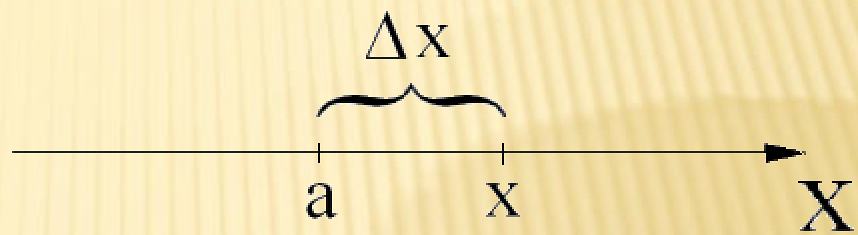
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

SERIE DE TAYLOR

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

ahora, de acuerdo a la figura

$$x - a = \Delta x$$



y como $\Delta x = dx$; $x - a = d\,x$

por lo que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(dx)^n}{n!}$

f

si recordando que la diferencial n-esima está dada por $d^n f(x) = f^n(x)(dx)^n$, al valuarla en $x = a$ se obtiene $d^n f(a) = f^n(a)(dx)^n$, y sustituyendola se llega a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(a)}{n!} = f(a) + f'(a)dx + \frac{f''(a)(dx)^2}{2} + \frac{f'''(a)(dx)^3}{6} + \cdots$$

expresión mediante la cual es posible representar una función f por una suma infinita de sus diferenciales sucesivas en un punto $x = a$.

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

$$f(x) = f(a) + f'(a)dx + \frac{f''(a)(dx)^2}{2} + \frac{f'''(a)(dx)^3}{6} + \cdots$$

$$f(x) - f(a) = f'(a)dx + \frac{f''(a)(dx)^2}{2} + \frac{f'''(a)(dx)^3}{6} + \cdots$$

$$\Delta f(x) = \underbrace{f'(a)dx}_{\textit{Diferencial de f}} + \underbrace{\frac{f''(a)(dx)^2}{2} + \frac{f'''(a)(dx)^3}{6} + \cdots}_{\textit{término no líneal}}$$

Si se consideran sólo los *n* primeros términos, se obtendrá un polinomio *P(x)* de grado *n* llamado *Polinomio de Taylor* que es una aproximación de *f (x)*

$$f(x) \approx P(x) = f(a) + f'(a)dx + \frac{f''(a)(dx)^2}{2} + \frac{f'''(a)(dx)^3}{6} + \cdots + \frac{f^n(a)(dx)^n}{n!}$$

Taylor1.ggb Taylor2.ggb

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Consideremos la función $z = f(x, y)$, la diferencial total de f está dada por $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ y del mismo modo que una función $y=g(x)$ tiene una segunda diferencial, $f(x,y)$ también la tiene siendo esta

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

y al sustituir en la expresión

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!}$$

obtenemos

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dy \right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} (dx)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dxdy + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} (dy)^2 \right) + \cdots$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Si consideramos los tres primeros términos, obtendremos una aproximación de la función *f(x,y)* alrededor del punto (x_0, y_0) dada por

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dy +$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} (dx)^2 + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dxdy + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} (dy)^2$$

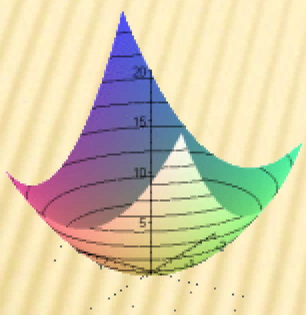
que corresponde a una expresión de la forma

$$z = F + Dx + Ey + Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

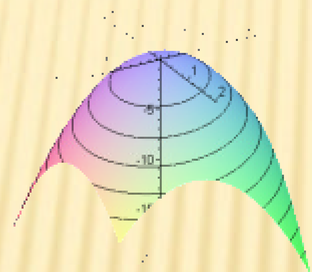
$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

la expresión anterior corresponde a una superficie cuadrática cuya forma depende del signo del término $\Delta = 4AC - B^2$ donde



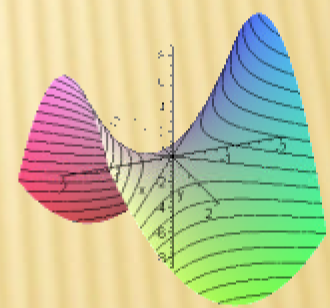
$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} > 0$$



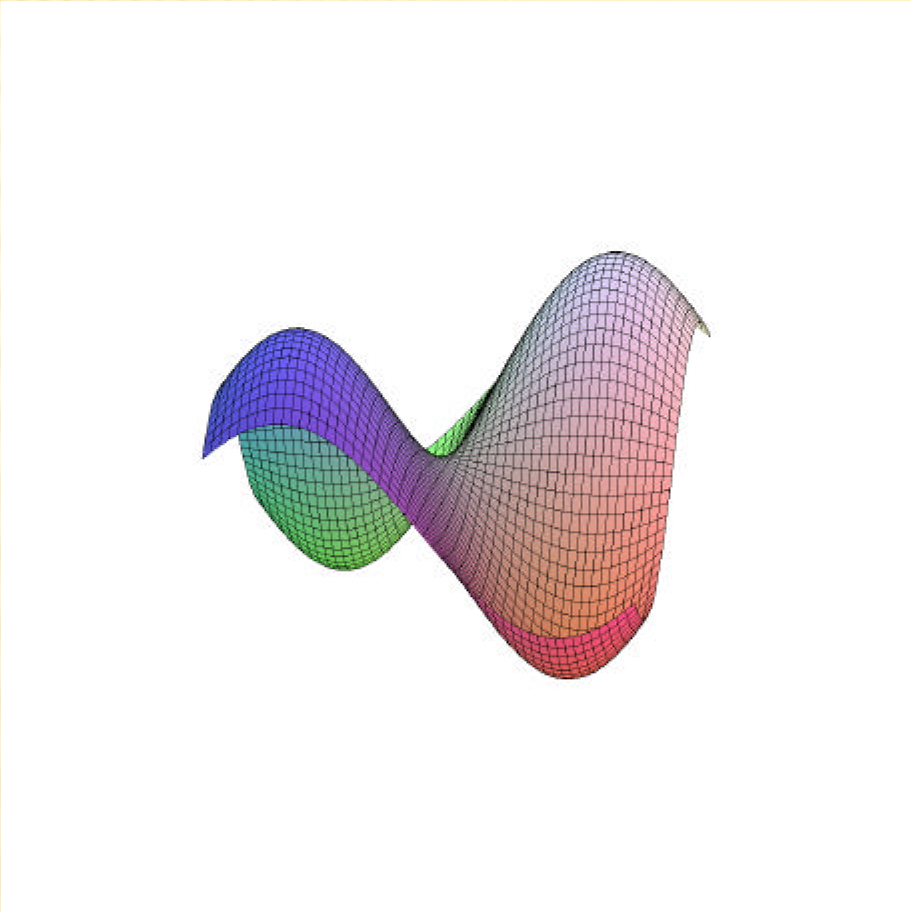
$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

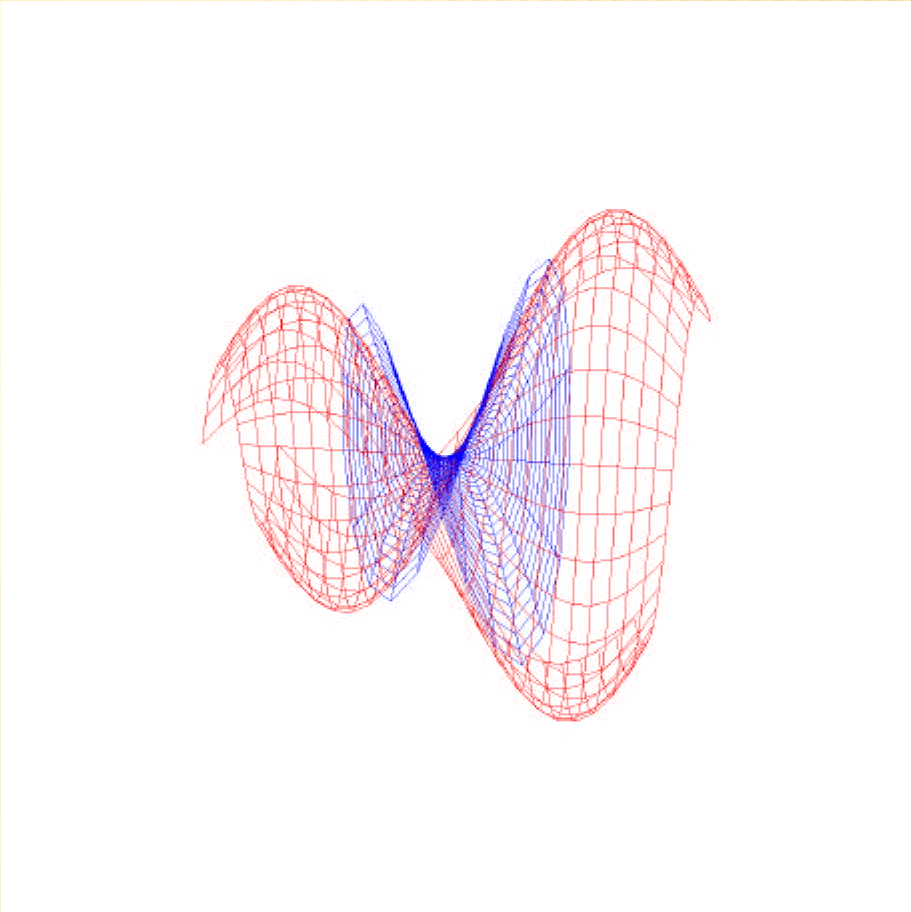
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} < 0$$

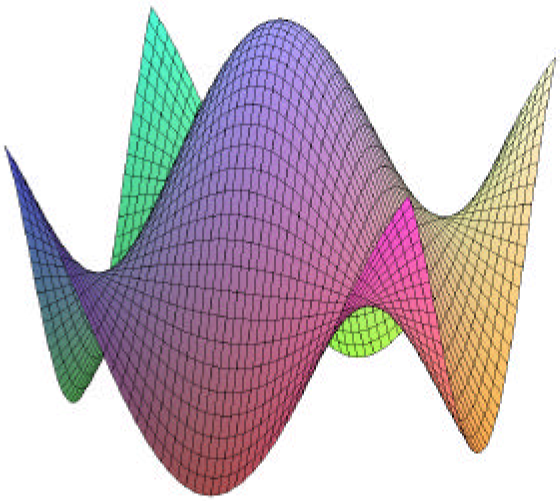


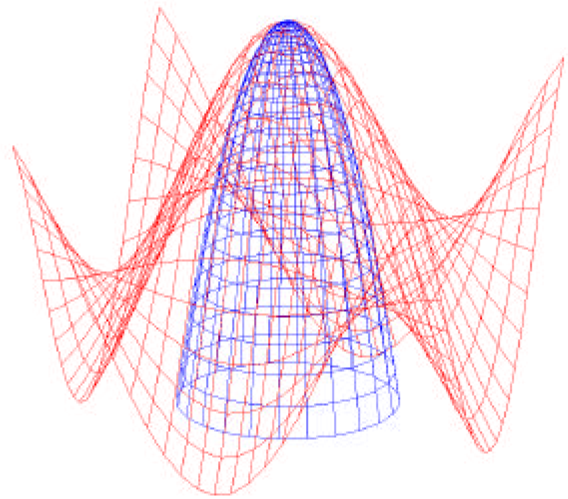
$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0$$

aprox 2da deriv 1.mws









APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

DERIVADA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

Sea la función $F(x,y,z)=0$ donde $z=f(x,y)$, calcular la las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

Para calcular las derivadas parciales indicadas, sería necesario despejar de la expresión $F(x,y,z)=0$ la variable z, labor que en la mayoría de los casos es muy complicada y más difícil que la obtención de la misma derivada.

Por ejemplo: si tratamos de despejar la variable z de la expresión $z^2x-e^{zy}=0$, podremos hacer muchos intentos sin lograrlo. Por tal razón es muy conveniente establecer un método de derivación que no requiera de despejar a z.

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Consideremos la función $F(x,y,z)=0$ donde $z=f(x,y)$

al diferenciar ambas expresiones obtenemos de la primera

$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$ y de la segunda $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

al sustituir dz en dF se tiene

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=0$$

factorizando dx y dy

$$dF=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=0$$

para garantizar que la expresión anterior se cumple para todo valor de las variables x , y , se tiene que $dx=dy=0$, pero esta condición no es factible ya que si se cumpliera, resultaría que las variables x, y serían constantes, por lo tanto la condición será

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

de donde al despejar las derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ se tiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

así, si $z^2x-e^{zy}=0$ haciendo $F=z^2x-e^{zy}=0$ se obtiene que

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{z^2}{-ye^{zy}}=\frac{z^2}{ye^{zy}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{-ze^{zy}}{-ye^{zy}}=\frac{-z}{y}$$

¡¡no fue tan difícil!!

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

DERIVADA DE SISTEMAS DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

En geometría analítica del espacio, se establece que una curva tiene por ecuaciones

$$C:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

expresión que representa un sistema de funciones implícitas. Como sabemos una curva puede representarse mediante sus ecuaciones paramétricas de la forma

$$C:\begin{cases} x=h(t) \\ y=f(t) \\ z=g(t) \end{cases}$$

Si definimos a la variable x como el parámetro t de la curva obtenemos

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

$$C:\begin{cases} x = t \\ y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

donde para analizar la curva C se requiere calcular las derivadas de las funciones $y = f(x)$; $z = g(x)$, pero como ya se comentó, el problema de obtener las ecuaciones paramétricas de C puede ser más complicado que la misma obtención de las derivadas requeridas. Por lo tanto conviene establecer la forma de calcular las derivadas de $y = f(x)$ y $z = g(x)$ a partir de el sistema de funciones implícitas

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Sea el sistema de funciones implícitas *F(x,y,z)=0* y *G(x,y,z)=0* donde *y=y(x)* y *z = z(x)* al diferenciar las funciones se obtiene

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0\;;\; dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz = 0\;;\; dy = \frac{dy}{dx}dx\;;\; dz = \frac{dz}{dx}dx$$

; Sustituyendo *dy* y *dz* en *dF* y *dG*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}dx\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{dz}{dx}dx\right) = 0$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}dx\right) + \frac{\partial G}{\partial z}\left(\frac{dz}{dx}dx\right) = 0$$

factorizando *dx*

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0 \qquad dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0$$

como $dx \neq 0$ y para que las ecuaciones se cumplan para toda x

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0 \qquad \frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0$$

reorganizando las expresiones se llega al sistema lineal

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx}=-\frac{\partial G}{\partial x}$$

de la forma

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

donde los coeficientes son $a_{11}=\frac{\partial F}{\partial y}$; $a_{12}=\frac{\partial F}{\partial z}$; $a_{21}=\frac{\partial G}{\partial y}$; $a_{22}=\frac{\partial G}{\partial z}$

las incógnitas son $x_1=\frac{dy}{dx}$; $x_2=\frac{dz}{dx}$

y los términos independientes $b_1=-\frac{\partial F}{\partial x}$; $b_2=-\frac{\partial G}{\partial x}$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Al aplicar la regla de Cramer para resolver el sistema se llega a

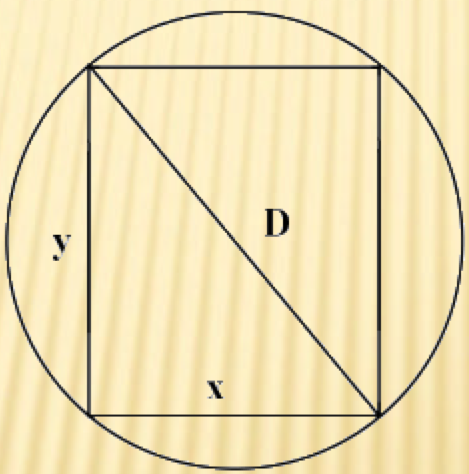
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{J\left|\dfrac{F\,G}{x\,z}\right|}{J\left|\dfrac{F\,G}{y\,z}\right|}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}=-\frac{J\left|\dfrac{F\,G}{y\,x}\right|}{J\left|\dfrac{F\,G}{y\,z}\right|}$$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Ejemplo:

De un tronco de diámetro D , se desea obtener una viga que tenga una sección rectangular de área máxima, ¿cuáles deben ser las medidas de la sección de la viga?



Resolución:

Por un lado, el área de la sección de la viga está dada por $A = xy$ y del teorema de Pitágoras se tiene que $x^2 + y^2 = D^2$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

Definamos a $F(x,y,A)=xy-A=0$ y $G(x,y,A)=x^2+y^2-D^2=0$
donde $A=A(x)$ y $y=y(x)$
El punto crítico de se obtiene cuando $\frac{dA}{dx}=0$, así, de la derivada

; de sistemas de funciones implícitas se tiene que $$\frac{dA}{dx}=\frac{J\left|\frac{F\,G}{x\,y}\right|}{J\left|\frac{F\,G}{A\,y}\right|}=0$$

por lo tanto $J\left|\frac{F\,G}{x\,y}\right|=0$ siempre y cuando $J\left|\frac{F\,G}{A\,y}\right|\neq 0$

$$J\left|\frac{F\,G}{x\,y}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y & x\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=2y^2-2x^2=0 \quad\Rightarrow\quad y^2=x^2\Rightarrow\quad y=x$$

Sustituyendo en $x^2+y^2=D^2$ se tiene que $2x^2=D^2$ por lo finalmente $x=\frac{D}{\sqrt{2}}$ $y=\frac{D}{\sqrt{2}}$

APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

M.E.M. Enrique Arenas Sánchez

earenass@hotmail.com