UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***Ing. Luis Hernández Moreno***
M.E.M. Margarita Ramírez Galindo

12 de marzo de 2015 ***Semestre 2015-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Determinar el valor medio de la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$, en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

15 Puntos

---

2. Calcular, si existen:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x\left[\ln\left(\operatorname{sen} x\right)\right]$

$b)$ $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,(e)^{-x^2}\,dx$

20 Puntos

3. Efectuar las integrales:

$$a) \int x \, ln \left(1+x\right)^2 dx \qquad\qquad b) \int \frac{5}{\left(x-1\right)\left(x^2+9\right)} dx$$

20 Puntos

---

4. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de:

$$x = 2y^2 \qquad \text{y} \qquad x = 4 + y^2$$

15 Puntos

---

5. Comprobar que se cumple la siguiente igualdad

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en donde $z = senh\left(3x+y\right) - \cosh\left(x-2y\right)$

15 Puntos

---

6. Sea la función

$$f\left(x, y\right) = \frac{x^2}{y}$$

Determinar la dirección θ, tal que $\theta \in \left[\pi, 2\pi\right]$, en la cual la función f permanece constante a partir del punto $P\left(2, 1\right)$

15 Puntos

1. Sea

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \quad ; \qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{senx} \cos x\,dx = e^{senx}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = e^{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)} - e^{sen(0)} = e - 1$$

$$\Rightarrow f(c) = \frac{e-1}{\frac{\pi}{2}-0} = \boxed{\frac{2(e-1)}{\pi}} \text{ valor promedio}$$

15 Puntos

2.

a)

$$L = (0)(-\infty)$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln sen\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{sen\,x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

Nuevamente aplicando L'Hopital

$$\text{L}=-\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sec^2 x} = -\frac{0}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L=0}$$

b)

$$I = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_0^{\varepsilon} x e^{-x^2} dx$$

$$I = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\varepsilon}$$

$$I = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-\varepsilon^2} + \frac{1}{2}\right]_0^{\varepsilon}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}}$$

20 Puntos

3.

a) Por partes

$$I = 2\int x\,ln(1+x)dx = 2\left[\frac{x^2}{2}ln(1+x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}dx\right]$$

$$si \quad u = ln\,(1+x)\ ;\ \ dv = x\,dx$$

$$du = \frac{1}{1+x}dx\ ;\quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = x^2\,ln(1+x) - \int\left((x-1)+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$\boxed{I = x^2\,ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x - ln(x+1) + C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+9\right)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+9}$$

$$\Rightarrow 1 = A\left(x^2+9\right)+(Bx+C)(x-1)$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)x^2+(C-B)x+9A-C$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A=\frac{1}{10}} \quad \boxed{B=-\frac{1}{10}} \quad \boxed{C=-\frac{1}{10}}$$

$$I = 5\left[\frac{1}{10}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{10}\int\frac{x}{x^2+9}dx-\frac{1}{10}\int\frac{1}{x^2+9}dx\right]$$

$$I = \frac{5}{10}ln(x-1)-\frac{5}{20}ln\left(x^2+9\right)-\frac{5}{10}\bullet\frac{1}{3}ang\,tan\left(\frac{x}{3}\right)+C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}ln(x-1)-\frac{1}{4}ln\left(x^2+9\right)-\frac{1}{6}ang\,tan\left(\frac{x}{3}\right)+C}$$

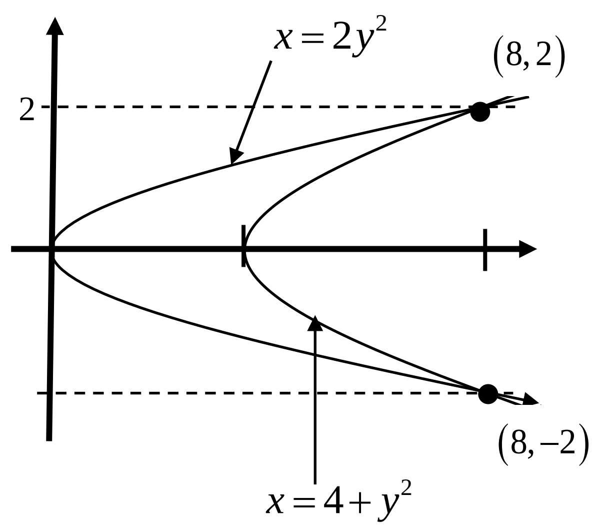
20 Puntos

4.

$$A = 2\int_0^2\left[\left(4+y^2\right)-\left(2y^2\right)\right]dy$$

$$= 2\int_0^2\left(4-y^2\right)dy = 4y-\frac{y^3}{3}\Big]_0^2$$

$$A = 2\left(\frac{16}{3}\right)=\frac{32}{3}u^2 \qquad \boxed{A=\frac{32}{3}u^2}$$



15 Puntos

5.

$$\frac{\delta z}{\delta x} = 3\cosh(3x+y) - senh(x-2y)\ , \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = 9senh(3x+y) - \cosh(x-2y)$$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \cosh(3x+y) + 2senh(x-2y)\ , \qquad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = senh(3x+y) - 4\cosh(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3senh(3x+y) + 2\cosh(x-2y)$$

$$\Rightarrow \qquad 2\left[9senh(3x+y) - \cosh(x-2y)\right]$$

$$-5\left[3senh(3x+y) + 2\cosh(x-2y)\right]$$

$$-3\left[senh(3x+y) - 4\cosh(x-2y)\right] = 0$$

$$(18-15-3)\,senh(3x+y) + (-2-10+12)\cosh(x-2y) = 0$$

$$\boxed{0 \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sí se satisface}}$$

15 Puntos

6.

Se requiere $\qquad \dfrac{dF}{ds} = 0$

en donde $\qquad \overline{\nabla f} = \left(\dfrac{2x}{y}, -\dfrac{x^2}{y^2}\right)_{P_0} = (4, -4)$

entonces $\qquad 4\cos\theta - 4sen\theta = 0$

$\tan\theta = 1$ $\qquad$ por lo que

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{4}} \quad y \quad \boxed{\theta_2 = \frac{5\pi}{4}} \quad \text{como} \quad \theta \in [\pi,\ 2\pi]$$

$$\therefore \quad \boxed{\theta = \frac{5\pi}{4}}$$

15 Puntos