UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales:* *M.I. Mayverena Jurado Pineda
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

14 de marzo de 2014 ***Semestre 2016-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Sea la función

$$g(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$$

definida en el intervalo $[0, 1]$. Calcular el valor medio de la función en el intervalo dado y determinar el valor de $C \in [0,1]$ que cumple con el Teorema del Valor Medio del Cálculo integral.

15 puntos

---

2. Calcular, si es que existe:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - senhx\right)^{\coth x}$$

15 puntos

3. Determine

$$a)\int \frac{x-20}{2x+x^2-8}\,dx \qquad\qquad b)\int ln\left(x-1\right)dx$$

20 Puntos

---

4. Calcular el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones $f\left(x\right)=-x^2-2$ y $g\left(x\right)=-x-2$

15 Puntos

---

5. Trazar la gráfica del dominio de la función f y obtener la ecuación que representa sus curvas de nivel, describiendo las características de las mismas.

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2+4y^2}}$$

15 Puntos

---

6. Sea la función $f\left(x,y\right)=\ln\left[\operatorname{sen}\left(x-y\right)\right]$, calcular

$$\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{\left(\frac{\pi}{4},\,0\right)}$$

20 Puntos

1.

$$g(c)=\frac{\int_0^1 g(x)\,dx}{1-0}=\frac{\int_0^1\left[1-(1-x)^{1/2}\right]dx}{1}$$

$$g(c)=x+\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\Big]_0^1=\left[1+\frac{2}{3}(0)\right]-\left[0+\frac{2}{3}\right]$$

$$\boxed{g(c)=\frac{1}{3}} \quad \text{si} \quad g(c)=1-\sqrt{1-c}\,, \qquad \text{entonces}$$

$$\frac{1}{3}=1-\sqrt{1-c} \qquad \text{de donde} \qquad \boxed{c=\frac{5}{9}}$$

15 puntos

2. La sustitución directa da

$$\lim_{x\to 0^+}(1-senhx)^{\coth x}=1^{\infty}$$

Sea entonces

$$y=(1-senhx)^{\coth x}$$

$$\ln y=\ln(1-senhx)^{\coth x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} (\coth x)\ln(1-\operatorname{senh}x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(1-\operatorname{senh}x)}{\tanh x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1-\operatorname{senh}x)^{\coth x} = \boxed{e^{-1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Resultado \\ \lim_{x\to 0^+} (1-\operatorname{senh}x)^{\coth x} = e^{-1} \end{array}}$$

15 puntos

3. a) Por fracciones parciales

Sea la fracción:

$$\frac{x-20}{(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} \ , \quad \text{entonces}$$

$$x-20 = A(x+4) + B(x-2)$$

$si \quad x = -4 \qquad\qquad si \quad x = 2$

$-24 = 6B \qquad\qquad -18 = 6A$

$\boxed{B = 4} \qquad\qquad \boxed{A = -3}$

Por lo que la integral queda

$$I = \int \frac{-3}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{x+4}\,dx$$

$$I = -\ln(x-2)^3 + \ln(x+4)^4 + c$$

$$\boxed{I = \ln\frac{(x+4)^4}{(x-2)^3} + c}$$

b) Por partes

$$u = ln(x-1) \qquad du = \frac{1}{x-1}dx$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$I = x\,ln(x-1) - \int \frac{1}{x-1}dx \qquad si \;\; \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

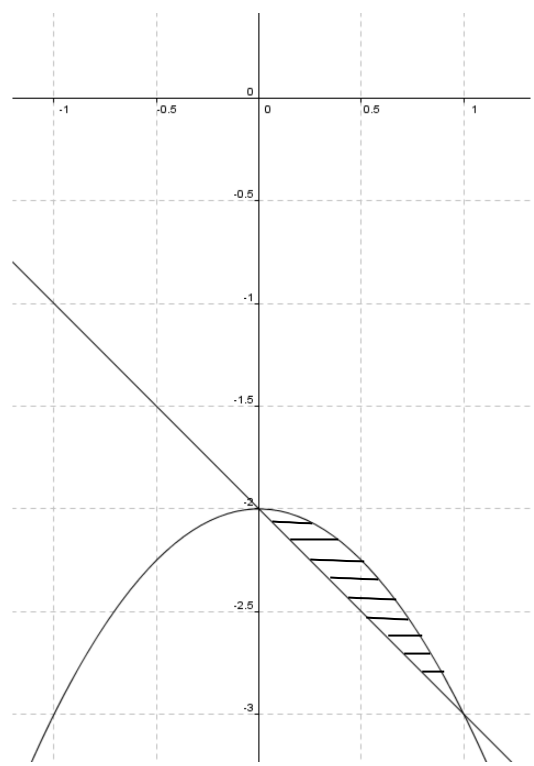
$$\Rightarrow I = x\,ln(x-1) - \int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$I = x\,ln(x-1) - x - ln(x-1) + c$$

$$\boxed{I = (x-1)ln(x-1) - x + c}$$

20 puntos

4. Sea la región



$$A = \int_0^1 \left[\left(-x^2-2\right)-\left(-x-2\right)\right]dx$$

$$A = \int_0^1 \left[-x^2-2+x+2\right]dx$$

$$A = \int_0^1 \left[-x^2+x\right]dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Bigg]_0^1$$

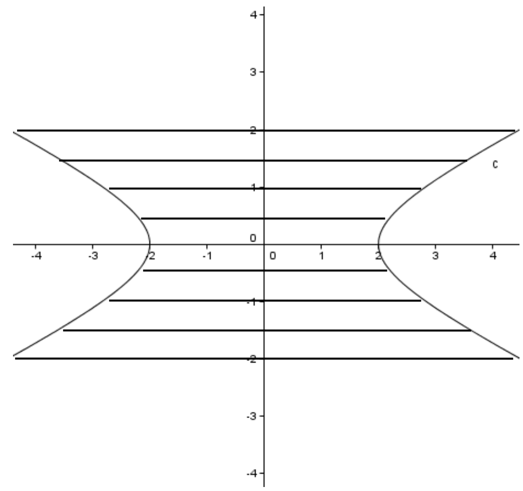
$$A = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{-2+3}{6} = \boxed{\frac{1}{6}\;u^2}$$

15 puntos

5. Debe cumplirse que $4-x^2+4y^2>0$ de donde $x^2-4y^2<4$ por lo que $\frac{x^2}{4}-y^2<1$

la gráfica será:

Para las curvas de nivel



$$z=\frac{1}{\sqrt{-x^2+4y^2}}$$

$$si \quad z=cte=c$$

$$4-x^2+4y^2=\frac{1}{c^2}$$

$$x^2+4y^2=4-\frac{1}{c^2}$$

$$\frac{x^2}{\left(4-\frac{1}{c^2}\right)}-\frac{y^2}{\frac{\left(4-\frac{1}{c^2}\right)}{4}}=1$$

Son hipérbolas con centro en el origen y con eje focal horizontal

15 puntos

6.

$$si \quad f(x,y)=\ln\left[sen(x-y)\right]$$

$$Sea \ \frac{\delta f}{\delta x}=\frac{\cos(x-y)}{sen(x-y)}=\cot(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\csc^2(x-y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=2\csc^2(x-y)\cot(x-y)=2\left(\sqrt{2}\right)^2(1)=\boxed{4}$$

20 puntos