UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: M.E.M. Margarita Ramírez Galindo
Ing. S. Carlos Crail Corzas

17 de marzo de 2017 **1221** ***Semestre 2017-2***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Escribir el número decimal periódico infinito $0.7777\ldots$ como una serie y determinar su carácter. Si es convergente, calcular su suma.

15 Puntos

---

2. Calcular, si existe:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(1 - \cos x \right)^{\sec x}$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las siguientes integrales:

$$a)\int \frac{x}{x^2 + x - 6}\, dx \qquad b)\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\, dx \qquad c)\int ln\left(x\right)^{2x}\, dx$$

30 Puntos

4. Calcular la longitud de la gráfica de la función el $f(x)=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ en el intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

10 Puntos

---

5. Calcular $\left.\frac{\partial^3 g}{\partial y\, \partial x^2}\right|_{(\ln 2, 2)}$ de la función $g(x, y)=y\,e^x - x\,e^y$.

15 Puntos

---

6. Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y)=\sqrt{9-y^2}$ en el punto $P\left(4, \sqrt{5}, 2\right)$.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL
1221
Solución del Primer Examen Extraordinario
Semestre 2017 – 2

1.-

Si $\quad 0.77777\ldots = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \dfrac{7}{1000} + \ldots$

entonces el número puede ser expresado como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

que es una serie geométrica donde $r = \dfrac{1}{10} < 1$

por lo tanto converge y la suma es:

$$S = \frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \boxed{\frac{7}{9}}$$

15 puntos

2.-

Si reescribimos la función como

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(1-\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}} = 1^{\infty}, \quad \text{sea}$$

$$y = \left(1-\cos x\right)^{\frac{1}{\cos x}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{\ln\left(1-\cos x\right)}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} ln\, y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{ln(1-cos\, x)}{cosx} = \frac{0}{0} \text{ al aplicar L'Hôpital}$$

$$ln\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} y\right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+}\left[\frac{\frac{sen\, x}{1-cos\, x}}{-sen\, x}\right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+}\left[\frac{-1}{1-cos\, x}\right] = -1$$

por lo tanto

$$\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (1-cos\, x)^{sec\, x} = \frac{1}{e}}$$

15 puntos

3. a) Por fracciones parciales:

$$\frac{x}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \;, \quad \text{entonces}$$

$$x = A(x+3) + B(x-2)$$

$si \quad x = -3 \qquad\qquad si \quad x = 2$

$-3 = -5B \qquad\qquad 2 = 5A$

$\boxed{B = \frac{3}{5}} \qquad\qquad \boxed{A = \frac{2}{5}}$

Por lo que la integral queda

$$I = \int \left(\frac{x}{x^2+x-6}\right) dx = \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$I = \frac{2}{5}\ln(x-2) + \frac{3}{5}\ln(x+3) + C$$

$$\boxed{I = \ln \sqrt[5]{(x-2)^2 (x+3)^3} + C}$$

1.

b) Es de la forma $\int u^n du$:

$$\int \left(1-e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{2x}dx = -\frac{1}{2}\int \left(1-e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-2e^{2x}dx\right) = \boxed{-\sqrt{1-e^{2x}}+C}$$

c)Por partes

$$\int \ln x^{2x}dx = \int 2x\ln x dx$$

$$u = 2\ln x \qquad dv = x$$

$$du = \frac{2}{x}dx \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$I = x^2\ln x - \int x\,dx$$

$$\boxed{I = x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C}$$

30 puntos

4.-

Sea

$$f\,'(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow \left[f\,'(x)\right]^2 = 4x$$

$$L = \int_0^{1/4} \sqrt{1+4x}\,dx = \frac{1}{6}\sqrt{(1+4x)^3}\,\Big]_0^{1/4} = \frac{1}{6}\left[\sqrt{8}-1\right]$$

$$\boxed{L = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2}-1\right)u}$$

10 puntos

5.

Si $z = ye^{x} - xe^{y}$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x} - xe^{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = e^{x} - e^{y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = e^{x}$$

$$\therefore \boxed{\left.\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right|_{(\ln 2, 2)} = e^{\ln 2} = 2}$$

15 puntos

6.

La ecuación tiene la forma

$$(x-a)\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{p} + (y-b)\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{p} + (z-c)\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{p} = 0$$

$$Si \quad P\left(4, \sqrt{5}, 2\right) \quad y \quad f(x,y) = \sqrt{9 - y^2}$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = \sqrt{9 - y^2} - z$$

$$(x-4)(0) + \left(y - \sqrt{5}\right)\frac{-y}{\sqrt{9-y^2}} + (z-2)(-1) = 0$$

$$\left(y - \sqrt{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 2 - z = 0$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}y + \frac{5}{2} + 2 - z = 0, \text{ por lo que}$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}y - z + \frac{9}{2} = 0, \quad \boxed{-\sqrt{5}\,y - 2z + 9 = 0}$$

15 puntos