UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO

1221

Sinodales: M.E.M. Margarita Ramírez Galindo
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

20 de septiembre de 2018 *Semestre 2019-1*

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Determina el intervalo de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n}$$

Incluye el análisis de los extremos.

15 puntos

---

2. Sea la función

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x}$$

definida en el intervalo $[0,1]$. Calcula el valor medio de la función en el intervalo dado y determina el valor de $C \in [0,1]$ que cumple con el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

15 puntos

3. Efectúa

$$a)\int \frac{x-20}{2x+x^2-8}\,dx \qquad b)\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx \qquad c)\int ln\left(x-1\right)dx$$

30 puntos

---

4. Calcula el área de la región limitada por las curvas de: $f\left(x\right)=-x^2-2$ y de $g\left(x\right)=-x-2$. **Representa gráficamente la región.**

10 puntos

---

5. Traza la gráfica del dominio de la función f **y de su curva de nivel para** $z=1$.

$$f\left(x, y\right)=\frac{3}{\sqrt{-x^2+y^2-1}}$$

10 puntos

---

6. Sea la función F **expresada por**

$$F\left(x, y\right)=2e^{-x-y}$$

Obtén:

a) La derivada direccional de la función F **en el punto** $A\left(-1,2\right)$ **en la dirección del vector** $\bar{u}=2i-2j$

b) La dirección en que aumenta más rápidamente F **en el punto** A

20 puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CÁLCULO INTEGRAL

1221

Solución del Primer Examen Extraordinario

Semestre 2019 – 1

1. Sea:

$$r=\frac{\dfrac{(x+3)^{n+1}}{3^{(n+1)}}}{\dfrac{(x+3)^{n}}{3^{n}}}=\frac{(x+3)^{n+1}}{(x+3)^{n}}\cdot\left(\frac{3^{(n+1)}}{3^{n}}\right)$$

$$r=3(x+3)\quad\Rightarrow\lim_{n\to\infty}r=\lim_{n\to\infty}\left[3(x+3)\right]=3(x+3)$$

$$si\quad \rho=3(x+3)\quad\Rightarrow|\rho|<1\quad es\quad -1<3(x+3)<1$$

$$\frac{-1}{3}<(x+3)<\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{-10}{3}<(x+3)<\frac{-8}{3}$$

$$si\quad x=-\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\dfrac{10}{3}+3\right)^{n}}{3^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{3^{2n}}\quad es\ convergente$$

$$si\quad x=-\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\dfrac{8}{3}+3\right)^{n}}{3^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n}}\quad es\ convergente$$

por lo que el intervalo es $\boxed{x\in\left[-\dfrac{10}{3},-\dfrac{8}{3}\right]}$

15 puntos

2. Sea:

$$f(c)=\frac{\int_0^1\left[1-\sqrt{1-x}\right]dx}{1-0}=\frac{\left[x+\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1}{1}$$

$$f(c)=1+0-\left(0+\frac{2}{3}\right)=\boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{1-c}=\frac{1}{3} \quad de\ donde \quad \boxed{c=\frac{5}{9}}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{x-20}{x^2+2x-8}=\dfrac{x-20}{(x-2)(x+4)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+4}$;

$$x-20=A(x+4)+B(x-2)\Rightarrow\begin{cases} si\ \ x=2 \quad \Rightarrow -18=6A \\ \qquad\qquad \boxed{A=-3} \\ si\ \ x=-4 \quad \Rightarrow -24=-6B \\ \qquad\qquad \boxed{B=4} \end{cases}$$

entonces la integral queda:

$$I=\int\left[\frac{x-20}{(x-2)(x+4)}\right]dx=\int\left[\frac{-3}{x-2}+\frac{4}{x+4}\right]dx$$

$$I=-ln(x-2)^3+ln(x+4)^4+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=ln\left(\frac{(x+4)^4}{(x-2)^3}\right)+C}$$

b) Integral directa

$$I=\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int \left(2+x^2\right)^{-1/2}\cdot 2x\,dx$$

$$I=\frac{1}{2}\left[2\left(2+x^2\right)^{1/2}\right]$$

$$I=\boxed{\sqrt{2+x^2}+C}$$

c) Por partes

$$I=\int ln\left(x-1\right)dx$$

$$\left|\begin{array}{l} u=ln\left(x-1\right) \\ du=\dfrac{dx}{x-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} dv=dx \\ v=x \end{array}\right.$$

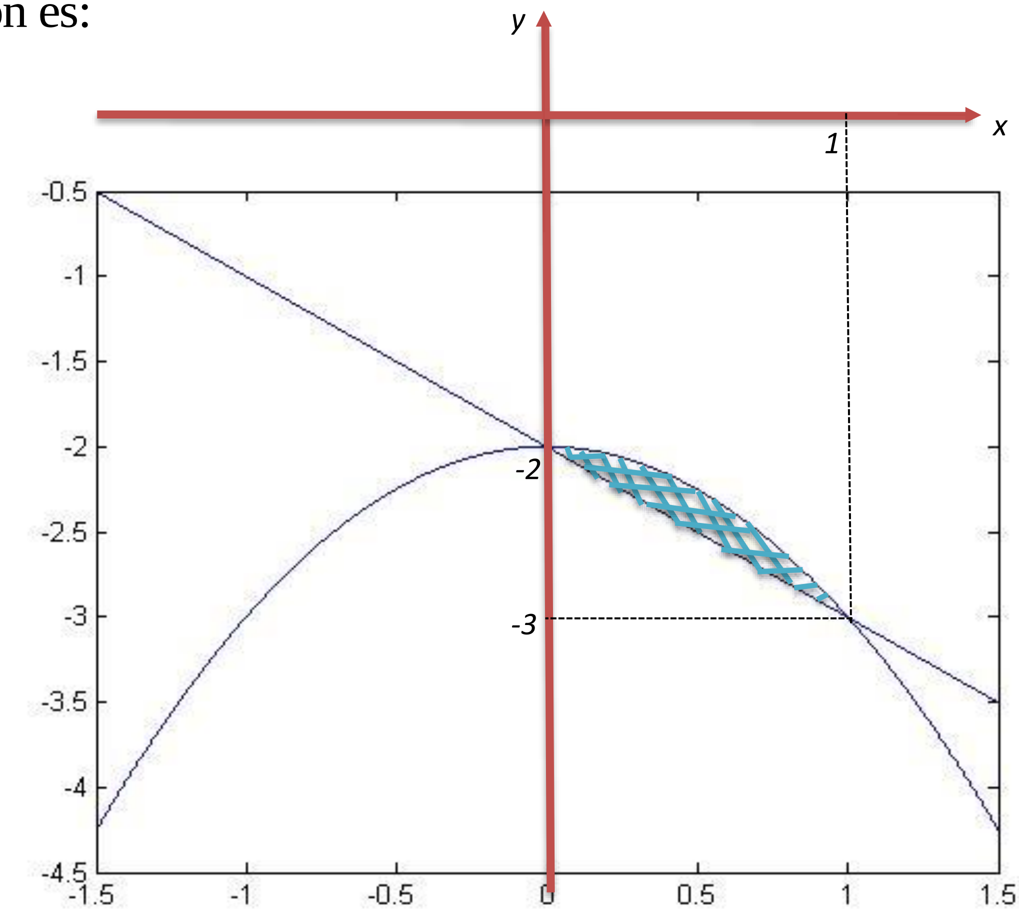
$$I=x\,ln\left(x-1\right)-\int \frac{x}{x-1}\,dx$$

$$I=x\,ln\left(x-1\right)-x-ln\left(x-1\right)+C$$

$$I=\boxed{-x+\left(x-1\right)ln\left(x-1\right)+C}$$

30 Puntos

4. La región es:



El área de la región es el resultado de calcular:

$$A = \int_0^1 \left[\left(-x^2 - 2 \right) - \left(-x - 2 \right) \right] dx$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

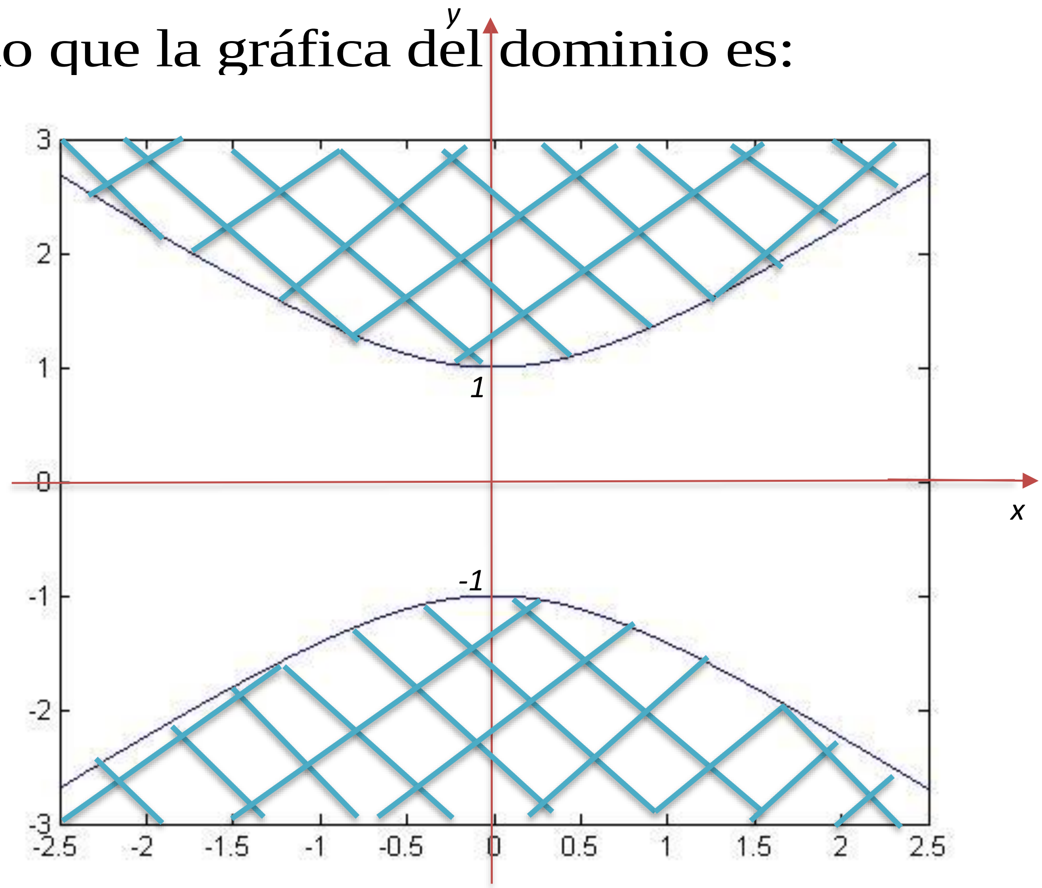
$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6} u^2}$$

10 Puntos

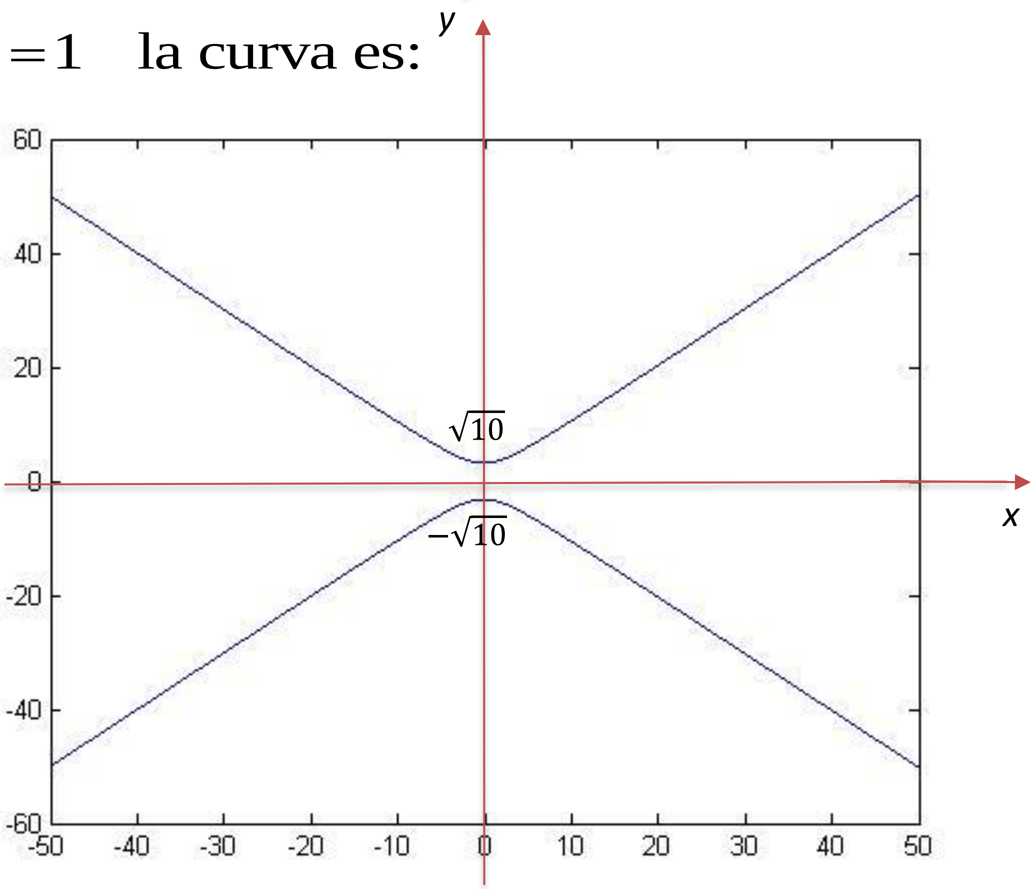
5.

Debe cumplirse que: $-x^2+y^2-1>0$

Por lo que la gráfica del dominio es:



Si $z=1$ la curva es:



10 Puntos

6.

a) Sea:

$$\frac{dF}{dS}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}\right)_A\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{dF}{dS}=\left(-2e^{-x-y},-2e^{-x-y}\right)_A\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$donde \quad A(-1,2)$$

$$\frac{dF}{dS}=\left(-2e^{-1},-2e^{-1}\right)\bullet\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boxed{\frac{dF}{dS}=0}$$

b) La dirección es la del vector:

$$\boxed{\nabla F=-\frac{2}{e}\hat{i}-\frac{2}{e}\,j}$$

20 Puntos