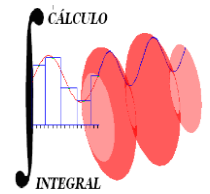




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO



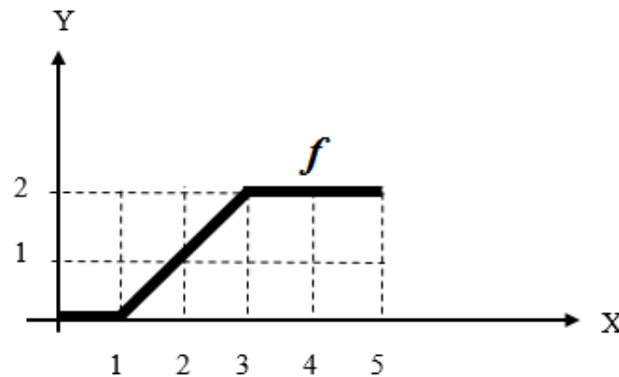
*Sinodales: Ing. Sergio Carlos Crail Corzas
M.I. Mayverena Jurado Pineda*

25 de abril de 2016

Semestre 2016-2

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** del examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Determinar el valor medio de la función f cuya gráfica se muestra en la figura y calcular el valor de $c \in [0, 5]$ tal que se cumpla el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.



15 puntos

2. Calcular, si existe:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{e^x + x}$$

15 puntos

3. Efectuar las integrales:

$$a) \int \frac{\sqrt{e^x}}{4 + e^x} dx$$

$$b) \int \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx$$

20 puntos

4. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $x^2 - y + 1 = 0$ y $x - y + 1 = 0$. Hacer la representación gráfica de la región.

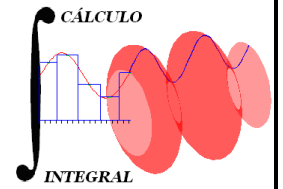
15 puntos

5. Calcular $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Big|_{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$ para $f(x, y) = y e^{\cos x} + x e^{\sin y}$

15 puntos

6. Obtener la ecuación del plano tangente al elipsoide de ecuación $x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1$ en el punto $A(0, 1, 1)$.

20 puntos



CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

25 de abril de 2016

Semestre 2016-2

1. Sea el valor medio

$$f(c) = \frac{\int_0^5 f(x) dx}{5}$$

de la interpretación geométrica de la integral

$$\int_0^5 f(x) dx = \frac{2 \cdot 2}{2} + 2 \cdot 2 = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{f(c) = \frac{6}{5}} \quad \text{Sea } f(x) = x - 1 \text{ para el intervalo } [1, 3]$$

$$\Rightarrow c - 1 = \frac{6}{5} \Rightarrow \boxed{c = \frac{11}{5}} \quad \text{ó} \quad \boxed{c = 2.2}$$

15 Puntos

2. Al evaluar queda

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x + x \right)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

$$\text{Entonces si } y = \left(e^x + x \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{\ln(e^x + x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \frac{0}{0}$$

al aplicar L'Hopital y sabiendo que $\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln y]$

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^2 \quad \therefore \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sqrt{e^x + x} = e^2}$$

15 Puntos

3. a) Por cambio de variable:

$$\text{si } u = \sqrt{e^x}$$

$$\Rightarrow u^2 = e^x$$

$$\Rightarrow 2u du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2u du}{u^2} \Rightarrow dx = \frac{2}{u} du$$

Al sustituir:

$$I = \int \frac{u \left(\frac{2}{u} du \right)}{4 + u^2} = 2 \int \frac{du}{4 + u^2} = 2 \left[\frac{1}{2} \text{ang tan } \frac{u}{2} \right] + C$$

$$\boxed{I = \text{ang tan } \frac{\sqrt{e^x}}{2} + C}$$

10 Puntos

b) Por fracciones parciales:

$$\text{Sea } \frac{x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

Por lo que

$$x = A(x+2) + B(x+1)$$

$$\text{si } x = -2$$

$$\text{si } x = -1$$

$$\Rightarrow -2 = -B$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 = A}$$

$$\boxed{B = 2}$$

$$I = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \right) dx = -\ln(x+1) + 2\ln(x+2) + c$$

$$\boxed{I = \ln \frac{(x+2)^2}{x+1} + C}$$

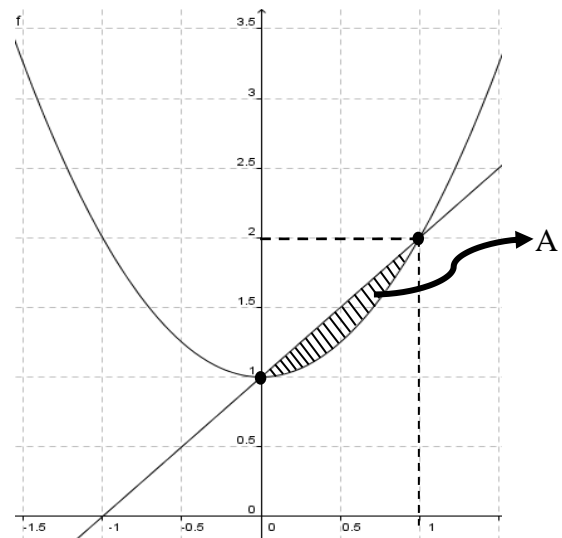
10 Puntos

4. Si trazamos la gráfica de ambas curvas entonces el área sería

$$A = \int_0^1 \left[(x+1) - (x^2+1) \right] dx$$

$$A = \int_0^1 \left[x - x^2 \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{6} u^2}$$



15 Puntos

5. Si

$$f(x, y) = ye^{\cos x} + xe^{\sin y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -ye^{\cos x} \operatorname{sen} x + e^{\sin y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\operatorname{sen} x e^{\cos x} + \cos y e^{\sin y}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \cos^2 y e^{\sin y} - \operatorname{sen} y e^{\sin y}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \right|_{\left(0, \frac{\pi}{2}\right)} = -e$$

15 Puntos

6. Sea

$$F(x, y, z) = x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_P = 0 = a$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2}(y-1) \quad \Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_P = 0 = b$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z \quad \Rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_P = 2 = c$$

Por lo que el plano tiene por ecuación:

$$(x-0)0 + (y-1)0 + (z-1)2 = 0$$

$$2z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{z=1}$$

20 Puntos