UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO

1221

Sinodales: ***Ing. Héctor Hernández López***
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

27 de octubre de 2016 ***Semestre 2017-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Determinar si la siguiente serie converge o diverge, en caso de ser convergente, calcular su suma.

$$3+\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots$$

15 puntos

---

2. Calcular, si existe, el límite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+sen\,x\right)^{\cot x}$$

15 puntos

3. Efectuar:

$$a)\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}-1} \qquad b)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} \qquad c)\int \frac{1+x}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

30 Puntos

---

4. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por las gráficas de $y=e^{-x}$, $x=0$ y $x=-\ln 2$. Hacer la representación gráfica del sólido.

10 Puntos

---

5. Obtener el recorrido de la función $f(x,y)=e^{-\sqrt{xy-1}}$ y representar gráficamente su dominio.

15 Puntos

---

6. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y)=y\,e^{-x}$ en el punto $Q(\ln 2, 1)$ y en la dirección $\alpha=45^o$

15 Puntos

1.

Sea la serie escrita como

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{n-1}}$ que es geometria con $a = 3$ y $r = \frac{1}{10}$

Como $r < 1$ la serie convergente y su serie es:

$$S_n = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{9}{10}} = \frac{30}{9} = \frac{30*10}{3*3} = \boxed{\frac{10}{3}}$$

15 puntos

2. La sustitución directa da

Sea $\quad y = (1+senx)^{\cot x}$

$y = (1+senx)^{\cot x}$,entonces

$\ln y = \cot x \ln(1+senx)$,si aplicamos límite

$$\lim_{x\to 0^+}[\ln y] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x \ln(1+senx)}{senx} = \frac{0}{0} \quad \text{podemos aplicar L'Hôpital}$$

$$ln\left[\lim_{x\to 0^+}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos^2 x}{1+senx} - senx\,ln\left(1+senx\right)}{cosx} = \frac{1-0}{1} = 1$$

por lo que $\lim\limits_{x\to 0^+} = e^1$ $\quad\therefore \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+senx\right)^{\cot x} = e}$

15 puntos

3. a) Por fracciones parciales

a) Por cambio de variable

Si $u=\sqrt{1+x} \Rightarrow x = u^2 - 1$ de donde $dx = 2udu$

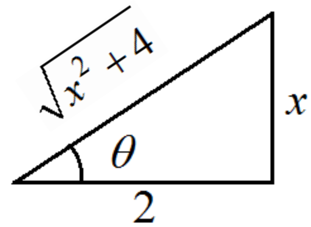
al sustituir la integral queda

$$I=\int \frac{2u}{u-1}du = 2\int \frac{(u-1+1)}{u-1}du = 2\int du + 2\int \frac{du}{u-1}$$

$$\boxed{I = 2\sqrt{1+x} + 2\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right) + C}$$

10 puntos

b) Por sustitución trigonométrica



$x = 2\,tan\,\theta$

$\sqrt{x^2+4} = 2\,sec\,\theta$

$dx = 2\,sec^2\,\theta\;d\theta$

Entonces $I = \displaystyle\int \frac{2\,sec^2\,\theta}{2\,tan\,\theta\;2\,sec\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{sec\,\theta}{tan\,\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{sen\theta}$

$$I = \frac{1}{2}\int csc\,\theta\;d\theta = -\frac{1}{2}ln\left(csc\,\theta + cot\,\theta\right) + C$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+2}{x}\right| + C}$$

10 puntos

---

c) Por fracciones parciales

$Sea\ \dfrac{1+x}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = \dfrac{\mathrm{A}}{x-1} + \dfrac{\mathrm{B}x+\mathrm{C}}{x^2+1}$,entonces

$1+x = \mathrm{A}\left(x^2+1\right) + \left(\mathrm{B}x+\mathrm{C}\right)\left(x-1\right)$

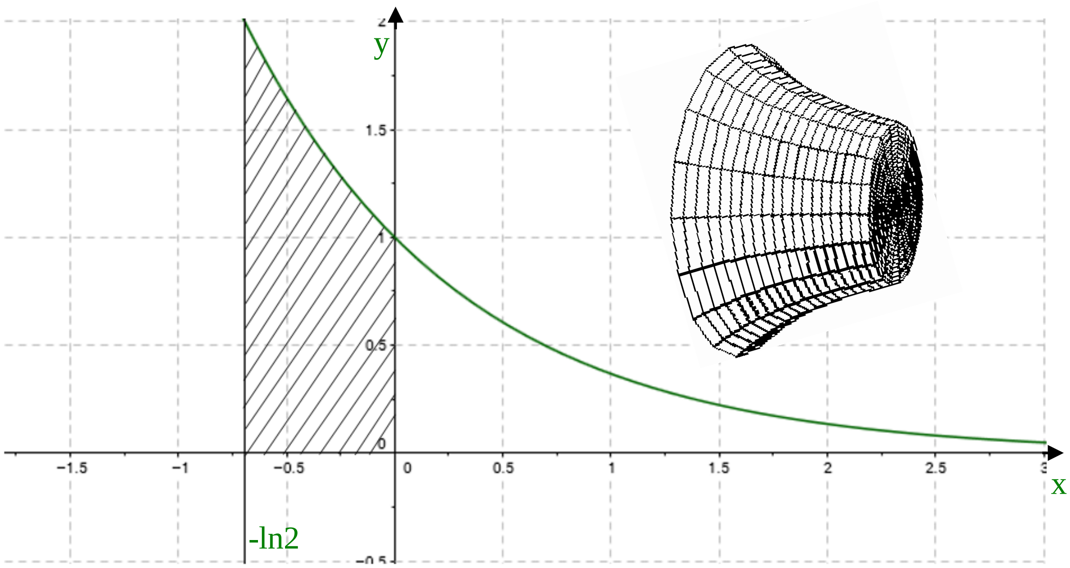
Si $x = 1$	Si $x = 0$	Si $x = -1$
$2 = 2\mathrm{A}$	$1 = 1 - c$	$0 = 2 + 2\mathrm{B}$
$\boxed{\mathrm{A} = 1}$	$\boxed{\mathrm{C} = 0}$	$\boxed{\mathrm{B} = -1}$

Por lo que la integral queda

$$I = \int\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x}{x^2+1}\right)dx = ln\left(x-1\right) - \frac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + \mathrm{C}$$

$$\boxed{I = ln\left|\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right| + \mathrm{C}}$$

4. Sea el sólido



$$V=\pi\int_{-\ln 2}^{0}\left(e^{-x}\right)^{2}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big]_{-\ln 2}^{0}$$

$$V=-\frac{\pi}{2}\left[1-e^{\ln 4}\right]=\boxed{\frac{3\pi}{2}u^{3}}$$

10 puntos

5. Sea la región

El recorrido de la función es:

$$R_f=\{f\left(x,y\right)|\,f\left(x,y\right)\in\left(0,1\right)\}$$

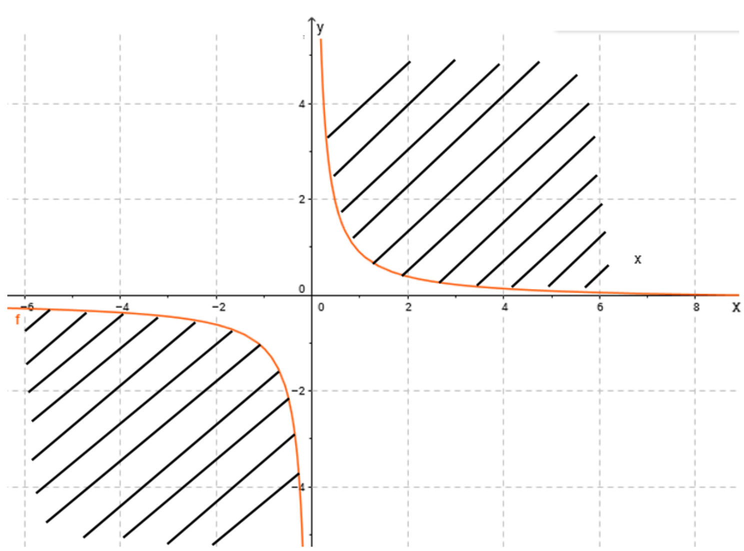
Si

$$xy-1\geq 0\Rightarrow xy\geq 1$$

$$Si\;\; x>0 \;\Big\|\; Si\; x<0$$

$$\Rightarrow y>\frac{1}{x}\;\Big\|\Rightarrow y<\frac{1}{x}$$

La gráfica del dominio es:



15 puntos

6. Sea

$\nabla f = -ye^{-xi} i + e^{-x} j$, entonces

$Q(\ln 2, -1) \qquad \nabla f\big|_Q = \left(e^{-\ln 2}, e^{-\ln 2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{df}{ds} = \overline{\nabla} f\,(\cos\theta, sen\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

15 puntos