UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO
1221

Sinodales: M.I. Héctor Hernández López
Ing. María Elizabeth Esquivel Rodríguez

Alumno: ______________________________ ***Semestre 2019-1***

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

1. Obtener el intervalo de convergencia de la serie y efectuar el análisis de los extremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$$

15 puntos

2. Calcular el valor medio de la función $f(x)=|x+1|$ en el intervalo $[-2,5]$.

15 puntos

3. Efectuar

$a)\ \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx \qquad b)\ \int x \cdot ang\sec(x) \cdot dx \qquad c)\ \int \frac{e^x dx}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}$

30 puntos

4. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar, alrededor del eje x, la región limitada por la gráfica de:

$$f(x) = e^{x}$$

Y las rectas:

$$x = 0, \qquad x = \ln(2) \qquad y \qquad y = 0$$

10 puntos

5. Determinar el recorrido de la función:

$$f(x, y) = -\sqrt{(x-1)(y-1)}$$

Y hacer la representación gráfica de su dominio.

10 puntos

6. Sea la función:

$$z = \cos\left(2rs^{2}\right) + \ln(r + 2s)$$

Obtener:

$$\left.\frac{\partial^{2} z}{\partial r \partial s}\right|_{\substack{r=\frac{\pi}{2} \\ s=0}}$$

20 puntos

1. Sea:

$$r=\frac{\dfrac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{(x-3)^n}{n^2}}=\frac{(x-3)^{n+1}\left(n^2\right)}{(x-3)^n(n+1)^2}$$

$$r=(x-3)\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r=x-3=\rho$$

$$\Rightarrow \quad |x-3|<1 \quad para \;\; que \;\; sea \;\; convergente$$

$$-1<x-3<1 \quad \Rightarrow \quad 2<x<4$$

$$An\acute{a}lisis \;\; de \;\; los \;\; extremos$$

$$Si \quad x=2$$

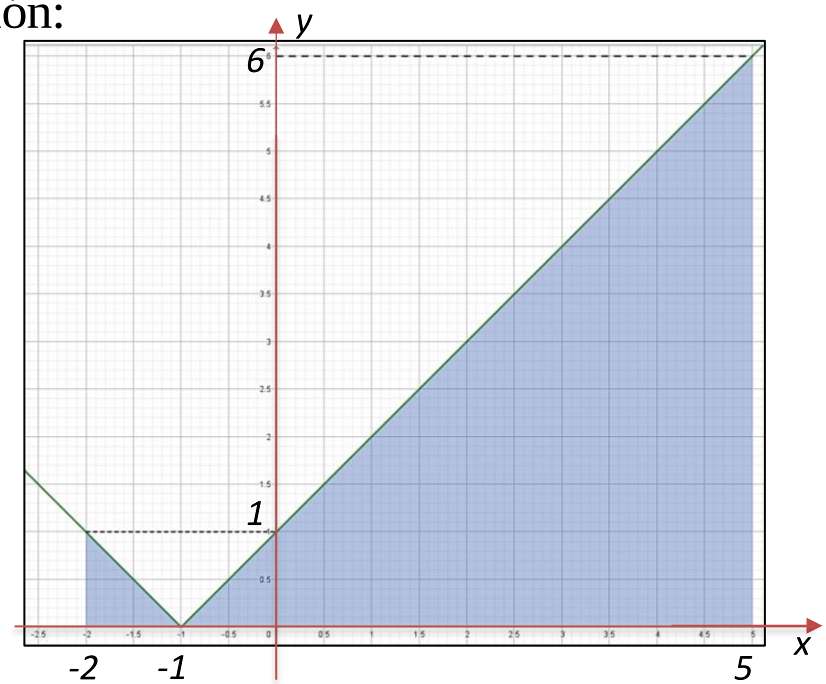
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad es\ convergente\ seg\acute{u}n\ el\ criterio\ de\ Leibniz$$

$$si \quad x=4$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad es\ convergente\ tipo\ P\ donde\ P>1$$

15 puntos

2. Sea la gráfica de la función:



Área de la región:

$$A=\frac{1\cdot 1}{2}+\frac{6\cdot 6}{2}$$

$$A=\frac{1}{2}+\frac{36}{2}$$

$$A=\frac{37}{2}$$

Según la interpretación geométrica de la integral definida:

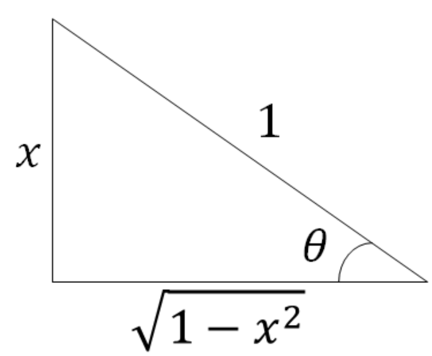
$$\Rightarrow \int_{-2}^{5} f(x)\,dx=\int_{-2}^{5}|x+1|\,dx=\frac{37}{2}$$

$$\therefore\ f(c)=\frac{\frac{37}{2}}{5-(-2)}=\frac{\frac{37}{2}}{7}\quad\Rightarrow\quad \boxed{f(c)=\frac{37}{14}}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por sustitución trigonométrica



$$x=sen\,\theta$$

$$\sqrt{1-x^2}=cos\,\theta$$

$$dx=cos\,\theta d\theta$$

$$I=\int\frac{cos^2\theta}{sen^2\theta}d\theta=\int cot^2\theta d\theta=\int\left(csc^2\theta-1\right)d\theta=-cot\,\theta-\theta+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-angsen(x)+C}$$

b) Por partes

$$\left| \begin{array}{l} u = ang\,sec(x) \\ du = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} dv = xdx \\ v = x^2 \end{array} \right.$$

$$I = x^2 ang\,sec(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = x^2 ang\,sec(x) - \sqrt{x^2-1} + C}$$

c) Por descomposición en fracciones parciales

$$Si \quad u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x dx$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{du}{\left(u^2+1\right)\left(u-1\right)} \quad sea\ entonces$$

$$\frac{1}{\left(u^2+1\right)\left(u-1\right)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1}\ ;$$

$$1 = \left(Au+B\right)\left(u-1\right) + C\left(u^2+1\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} si\ \ u=1 \quad \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{1}{2}} \\ si\ \ u=0 \quad \Rightarrow 1 = -B + \dfrac{1}{2} \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{B = -\dfrac{1}{2}} \\ si\ \ u=-1 \quad \Rightarrow 1 = \left(-A - \dfrac{1}{2}\right)\left(-2\right) + \dfrac{1}{2}\cdot 2 \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{A = -\dfrac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Entonces la integral queda:

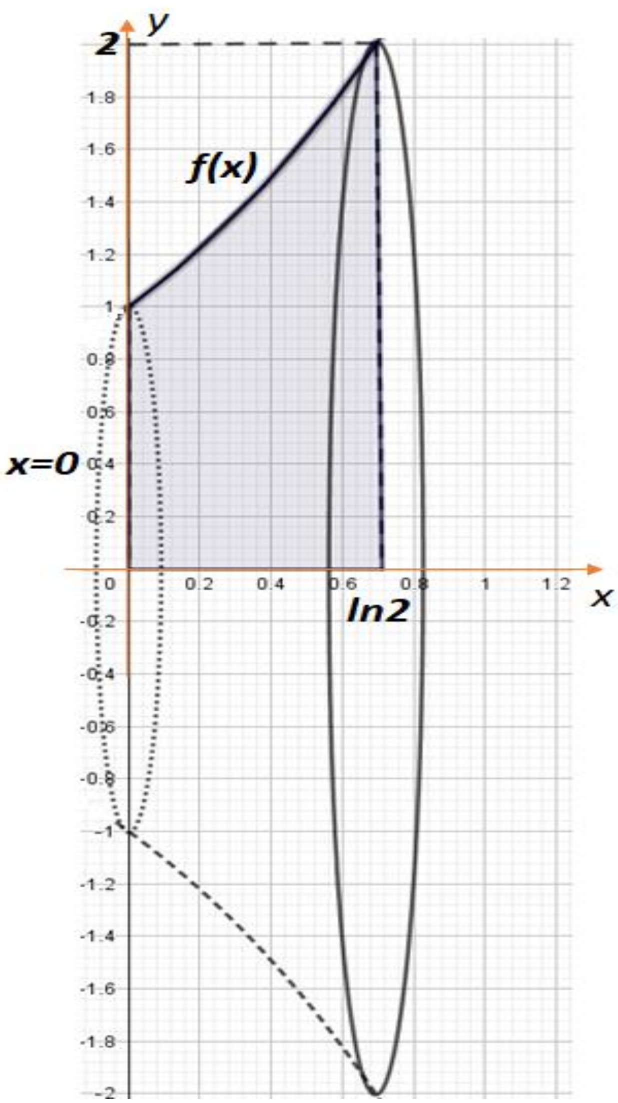
$$I=\int\left[\frac{-\frac{1}{2}(u+1)}{u^2+1}\right]du+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u-1}=-\frac{1}{2}\int\frac{udu}{u^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}+\frac{1}{2}ln(u-1)+C$$

$$I=-\frac{1}{2}ang\,tan\left(e^x\right)-\frac{1}{4}ln\left(u^2+1\right)+ln(u-1)^{1/2}+C$$

$$\Rightarrow \boxed{I=-\frac{1}{2}ang\,tan\left(e^x\right)+ln\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt[4]{e^{2x}+1}}\right)+C}$$

30 Puntos

4. Sea la figura:



$$V=\pi\int_0^{ln2}\left[e^x\right]^2dx$$

$$V=\pi\int_0^{ln2}e^{2x}dx$$

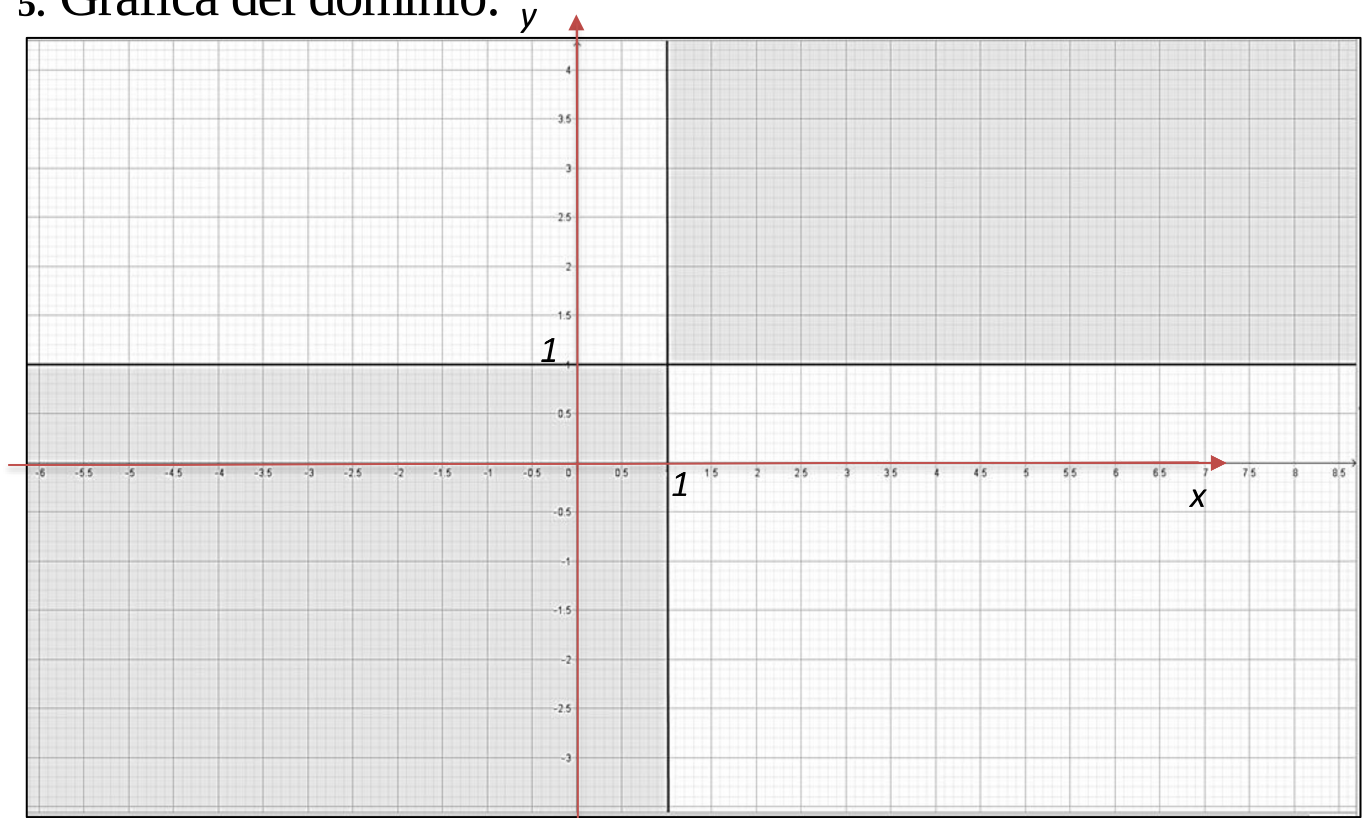
$$V=\left[\frac{\pi}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$V=\frac{\pi}{2}[4-1]$$

$$\boxed{V=\frac{3}{2}\pi\;u^3}$$

10 Puntos

5. Gráfica del dominio:



$$\boxed{R_f = \{ z \mid z \in (-\infty, 0] \}}$$

10 Puntos

6.

$$Si \quad z = cos(2rs^2) + ln(r + 2s)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial r} = -2s^2 \cdot sen(2rs^2) + \frac{1}{r + 2s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = -8rs^3 \cdot cos(2rs^2) - 4s \cdot sen(2rs^2) - \frac{2}{(r + 2s)^2}$$

$$Si \quad r = \frac{\pi}{2} \quad y \quad s = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = 4\pi - \frac{2}{\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)^2}}$$

20 Puntos