UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL

TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: *Ing. Luis Hernández Moreno*
M.E.M. Margarita Ramírez Galindo

8 de junio de 2016 *Semestre 2016-2*

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Para la función $f(\mathrm{x}) = 2 - x^2$ definida en el intervalo $[0, 2]$, determinar el valor de c tal que el valor promedio de la función sea igual a $f(c)$

15 Puntos

---

2. Calcular, de ser posible

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[x]{\cos x}$$

15 Puntos

---

3. Efectuar las integrales:

$$a)\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}\,dx \qquad\qquad b)\int \frac{16\,dx}{x^3 + 4x}$$

20 Puntos

4. Calcular el área de la región limitada por las curvas

$$C_1: \quad y = 4x^3 \qquad\qquad C_2: \quad y = 8x^2$$

15 Puntos

---

5. Verificar que la función $u(x, y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

satisface la ecuación en derivadas parciales $u_{xx} + u_{yy} = 0$

15 Puntos

---

6. Determinar la máxima razón de cambio de $f(x, y) = xe^{-y} + 3y$ en el punto $P(1, 0)$.

20 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS
CÁLCULO INTEGRAL
SOLUCIÓN DEL TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

8 de junio de 2016 *Semestre 2016-2*

1.

$$\text{Valor promedio } = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

$$\int_0^2 \left(2-x^2\right)dx = 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = 4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

$$V_{prom} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V_{prom} = fc \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} = 2 - c^2; \quad c^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{c = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15} \qquad c \in [\,0\,,\,2\,]$$

15 Puntos

2.

Valuando:

$$L = \left(\cos(0)^0\right)^{1/0} = 1^{\infty}$$

Aplicando logaritmos

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left[\ln\left(\cos x\right)^{1/x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(\cos x\right)}{x}\right] = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital:

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-\dfrac{sen\,x}{\cos x}}{1} \right) = -\frac{sen\,0^0}{\cos 0^0} = -\frac{0}{1} = 0$$

Finalmente

$$L = e^0$$

$$\boxed{L = 1}$$

15 Puntos

3. a) Por partes

$$u = \frac{1}{x} \qquad du = -\frac{dx}{x^2}$$

$$dv = \cos\frac{1}{x}\left(\frac{dx}{x^2}\right) \qquad v = -\left(sen\frac{1}{x}\right)$$

$$I = -\frac{1}{x}\left(sen\frac{1}{x}\right) - \int \left(sen\frac{1}{x}\right)\left(\frac{dx}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = -\frac{1}{x}\left(sen\frac{1}{x}\right) - \left(\cos\frac{1}{x}\right) + c}$$

b) Por fracciones parciales

$$\frac{16}{x\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{\left(x^2+4\right)}$$

$$\Rightarrow \ 16 = A\left(x^2+4\right) + Bx^2 + Cx$$

$$si \ x = 0 \qquad si \ x = 1$$

$$\boxed{A = 4} \qquad 16 = 20 + B + C$$

$$\Rightarrow \boxed{-4 = B} \qquad \Rightarrow \boxed{C = 0}$$

$$I = \int \left[\frac{4}{x} - \frac{4x}{x^2 + 4} \right] dx$$

$$\boxed{I = 4(\ln x) - 2\ln\left(x^2 + 4\right) + c}$$

20 Puntos

4.

Para las intersecciones:

$$4x^3 = 8x^2$$

$$x = 0 \qquad x = 2$$

Entonces

$$A = \int_0^2 \left(8x^2 - 4x^3\right) dx$$

$$A = \left[\frac{8}{3}x^3 - x^4 \right]_0^2 = \frac{8}{3}(8) - 16$$

$$A = \frac{64 - 48}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{16}{3} \text{ unidades de área}}$$

15 Puntos

5.

$$u_x = -e^{-x}\cos y + e^{-y}\,\mathrm{sen}\,x$$

$$u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x$$

$$u_y = -e^{-x}\,\mathrm{sen}\,y + e^{-y}\cos x$$

$$u_{yy} = -e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$$

Sustituyendo en EDP:

$$e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x - e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x = 0$$

$$\boxed{0 = 0 \qquad \therefore\ se\ verifica}$$

15 Puntos

6.

La máxima razón de cambio es $\left| \overline{\nabla} f \Big|_p \right|$

$$\overline{\nabla} f = f_x i + f_y j$$

$$\overline{\nabla} f = e^{-y} i + \left(-x e^{-y} + 3\right) j$$

$$\overline{\nabla} f \Big|_p = i + 2j \qquad \Rightarrow \boxed{\overline{\nabla} f\,(1,0) = \sqrt{5}}$$

20 Puntos