UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
CÁLCULO INTEGRAL
1221

TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: ***Ing. Luis Hernández Moreno***
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

7 de diciembre de 2018 ***Semestre 2019-1***

*Nombre:*____ *No. Cta.:*___________

INSTRUCCIONES: Leer cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2 horas**.

---

1. Obtén la serie de Maclaurin de la función:

$$f(x) = \frac{2}{1+x}$$

15 puntos

---

2. Calcula el valor medio de la función $f(x) = e^{2x}$ **en el intervalo [0, ln2].**

15 puntos

---

3. Emplea alguno de los métodos de integración para efectuar:

$$a)\ \int x\ln(x)\,dx \qquad b)\ \int \frac{x-1}{x^3+x}\,dx \qquad c)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

30 Puntos

4. Calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al hacer girar, alrededor del eje de las abscisas, la región limitada por la gráfica de:

$$y=\sqrt{x}\,, \qquad y=0 \qquad \text{y} \quad \text{de} \qquad x=4$$

10 Puntos

---

5. Obtén la ecuación que representa a la familia de las curvas de nivel de la función $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2-1}$ **, identifica qué tipo de curvas son y traza la gráfica de la función** f **.**

15 Puntos

---

6. Obtén la ecuación cartesiana del plano tangente a la gráfica de la función $g(x,y)=\sqrt{4-y^2}$ **, en el punto** $A(1,1)$**.**

15 Puntos

1. Sea:

$$f'(x)=2\left[\frac{-1}{(1+x)^2}\right]$$

$$f''(x)=2\left[\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}\right]$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x)=2\left[\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow f^{n}(0)=2(n!)(-1)^n$$

$$Por\ lo\ que\ la\ serie\ es:\ \boxed{\frac{2}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n x^n}$$

15 puntos

2. El valor medio es:

$$f(c)=\frac{\int_0^{ln 2}\left[e^{2x}\right]dx}{ln 2}=\frac{\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{ln 2}}{ln 2}=\frac{\frac{3}{2}}{ln 2}=\boxed{\frac{3}{ln 4}}$$

15 Puntos

3. Solución

a) Por partes

$$\left| \begin{array}{l} u = ln\,x \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} dv = xdx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

$$I = x^2\, ln\left(\sqrt{x}\right) - \int \frac{1}{2} x dx$$

$$\boxed{I = x^2\, ln\left(\sqrt{x}\right) - \frac{x^2}{4} + C}$$

b) Por descomposición en fracciones parciales

Sea $\dfrac{x-1}{x\left(x^2+1\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$;

$$x - 1 = A\left(x^2+1\right) + \left(Bx+C\right)x \Rightarrow \begin{cases} si\ \ x=0 \ \ \Rightarrow \boxed{A=-1} \\ si\ \ x=-1 \Rightarrow -2=-2+B+C \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{B=C} \\ si\ \ x=1 \ \ \Rightarrow 0=-2+B+C \\ \qquad\qquad\qquad B+C=2 \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{C=1=B} \end{cases}$$

$$I = \int \frac{-dx}{x} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = -ln\left(x\right) + \int \frac{x}{x^2+1} dx \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$I = -ln\left(x\right) + ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + ang\,tan\left(x\right) + C$$

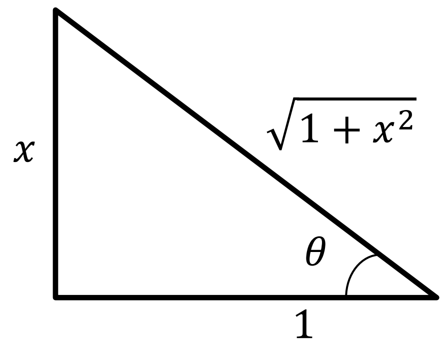
$$\Rightarrow \boxed{I = ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) + ang\,tan\left(x\right) + C}$$

c) Por sustitución trigonométrica

$x = tan(\theta)$

$\sqrt{1+x^2} = sec(\theta)$

$dx = sec^2(\theta)d\theta$



Al sustituir en la integral:

$$I = \int \frac{sec^2(\theta)d\theta}{sec(\theta)} = \int sec(\theta)d\theta$$

$$\boxed{I = ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)++C}$$

30 Puntos

---

4. El volumen es:

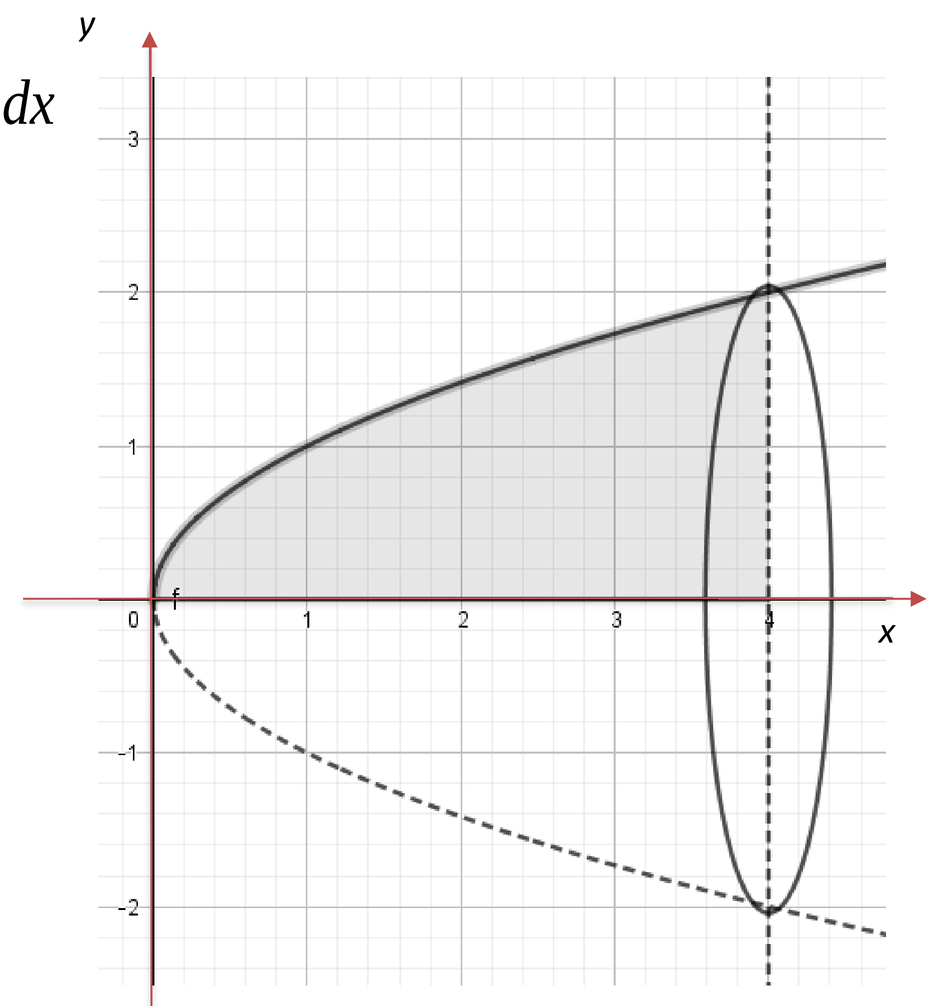
$$V = \pi\int_0^4 \left[\sqrt{x}\right]^2 dx$$

$$V = \pi\int_0^4 xdx$$

$$V = \left[\frac{\pi}{2}x^2\right]_0^4$$

$$V = \frac{\pi}{2}[16-0]$$

$$\boxed{V = 8\pi \ u^3}$$



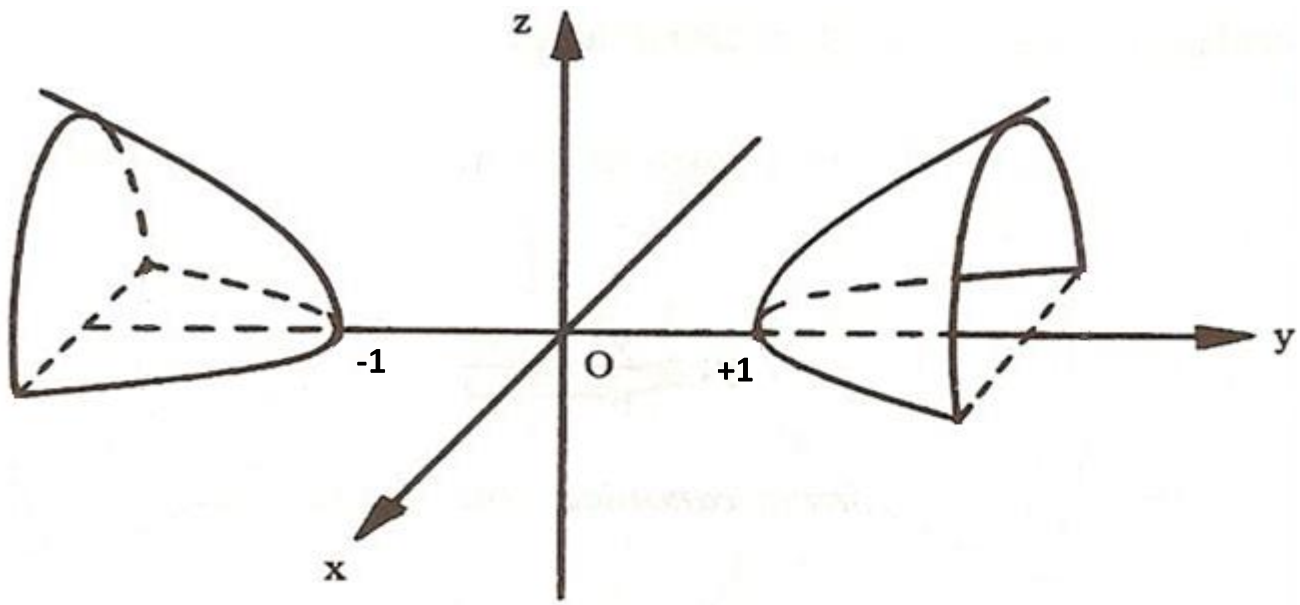
10 Puntos

5.

Si $z=k$ la ecuación se transforma en:

$$\frac{y^2}{k^2+1}-\frac{x^2}{k^2+1}=1 \quad \text{familia de hipérbolas}$$

Gráfica de la función:



15 Puntos

6.

La ecuación tiene la forma:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_P (x-x_0)+\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_P (y-y_0)+\left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_P (z-z_0)=0$$

$$0(x-1)+\frac{1}{\sqrt{3}}(y-1)-\left(z-\sqrt{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{y+\sqrt{3}z-4=0}$$

15 Puntos