UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO INTEGRAL
TERCER EXAMEN EXTRAORDINARIO

Sinodales: Ing. Luis Hernández Moreno
Ing. Sergio Carlos Crail Corzas

4 de diciembre de 2019 ***Semestre 2020-1***

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente los enunciados de los **6 reactivos** que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es **2 horas**.

---

1. Mediante el criterio del Cociente o de D'Alembert determina el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

15 Puntos

---

2. Calcula, si existe, el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x + \cos x\right)^{\csc x}$$

15 Puntos

---

3. Efectúa las integrales:

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x - 1} \qquad b) \int \frac{x^2}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}\, dx \qquad c) \int \frac{x\, \operatorname{sen}^2\left(x^2\right)}{\sec\left(x^2\right)}\, dx$$

30 Puntos

4. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de

$$y = 12x^3 + 12x^2 \qquad \text{y de} \qquad y = 0$$

Representa gráficamente la región**.**

10 Puntos

---

5. Obtén las curvas de nivel de la función g para $z = 0$ y $z = 3$, represéntalas gráficamente y traza la gráfica del dominio de la función.

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2}$$

15 Puntos

---

6. Obtén la ecuación cartesiana del plano tangente a la gráfica de la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, en el punto $P(2, 2)$.

15 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
CÁLCULO INTEGRAL
1221
Solución del Tercer Examen Extraordinario
Semestre 2020 – 1

1.

Sea

$$r=\frac{\frac{n+1!}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}}=\frac{(n+1)(n+1)!}{n(n+2)!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} r=0=\rho \quad\quad como \ \ |\rho|<1, la \ \ serie \ \ converge$$

15 Puntos

2.

$$\lim_{x\to 0^+}(x+\cos x)^{\csc x}=1^{\infty}$$

$$sea \quad y=(x+\cos x)^{\csc x}$$

$$\Rightarrow \ln y=\csc x\ln(x+\cos x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}[\ln y]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+\cos x)}{senx}=\frac{0}{0}$$

$$se \ \ puede \ \ aplicar \ \ L'Hopital$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} y\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1-senx}{\cos x(x+\cos x)}\right]$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} y\right]=1$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0^+}(x+\cos x)^{\csc x}=e}$$

15 Puntos

3. *solución*

a) Por fracciones parciales

Sea la fracción $$\frac{1}{(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-\frac{1}{2}}\ ;$$

$$1=A\left(x-\frac{1}{2}\right)+B(x+2)\Rightarrow\begin{cases} si\ \ x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=-\frac{2}{5}} \\ si\ \ x=-2 \quad \Rightarrow \boxed{A=-\frac{2}{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\int\left[-\frac{2}{5(x+2)}+\frac{2}{5\left(x-\frac{1}{2}\right)}\right]dx$$

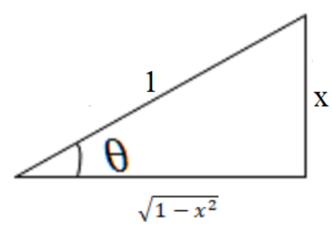
$$\Rightarrow \boxed{I=ln\sqrt[5]{\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{(x+2)^2}}+C}$$

b) Por sustitución trigonométrica

$x=sen\,\theta$

$\sqrt{1-x^2}=cos\,\theta$

$dx=cos\,\theta d\theta$



$$I=\int\frac{sen^2\theta}{cos^3\theta}cos\,\theta d\theta=\int tan^2\theta d\theta=\int\left(sec^2\theta-1\right)d\theta$$

$$I=tan\,\theta-\theta+C=\boxed{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-ang\,sen\,x+C}$$

c) *se puede escribir*

$$I=\frac{1}{2}\int sen^{2}\left(x^{2}\right)\left[2x\cos\left(x^{2}\right)dx\right]$$

se completa la diferencial

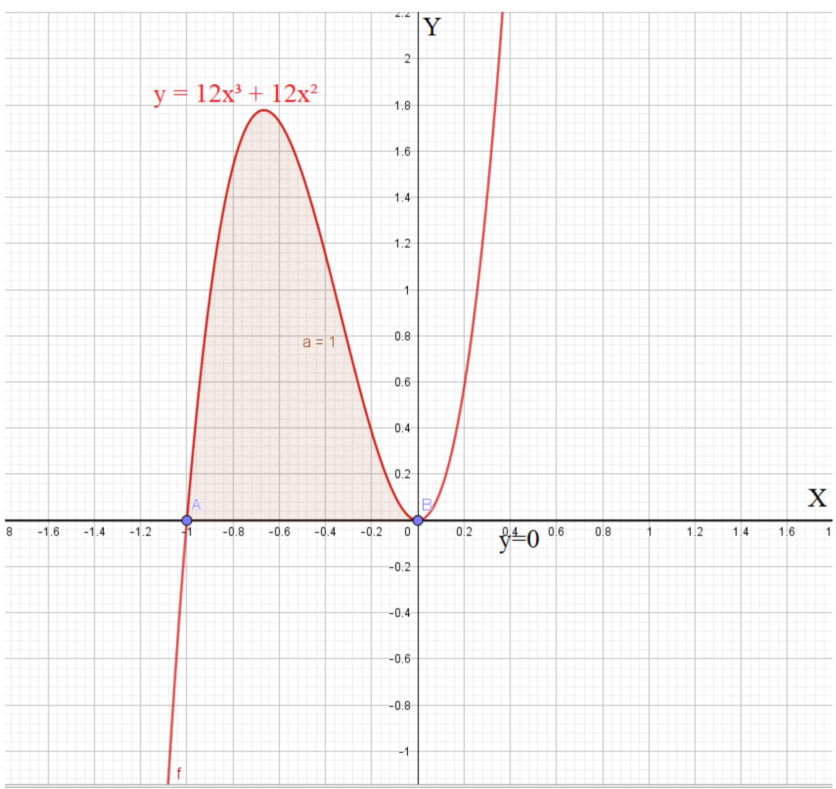
$$\boxed{I=\frac{1}{6}sen^{3}\left(x^{2}\right)+C}$$

30 Puntos

4.

$$A=\int_{-1}^{0}\left(12x^{3}+12x^{2}\right)dx=\boxed{1\,u^{2}}$$

La región es :

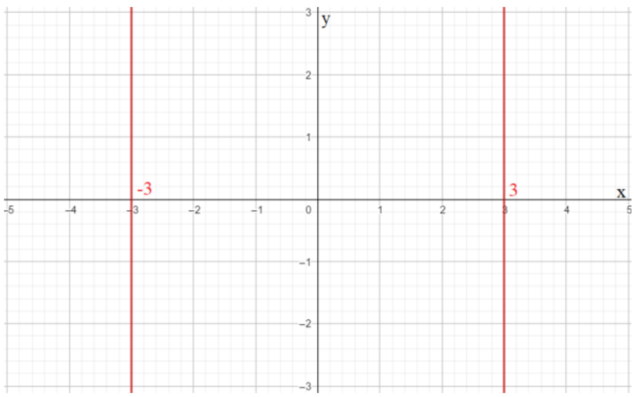


10 Puntos

5.

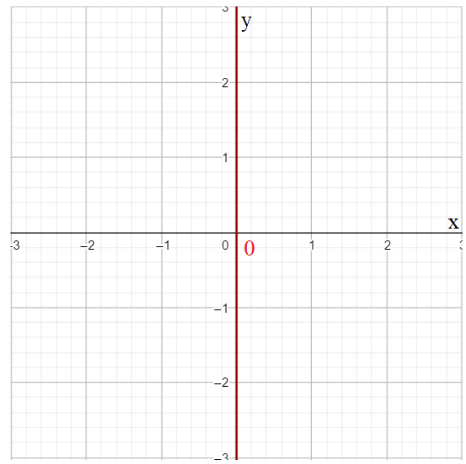
$$si \quad z = 0$$

$$x = 3 \quad y \quad x = -3$$



$$si \quad x = 3$$

$$x = 0$$



15 Puntos

6.

La ecuación del plano está dada por:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_p (x - x_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_p (y - y_0) + \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_p (z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow -2(x-2) - 2(y-2) - (z+1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x + 2y + z = 9}$$

15 Puntos