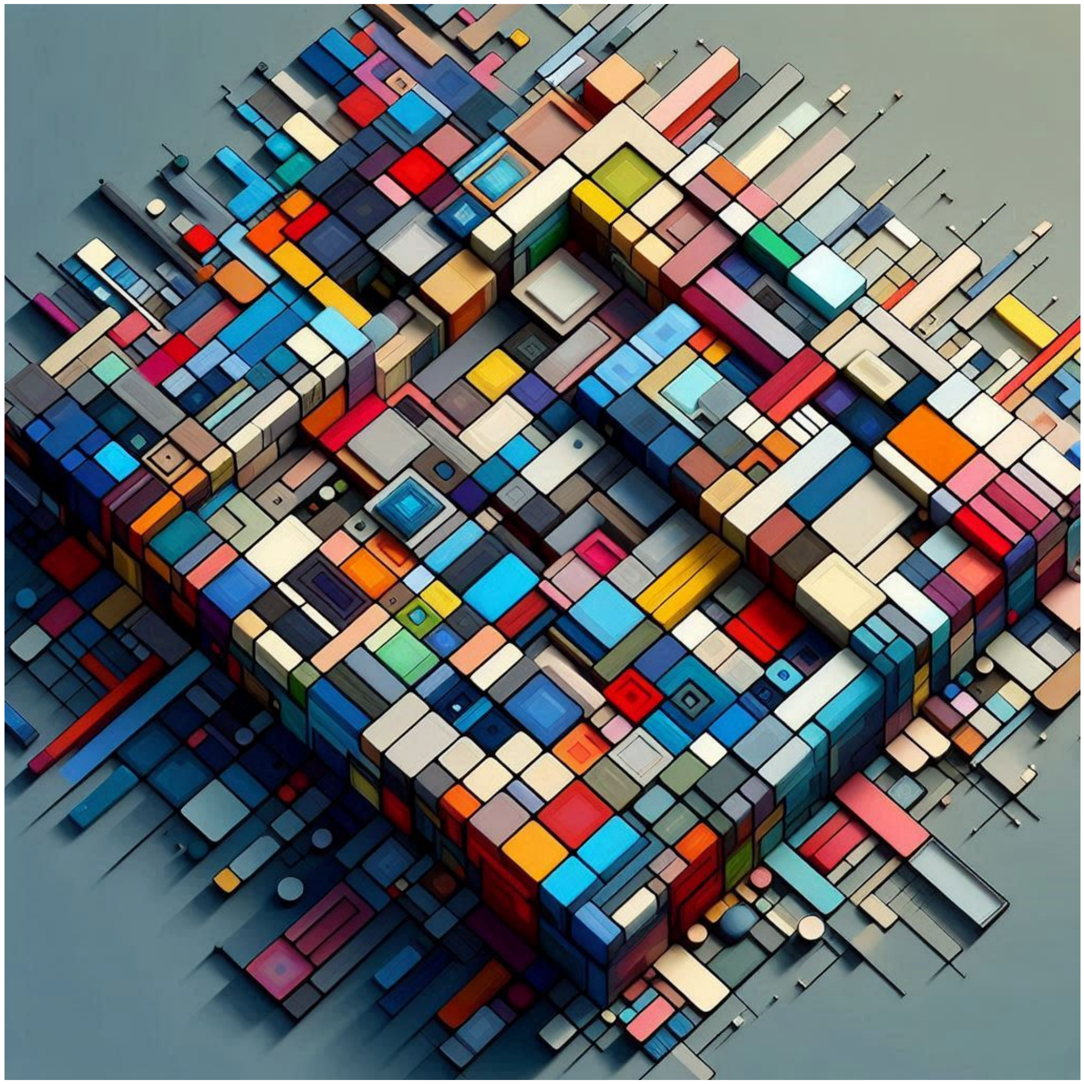
Cálculo Integral 1221



Serie 2 – Las integrales definida e indefinida

Recopilación de ejercicios sugeridos para el tema de *Las integrales definida e indefinida* de la asignatura de *Cálculo Integral.*

2.1 Ejercicios

Ejercicio 2.1

Mediante sumas de Riemann, calcular:

a) $\displaystyle\int_0^4 4\,\mathrm{d}\,x$

b) $\displaystyle\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}\,x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x^2-x)\,\mathrm{d}\,x$

Ejercicio 2.2

Sean las funciones f y g, de las cuales se sabe que:

$$\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$
$$\int_2^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$$
$$\int_0^6 g(x)\,\mathrm{d}x = 10$$
$$\int_4^6 g(x)\,\mathrm{d}x = 4$$

Determinar:

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^4 g(x)\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^4 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$

Ejercicio 2.3

Sea la función $f(x) = 4 - |x|$

Obtener:

a) El valor promedio de f en el intervalo $[-4, 1]$.

b) El valor o los valores de $c \in [-4, 1]$ cuya existencia garantiza el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Ejercicio 2.4

Sea la función $f(x) = |x-1|$ Calcular el valor medio de la función f para el intervalo $[-1, 1]$, y obtener el valor $c \in [-1, 1]$ tal que satisface el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.5

Si las funciones:

$$f(x) = a\sec^2 x$$
$$g(x) = -\frac{1}{(x-\pi)^2}$$

tienen la misma ordenada media en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, calcular el valor de a.

Ejercicio 2.6

Por medio de la regla de Barrow, calcular:

a) $\int_0^{10} \mathrm{d}x$

b) $\int_0^2 (3-2x)\mathrm{d}x$

c) $\int_{-1}^2 (6x^2-4x+3)\mathrm{d}x$

Ejercicio 2.7

Sea la función definida por:

$f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x\cos x$

Comprobar que una de las antiderivadas de f es:

$G(x) = 3 - \frac{1}{2}\cos 2x$

Ejercicio 2.8

Si $f(x) = ax - 3$ y $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = -6$, calcular el valor de a.

Ejercicio 2.9

Calcular: $\left.\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{dx}}\right|_{x=e^2}$ de $F(x) = \int_1^x \ln w \mathrm{d}w$

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.10

Calcular

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos x| \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^9 \frac{4t^2 - t^2\sqrt{t} + 1}{t^2} \mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x,$

donde:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad -2 \leq x < 1 \\ x(x^2-1)^3 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2.11

Calcular

a) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{x}(1+x)} \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + \sqrt[6]{x})}$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x}(\cos^2 \sqrt{8x})}$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} \mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \sec x \tan x \operatorname{sen}(\sec x) \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$

h) $\displaystyle\int \frac{(1 + \operatorname{sen} 2x)^4}{\sec 2x} \mathrm{d}x$

Ejercicio 2.12

Efectuar

a) $\displaystyle\int 5^{x^2+2x+3}(x+1)\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\ln(\arctan x)}{(9x^2+1)(\arctan 3x)} \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int (x^3 - 2x)(6^{(6x^2-2)^2})\mathrm{d}x$

2.1. Ejercicios

Ejercicio 2.13

Calcular, si existen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \cosh x^{\frac{1}{1-\cosh x}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(e^{-x}[\ln x^2]\right)$

Ejercicio 2.14

Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^\infty 4ke^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

Ejercicio 2.15

Determinar si las siguientes integrales convergen o no:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$

b) $\displaystyle\int_1^\infty x^2 e^{-x^3}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^\infty e^{-2x}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^{x^2}}\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 10^X\mathrm{d}x$

2.2 Respuestas

- **Ejercicio 2.1:**

  a) 16.

  b) 6.

  a) $\frac{9}{2}$.

- **Ejercicio 2.2:**

  a) 2.

  b) 6.

  c) -8.

- **Ejercicio 2.3:**

  a) $\frac{23}{10}$

  b) $c = -\frac{17}{10}$

- **Ejercicio 2.4:**

  $f(c) = 1$, $c = 0$.

- **Ejercicio 2.5:**

  $a = -\frac{4}{15\pi}$.

- **Ejercicio 2.6:**

  a) 10.

  b) 2.

  c) 21.

- **Ejercicio 2.7:**

  $F(x) = -\frac{1}{2} cos 2x + c$; por comparación se comprueba

- **Ejercicio 2.8:**

  $a = 2$

- **Ejercicio 2.9:**

  2

- **Ejercicio 2.10:**

  a) 4

  b) $\frac{140}{9}$

  c) $\frac{81}{8}$

2.2. Respuestas

- **Ejercicio 2.11:**

  a) $10\arctan\left(\sqrt{x}\right)+C$

  b) $6\sqrt[6]{x}-6\arctan\left(\sqrt[6]{x}\right)+C$

  c) $\dfrac{1}{4}\tan\left(\sqrt{8x}\right)+C$

  d) $\dfrac{5}{3}\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^6}+C$

  e) $-cscx+C$

  f) $-cos(secx)+C$

  g) $\dfrac{-1}{(1+\sqrt{x})^2}+C$

  h) $\dfrac{1}{10}(1+sen2x)^5+C$

- **Ejercicio 2.12:**

  a) $\dfrac{25}{2}\left(\dfrac{5^{(x+1)^2}}{ln5}\right)+C$

  b) $\dfrac{ln^2(angtan3x)}{6}+C$

  c) $\dfrac{6^{(x^2-2)^2}}{ln(6)^4}+C$

- **Ejercicio 2.13:**

  a) $\dfrac{1}{e}$

  b) 0

  c) 0

- **Ejercicio 2.14:**

  $k=\dfrac{1}{4}$

- **Ejercicio 2.15:**

  a) 2

  b) $\dfrac{1}{3e}$

  c) 2

  d) 2

  e) $\dfrac{\pi}{2}$

  f) $\dfrac{1}{2}$

  g) $\dfrac{1}{\ln(10)}$