Índice general

Prefacio

Con el propósito de tener práctica al repasar los temas de clase, he ido compilando algunos problemas de la materia de Cálculo Vectorial que pueden ser útiles, ya sea porque ilustran algunos temas comunes en los exámenes, técnicas recurrentes de resolución, o pueden iluminar algún aspecto de la teoría. Incluso cuando uno cree haber entendido bien la materia, es importante sistematizar nuestra práctica al resolver problemas. La intención es que este problemario contenga lo mínimo que se espera que hayamos aprendido al terminar el curso.

He resistido la tentación de incluir problemas demasiado difíciles (pero que podrían en otros aspectos ser muy interesantes). Hago esta observación para enfatizar que este documento es sólo una fuente de ejercicios: debe estar precedido por un estudio disciplinado en clase y en libros de texto, y debería ser anterior a un estudio de temas avanzados del interés particular de cada estudiante.

Originalmente sólo había escrito la resolución de algunos problemas; ahora me parece que pueden ser de provecho dos variantes: problemas propuestos con la respuesta (pero sin solución) y problemas con el formato de opción única. Éste último formato también es un experimento: si se lee el documento con Acrobat Reader, la funcionalidad de Javascript permite calificar el examen y simular ciertos tipos de éxamenes. La guía para estas variantes es tener mayor variedad de problemas sin que el documento sea demasiado largo o se convierta en un libro de texto.

He realizado mi mejor esfuerzo para verificar que todas las respuestas sean correctas; seguramente no es así. Es frustrante iniciar el estudio de una materia nueva y descubrir que nuestras fuentes de estudio no son fiables. Agradeceré los reportes de errores para mejorar este problemario en versiones posteriores.

José Luis Flores Silva

Capítulo 1

Extremos de funciones

1. Sea $f(x,y) = Ax^2 + B$ con $A \neq 0$. ¿Cuáles son los puntos críticos de f? ¿Son máximos locales o mínimos locales?

   Solución. Los puntos críticos son aquellos en los que las derivadas parciales son iguales a cero:

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax = 0$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

   De donde $x = 0$. Como no hay condición sobre y, los puntos críticos son entonces los de coordenadas $(0, y)$, es decir, el eje y.

   El discriminante es 0, por lo que el criterio de la segunda derivada no ayuda en este caso.▶ Sin embargo, es fácil ver que si $A > 0$, la función $g(x) = Ax^2$ tiene su mínimo en $x = 0$, por lo que los puntos críticos corresponden a mínimos locales en este caso. De igual manera, si $A < 0$, los puntos críticos corresponden a máximos locales.

   Si el criterio de la segunda derivada no decide, no significa que no se pueda encontrar la naturaleza de un punto crítico por otros medios.

2. Sea $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Aquí el discriminante es igual a cero. ¿Qué son los puntos críticos: mínimos locales, máximos locales o puntos silla?

   Solución. Los puntos críticos son aquellos en los que las derivadas parciales son iguales a cero:

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y = 0 \Rightarrow x = y.$$

   Entonces los puntos críticos tienen coordenadas (a, a). La función se puede escribir como $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$, que en los puntos críticos es igual a 0: el menor valor posible para un cuadrado de valores reales; por lo tanto, los puntos críticos son mínimos locales.

3. Dada la función $f(x,y) = y\arctan(x)$, encuentra sus puntos críticos y determina la naturaleza de cada uno de ellos.

[Primer Examen Final "B" 2005-1 Problema 1]

Solución. Las condiciones para que un punto sea crítico son:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \arctan(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2} \Rightarrow y = 0.$$

Por lo que el único punto crítico es el origen. Además, $f_{yy} = 0$ y $f_{xy} = \frac{1}{1+x^2}$ por lo que

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = -\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 < 0,$$

en $(0,0)$. Entonces, $(0,0)$ es el único punto crítico y es un punto silla.

4. Determina la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y) = e^{6xy}$.

[Primer Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 1]

Solución. En los puntos críticos, las primeras derivadas parciales son cero:

$$f_x = 6ye^{6xy} = 0$$
$$f_y = 6xe^{6xy} = 0.$$

Como $e^{6xy} \neq 0$ para cualesquiera valores de x y de y, la única solución al sistema es cuando $x = y = 0$. Las segundas derivadas son:

$$f_{xx} = 36y^2e^{6xy}$$
$$f_{yy} = 36x^2e^{6xy}$$
$$f_{xy} = 36xye^{6xy} + 6e^{6xy}.$$

El valor del discriminante en el origen es $D = 0 \cdot 0 - 6^2 = -36 < 0$. Por lo tanto, el origen es el único punto crítico y es un punto silla.

5. Determina la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

[Primer Examen Parcial "A" 2004-2 Problema 1]

Solución. Al igualar la primeras derivadas a cero, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = y \\ y^2 = x \end{array}$$

de donde $x^4 = x \Rightarrow x(x^3-1) = 0$, que tiene como soluciones reales a 0 y 1, de manera que hay dos puntos críticos: $P_1(0,0)$ y $P_2(1,1)$. Las segundas derivadas son $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$ y $f_{xy} = -3$. El valor del discriminante en cada punto crítico es $D_1 = -9$ y $D_2 = 36 - 9 = 27$, respectivamente, por lo que P_1 es un punto silla mientras que P_2 es un mínimo debido a que $f_{xx} > 0$ en P_2. Es útil ver los puntos críticos en la gráfica de la función, que se muestra en la Fig. 1.1.

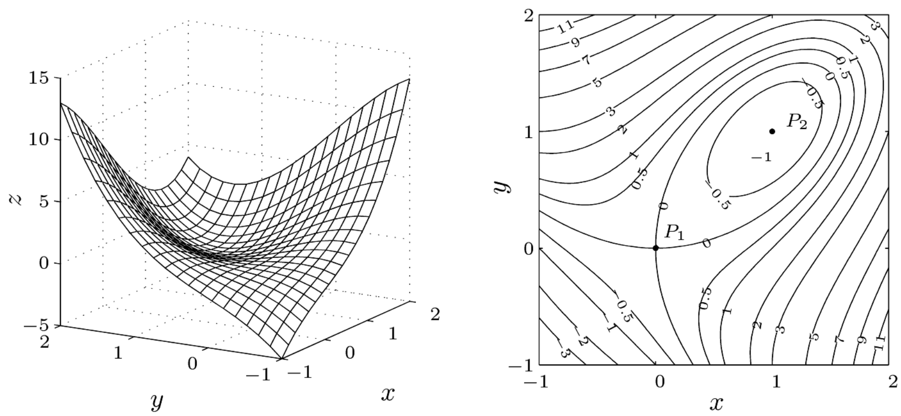


Figura 1.1 Gráfica de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ y sus curvas de nivel

6. En los siguientes ejercicios, encuentra los puntos críticos de f y determina si son máximos, mínimos o puntos silla.

   a) $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$

   b) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

   c) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$

   d) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

   e) $f(x, y) = \cos\left(x^2 + y^2\right)$. Aquí sólo considera los puntos críticos $(0, 0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, y $(0, \sqrt{\pi})$.

Solución.

a) Los puntos críticos están determinados por las ecuaciones:

$$f_x = 2x + y = 0$$
$$f_y = -2y + x = 0$$

cuya única solución es el punto $(0, 0)$. El discriminante es

$$D = f_{xx} f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -5 < 0,$$

por lo que el origen es el único punto crítico y es un punto silla.

b) Los puntos críticos están determinados por las ecuaciones:

$$f_x = 2x + 2y = 0$$
$$f_y = 2y + 2x = 0$$

cuya solución es $x = -y$. El discriminante es $D = 0$, por lo que el criterio del discriminante no decide el tipo de punto crítico. Sin embargo, ya que función es $f(x, y) = (x+y)^2$, es decir, el cuadrado de un número real, tenemos que el menor valor posible es precisamente el que se da en los puntos críticos, que es cero. Por lo tanto, los puntos críticos son de la forma $(x, -x)$, y son mínimos locales.

c) Los puntos críticos están determinados por las ecuaciones:

$$f_x = 2xe^{1+x^2-y^2} = 0$$
$$f_y = -2ye^{1+x^2-y^2} = 0$$

La función exponencial es positiva para cualquier valor real del exponente, por lo que la única solución es el punto $(0, 0)$. Las segundas derivadas son:

$$f_{xx} = 4x^2e^{1+x^2-y^2} + 2e^{1+x^2-y^2}$$
$$f_{yy} = 4y^2e^{1+x^2-y^2} - 2e^{1+x^2-y^2}$$
$$f_{xy} = -4xye^{1+x^2-y^2}$$

el discriminante en el origen es $D = -4e^2 < 0$. Entonces, el origen es el único punto crítico y es un punto silla.

d) Los puntos críticos están determinados por las ecuaciones:

$$f_x = 6x + 2y + 2 = 0$$
$$f_y = 2x + 2y + 1 = 0$$

cuya única solución es $x = y = -\frac{1}{4}$. El discriminante es $D = 8 > 0$, por lo que el punto es un extremo. Dado que los valores de f_{xx} y f_{yy} son positivos, tenemos que el punto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ es un mínimo local.

e) Los puntos críticos están determinados por las ecuaciones:

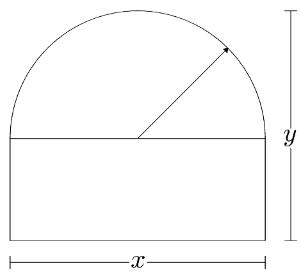
$$f_x = -2x \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right) = 0$$
$$f_y = -2y \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

Los puntos críticos son los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = \pi n$, donde n es un entero cualquiera (por ejemplo, el origen corresponde a $n = 0$). Las segundas derivadas son:

$$f_{xx} = -2 \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right) - 4x^2 \cos\left(x^2 + y^2\right)$$
$$f_{yy} = -2 \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2 \cos\left(x^2 + y^2\right)$$
$$f_{xy} = -4xy \cos\left(x^2 + y^2\right)$$

El discriminante en los puntos críticos que se están considerando es: $D_{(0,0)} = D_{(\sqrt{\pi/2},\sqrt{\pi/2})} = D_{(0,\sqrt{\pi})} = 0$, por lo que el criterio de la segunda derivada no ayuda. Sin embargo, sabemos que la función cos tiene valores entre 1 y -1, de manera que podemos deducir que $(0,0)$ es un máximo local, mientras que $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ y $(0, \sqrt{\pi})$ son mínimos locales.

7. Se desea construir una ventana de área máxima como la mostrada en la figura. Utiliza el método de la segunda derivada para calcular las dimensiones de la ventana si su perímetro debe medir 20 m.



Solución. El lado vertical de la parte rectangular de la ventana mide $y - x/2$, de modo que el área de la ventana es la suma del área rectangular y el área del semicírculo superior de radio $x/2$:

$$A(x,y) = x\left(y - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi\frac{x^2}{4}.$$

Por otra parte, el perímetro de la ventana es $2(y - x/2) + x = 20$, de donde tenemos que $y = 10 - \pi x/4$. Al sustituir y en $A(x,y)$, obtenemos el área de la ventana en función de una variable:

$$A(x) = 10x - x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right).$$

Al derivar esta función e igualar la derivada a cero, encontramos los puntos críticos:

$$\frac{dA}{dx} = 10 - x\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{\pi + 4}$$

La segunda derivada de A es $\frac{d^2A}{dx^2} = -1 - \pi/4$; que, evaluada en el punto crítico, es negativa, por lo tanto, el punto crítico es un máximo. Al sustituir el valor de x encontramos $y = 40/(\pi + 4)$.

8. Un proyectil tiene un dispositivo de control remoto que es sensible a la temperatura y a la humedad. Si t es la temperatura en °C y h es el

porcentaje de humedad, el alcance L medido en km sobre el cual se puede controlar el proyectil está dado por:

$$L = 27800 - 5t^2 - 6ht - 3h^2 + 400t + 300h$$

¿Cuáles son las condiciones atmosféricas que permiten un mayor alcance en el control del proyectil?

Solución. Para encontrar los puntos críticos, hacemos el gradiente de L igual al vector cero:

$$\nabla L = \left(\frac{\partial L}{\partial h}, \frac{\partial L}{\partial t}\right) = (-6t - 6h + 300, -10t - 6h + 400) = (0, 0).$$

De las primeras entradas de estos vectores, tenemos que $t = 50 - h$. Al sustituir en las segundas entradas, obtenemos $-10(50-h) - 6h + 400 = 0$, de donde $h = 25$, por lo que $t = 25$. La matriz de segundas derivadas es:

$$\begin{pmatrix} L_{hh} & L_{ht} \\ L_{th} & L_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es positivo, por lo que el punto crítico es un extremo. Como L_{hh} y L_{tt} son negativas, el punto crítico es un máximo relativo. La respuesta es entonces que el alcance es máximo cuando $h = 25\,\%$ de humedad y $t = 25°$ C.

9. Encuentra los puntos críticos de la función $z = \frac{y^3}{3} + x^2y - 2x^2 - 2y^2 + 6$ y determina su naturaleza.

Solución. Los puntos críticos se obtienen al igualar a cero las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 4x = 0 \Rightarrow x(y-2) = 0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 + x^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 = 4y - y^2 = y(4-y)$$

Al utilizar una solución de la primera ecuación y sustituirla en la segunda obtenemos:

a) Si $x = 0$, entonces $y(4-y) = 0$, de donde $y = 0$ ó $y = 4$.
b) Si $y = 2$, entonces $x^2 = 8 - 4 = 4$, de donde $x = 2$ ó $x = -2$.

Por lo tanto, hay cuatro puntos críticos: $P_1(0,0)$, $P_2(0,4)$, $P_3(2,2)$ y $P_4(-2,2)$. Las segundas derivadas parciales son:

$$\left.\begin{array}{l} z_{xx} = 2y - 4 \\ z_{yy} = 2y - 4 \\ z_{xy} = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow D = 4(y-2)^2 - 4x^2$$

Los discriminantes correspondientes a cada punto crítico son $D_1 = 16$, $D_2 = 16$, $D_3 = -16$ y $D_4 = -16$, respectivamente. Para el punto P_1 tenemos que $f_{xx} < 0$, mientras que para P_2, $f_{xx} > 0$. Por lo tanto, P_1 es un máximo local, P_2 es un mínimo local, y P_3 y P_4 son puntos silla.

10. Sea $f(x,y) = ax^n + cy^n$, en donde n es un entero mayor que 2 y $ac \neq 0$.

   a) Encuentra los puntos críticos.

   b) Encuentra el discriminante en cada punto crítico.

   c) Encuentra los valores extremos locales y absolutos suponiendo que

      1) $a > 0, c > 0$
      2) $a < 0, c < 0$
      3) $a > 0, c < 0$

   Solución.

   a) Las primeras derivadas son $\frac{\partial f}{\partial x} = anx^{n-1}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = cny^{n-1}$. Como a, c son distintos de cero y $n > 2$, el origen es el único punto crítico.

   b) La matriz de segundas derivadas es:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an(n-1)x^{n-2} & 0 \\ 0 & cn(n-1)y^{n-2} \end{pmatrix}$$

   El discriminante es $D = acn^2(n-1)^2(xy)^{(n-2)}$, que es cero en el origen, así que el criterio de la segunda derivada no funciona aquí.

   c) 1) $a > 0, c > 0$. Si n es par, $f(x,y) \geq 0$, así que el origen es el mínimo absoluto de la función. Si n es impar, el origen es un punto silla. Para ver esto, consideremos los puntos $(p,0), (0,p)$ con $p < 0$ arbitrariamente pequeño, en cuyo caso la función es negativa, mientras que los puntos $(q,0), (0,q)$ con $q > 0$ arbitrariamente pequeña dan un valor positivo de la función.

      2) $a < 0, c < 0$. De manera análoga al caso anterior, si n es par, el origen es el máximo absoluto de la función, mientras que si n es impar, el origen es un punto silla.

      3) $a > 0, c < 0$. El origen es un punto silla: hay puntos arbitrariamente cerca de él en donde la función es positiva o negativa.

11. Sea $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ con $abc \neq 0$.

   a) Encuentra el discriminante D.

   b) Encuentra los puntos estacionarios y los valores extremos locales y absolutos si $D \neq 0$.

   c) Supongamos que $D = 0$. Encuentra los puntos estacionarios y los valores extremos locales y absolutos suponiendo que

      1) $a > 0, c > 0$.
      2) $a < 0, c < 0$.

   Solución.

a) Las primeras derivadas son $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy$. La matriz de las segundas derivadas es:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$$

El discriminante es entonces $D = 4ac - b^2$.

b) Los puntos críticos se obtienen igualando a cero las primeras derivadas. Haciendo $2c\frac{\partial f}{\partial x} - b\frac{\partial f}{\partial y}$, obtenemos $(b^2 - 4ac)x = 0$, de donde $x = 0$ (ya que $D \neq 0$) lo que implica que $y = 0$ (como $D \neq 0$, b y c no puede ser ambos cero). El origen es el único punto crítico.

Si $D < 0$, el origen es un punto silla. Si $D > 0$ y $a > 0$ el origen es un mínimo local. Si $D > 0$ y $a < 0$ el punto es un máximo local.

c) Si $D = 0$ entonces $b^2 = 4ac$, por lo que a y c tienen el mismo signo y b puede ser positivo o negativo: $b = \pm 2\sqrt{ac}$. Los puntos críticos caen sobre la recta $\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by = 0$ (o sobre $\frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy = 0$ ya que en este caso ambas ecuaciones representan a la misma recta).

Entonces $f(x, y) = ax^2 \pm 2\sqrt{ac} + cy^2$. Hay dos casos:

1) $a > 0, c > 0$. En este caso, la función se puede escribir:

$$f(x, y) = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y)^2$$

Los puntos críticos satisfacen $\sqrt{a}x \pm \sqrt{c}y = 0$, que es un mínimo (cero) absoluto y local, pero no estricto (no es estrictamente menor que cualquier punto arbitrariamente cerca de él).

2) $a < 0, c < 0$. En este caso, la función se puede escribir:

$$f(x, y) = -(\sqrt{-a}x \mp \sqrt{-c}y)^2$$

De manera análoga al caso anterior, los puntos críticos son máximos locales no estrictos con valor de cero.

12. Encuentra los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{z^2}{2} + xy - xz + 2yz - x - y - 6z$$

y determina su naturaleza.

[Primer Examen Parcial "A" 2004-2 Problema 3]

Solución. En los puntos críticos, las primeras derivadas parciales son cero:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + y - z - 1 = 0 \\ f_y &= -3y + x + 2z - 1 = 0 \\ f_z &= z - x + 2y - 6 = 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, $z = 2x + y - 1$. Al sustituir z en la segunda y tercera ecuaciones, obtenemos $5x - y = 3$ y $x + 3y = 7$, respectivamente.

La solución de este sistema es $x = 1$ y $y = 2$, de donde $z = 3$. Es decir, sólo hay un punto crítico, que es el punto $P(1, 2, 3)$.

La matriz de las segundas derivadas es

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El Hessiano es entonces $h_1^2 - \frac{3}{2}h_2^2 + \frac{1}{2}h_3^2 + h_1h_2 + 2h_2h_3 - h_1h_3$. Tomando $h_1 = h_3 = 0$, el Hessiano es $-\frac{3}{2}h_2^2 < 0$. Tomando $h_2 = h_3 = 0$, el Hessiano es $h_1^2 > 0$. Por lo tanto el único punto crítico $(1, 2, 3)$ es un punto silla.

Por otro lado, si se obtienen los valores propios de la matriz (de manera numérica), se encuentra que son $(-4{,}11009, 2{,}62981, 1{,}48028)$, lo que confirma que el punto crítico es un punto silla.

13. Determina la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{3}y^3 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 1.$$

[Primer Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 3]

Solución. En los puntos críticos, las primeras derivadas parciales son cero:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 2 = 0 \\ f_y &= y^2 - 4 = 0 \\ f_z &= 2z + 4 = 0 \end{aligned}$$

Al resolver cada una de las ecuaciones, obtenemos $x = 1$, $y = \pm 2$ y $z = 2$, respectivamente. Los puntos críticos son entonces, $P_1(1, 2, -2)$ y $P_2(1, -2, -2)$.

La matriz de las segundas derivadas es

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos que P_1 es un mínimo, ya que todos los valores propios son positivos y P_2 es un punto silla, ya que dos valores propios son positivos y uno es negativo.

14. Verifica que el campo escalar $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ tiene un punto crítico en $(1, 1, 1)$ y determina la naturaleza de este punto crítico calculando los valores propios de su matriz Hessiana.

Solución. Las derivadas parciales de primer orden son:

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 4yz \\ f_y &= 4y^3 - 4xz \\ f_z &= 4z^3 - 4xy \end{aligned}$$

y se anulan en el punto $(1,1,1)$, por lo que el punto sí es crítico. La matriz de las segundas derivadas es:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{pmatrix}$$

Al evaluar en el punto $(1,1,1)$, tenemos que la matriz Hessiana es:

$$H|_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica se calcula con el siguiente determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} 12-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 12-\lambda & -4 \\ -4 & -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 0 & -4 \\ -4 & 16-\lambda & -4 \\ -4 & -16+\lambda & 12-\lambda \end{vmatrix}$$

en donde a la segunda columna se le restó la tercera. Sumando el tercer renglón al segundo, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 12-\lambda & 0 & -4 \\ -8 & 0 & 8-\lambda \\ -4 & -16+\lambda & 12-\lambda \end{vmatrix} = -(-16+\lambda)[(12-\lambda)(8-\lambda)-32]$$

que es igual a $-(\lambda-16)^2(\lambda-4)$. Los valores propios son 16, 16 y 4 (todos positivos), por lo que el punto crítico es un mínimo.

15. Determina todos los valores extremos absolutos y relativos, y los puntos silla para la función $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$.

Solución. Las derivadas parciales de primer orden son:

$$\begin{aligned} f_x &= y(1-x^2-y^2) + xy(-2x) = y(1-3x^2-y^2) \\ f_y &= x(1-x^2-y^2) + xy(-2y) = x(1-x^2-3y^2) \end{aligned}$$

Para que estas parciales sean igual a cero, es necesario que al menos un factor de cada una de ellas sea cero. Tomando todas las combinaciones de factores de cada derivada, se obtienen los siguientes puntos críticos:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$$
$$\left.\begin{array}{l} 1-3x^2-y^2=0 \\ 1-x^2-3y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}), (-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})$$
$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ 1-3x^2-y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,1), (0,-1)$$
$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ 1-x^2-3y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0), (-1,0)$$

Las segundas derivadas son:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6xy & 1-3x^2-3y^2 \\ 1-3x^2-3y^2 & -6xy \end{pmatrix}$$

El determinante es $D = 36x^2y^2 - (1-3x^2-3y^2)^2$, por lo que cualquier punto crítico con alguna coordenada igual a cero tiene determinante negativo y es un punto silla. Para los puntos críticos con coordenadas fraccionarias, $D = \frac{9}{4} - (-\frac{1}{2})^2 = 2 > 0$, por lo que son extremos locales. Por el valor de la segunda derivada parcial con respecto a x, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ son máximos locales, mientras que $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ son mínimos locales. Es útil comparar con la gráfica de la función, que se muestra en la Fig. 1.2, donde se graficó sobre el dominio $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. En la gráfica de curvas de nivel, se marcan los nueve puntos críticos.

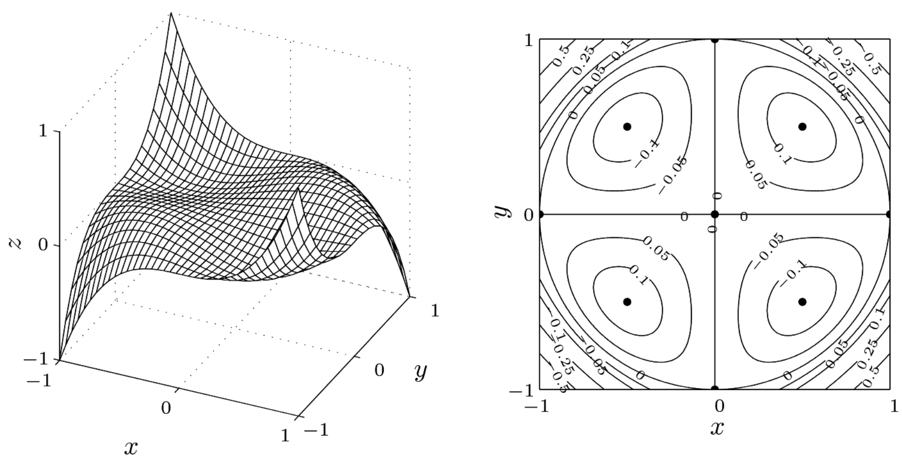


Figura 1.2 Gráfica de $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ y sus curvas de nivel

16. Encuentra el valor máximo absoluto de

$$f(x, y) = \frac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Solución. Las primeras derivadas de f son:

$$f_x = \frac{(x^2 + y^2 + 1)2(ax + by + c)a - (ax + by + c)^2 2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$f_y = \frac{(x^2 + y^2 + 1)2(ax + by + c)b - (ax + by + c)^2 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

como en un punto crítico estas derivadas son ambas cero, tenemos las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\Rightarrow(x^2+y^2+1)a=(ax+by+c)x\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\Rightarrow(x^2+y^2+1)b=(ax+by+c)y\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$$

En donde suponemos que $ax+by+c\neq 0$, que corresponde al mínimo. Al usar la relación $ay=bx$ en los términos bxy y axy tenemos:

$$\begin{array}{c}(x^2+y^2+1)a=ax^2+ay^2+cx\\ (x^2+y^2+1)b=bx^2+by^2+cy\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}a=cx\\ b=cy,\end{array}$$

por lo que el punto crítico tiene coordenadas $(a/c,b/c)$. La función evaluada en el punto crítico es:

$$f\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}+c\right)^2}{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+1}$$

Simplificando, obtenemos que el máximo absoluto es $a^2+b^2+c^2$.

17. Se desea fabricar una caja *sin* tapa, con forma de paralelepípedo recto y tal que su volumen sea de 4 m^3. Determina las dimensiones que debe tener la caja de modo que el costo de la soldadura que se va a utilizar para soldar las caras y la base sea el mínimo.

    [Primer Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 5]

    Solución. Si x,y y z denotan las aristas de la caja, el problema es hallar el mínimo de la función $f(x,y,z)=2x+2y+4z$ con la restricción $g(x,y,z)=xyz-4$, ya que el volumen debe ser 4 m^3. La ecuación $\nabla f=\lambda\nabla g$ da lugar a las ecuaciones:

    $$\begin{array}{l}2=\lambda yz\\ 2=\lambda xz\\ 4=\lambda xy.\end{array}$$

    Al dividir las dos primeras ecuaciones, encontramos que $x=y$. Al dividir la primera y la tercera ecuaciones, encontramos que $x=2z$, por lo que el volumen es $4=xyz=4z^3\Rightarrow z=1\Rightarrow x=y=2$.

18. Determina los valores extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2+5$ en la región cerrada R del plano xy limitada por las gráficas de $y=\sqrt{5}$, $y=-\sqrt{5}$ y $x^2-y^2=4$.

    [Primer Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 2]

    Solución. Es conveniente tener una representación gráfica. En la Fig. 1.3 se muestran las curvas de nivel de f, que son círculos centrados en el origen. El mínimo absoluto está en el origen (el valor mínimo de x^2+y^2 es 0), y los puntos de las esquinas de R corresponden a los máximos de f.

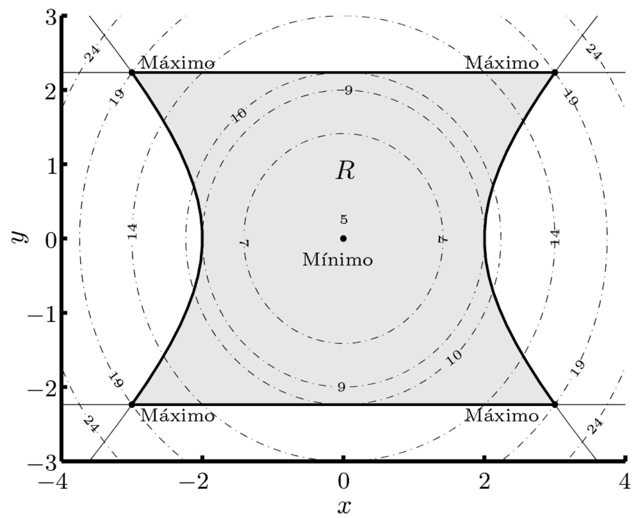


Figura 1.3 Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$ en la región R

Para verificar de manera más estricta estas afirmaciones, buscamos, en el interior de la región, los puntos críticos. Como las primeras derivadas son $f_x = 2x$ y $f_y = 2y$, sabemos que el origen es el único punto crítico. Las segundas derivadas son $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$ y $f_{xy} = 0$, por lo que $D = 4 > 0$. Como $f_{xx} > 0$, el criterio confirma que el origen es un mínimo local.

En las fronteras, tenemos dos casos: cuando $y^2 = 5$ y cuando $x^2 = 4 + y^2$. Cuando $y^2 = 5$, la función se reduce a $x^2 + 10$. El mínimo no es menor que el del origen; sólo nos interesa el máximo. Como $-3 \geq x \geq 3$, el máximo está en los puntos $(\pm 3, \pm\sqrt{5})$. Cuando $x^2 = 4 + y^2$, la función se reduce a $y^2 + 9$, lo que da lugar a los mismos puntos para el máximo absoluto.

En resumen, la función alcanza su mínimo absoluto en el origen, donde vale 5, y su máximo absoluto en los puntos $(\pm 3, \pm\sqrt{5})$ donde vale 19.

19. Encuentra los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2y - 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 4x + 2y - z$$

y determina su naturaleza.

Solución. Los puntos críticos son aquellos en los que las primeras derivadas parciales de la función son cero:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x^3 + x^2 - 2xy - 4x - 4 = 0 \\ f_y &= -x^2 + y + 2 = 0 \\ f_z &= z - 1 = 0. \end{aligned}$$

De la última ecuación, $z = 1$, y de la segunda, $y = x^2 - 2$, que al sustituir en la primera ecuación lleva a $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = 2$. Por lo tanto, los puntos críticos son $(\pm 2, 2, 1)$. La matriz de segundas derivadas es:

$$\begin{pmatrix} 6x^2 + 2x - 2y - 4 & -2x & 0 \\ -2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que evaluada en los puntos críticos, se reduce a:

$$\begin{pmatrix} 28 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 20 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Al diagonalizar estas matrices para obtener sus valores propios, sólo se necesita diagonalizar las submatrices de 2×2 de la esquina superior izquierda, así que basta aplicar el criterio de la segunda derivada para saber los signos de sus valores propios (en ambos casos, el tercer valor propio es 1). Como $20 - 16 = 4 > 0$ y $20 > 0$, los valores propios de la primera matriz son todos positivos y el punto es un mínimo local. Análogamente, como $12 - 16 = -4 > 0$, el segundo punto crítico es un punto silla.

Otra forma de hacerlo es obtener los determinantes de las submatrices a lo largo de la diagonal. Para el primer punto estos determinantes son $20, 4$ y 4, mientras que para el segundo punto, son $16, -4$ y -4. La conclusión es la misma: el primer punto crítico es un mínimo local y el segundo es un punto silla.

Otra forma de hacerlo es obtener los valores propios. La ecuación característica de la primera matriz es $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 21\lambda + 4)$, con raíces $\frac{1}{2}\left(21 \pm \sqrt{425}\right)$ y 1. La ecuación característica de la segunda matriz es $(1 - \lambda)(\lambda^2 - 13\lambda - 4)$ con raíces $\frac{1}{2}\left(13 \pm \sqrt{185}\right)$ y 1. En el primer caso, los valores propios son todos positivos, mientras que en el segundo, hay un negativo y dos positivos, lo que indica un mínimo local y un punto silla, respectivamente.

20. Calcula los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 1$ en la región $x^2 + y^2 \leq 4$.

    Solución. Es conveniente una representación gráfica como guía, por lo que es útil completar cuadrados y escribir $f(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 3$, de manera que las curvas de nivel de f son circunferencias con centro en $(-1, 1)$, mientras que la restricción es la circunferencia de radio 2 con centro en el origen. En la Fig. 1.4, la restricción es la línea punteada. Realizamos primero un análisis en el interior del círculo. Los puntos críticos están dados por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + 2 = 0 \\ f_y &= 2y - 2 = 0 \end{aligned}$$

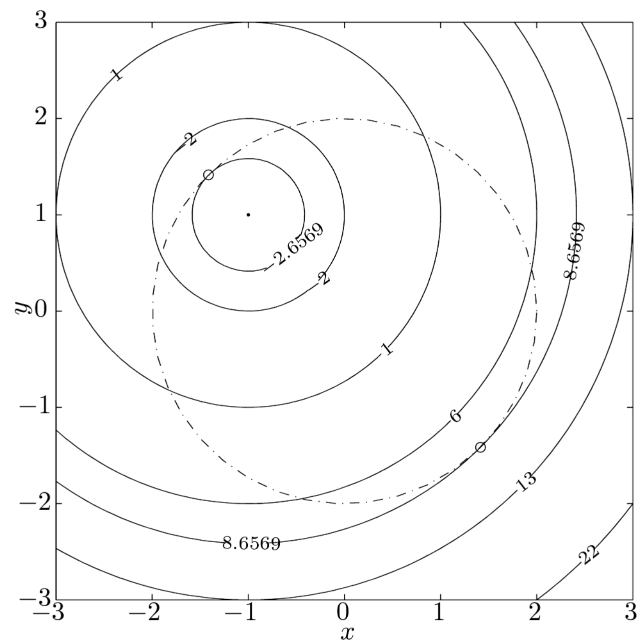


Figura 1.4 Curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 1$

de donde se obtiene que $(-1, 1)$ es un punto crítico. Las segundas derivadas son $f_{xx} = 2, f_{yy} = 2$ y $f_{xy} = 0$. Como $D = 4$ y $f_{xx} > 0$ el punto $(-1, 1)$ corresponde a un mínimo local con valor de $f(-1, 1) = -3$.

Sobre la frontera de la región, podemos utilizar multiplicadores de Lagrange, con una ecuación de restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$. La ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ da lugar a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= \lambda 2x \\ 2y - 2 &= \lambda 2y. \end{aligned}$$

Al despejar λ e igualar los valores, obtenemos que $1 + \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{y}$, de donde $x = -y$. De la ecuación de restricción, obtenemos $2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Tenemos entonces que, en la frontera, los extremos se encuetran sobre $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Al evaluar en dichos puntos, obtenemos que $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ corresponde a el máximo absoluto, con valor de $3 + 4\sqrt{2} \cong 8.657$. El punto $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde a un valor de $3 - 4\sqrt{2} \cong -2.657$, por lo que se descarta en favor del mínimo absoluto, que está en el punto $(-1, 1)$ con un valor de -3.

Otra forma de analizar la frontera es eliminar una variable con la ecuación de restricción. Para ello, usamos coordenadas polares. La función f se convierte en $f(r, \theta) = r^2 + 2r(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) - 1$, mientras que la restricción es $r = 2$. Al sustituir en f, queda una función de una sola variable: $f(\theta) = 3 + 4(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)$. Al derivar e igualar a cero, se obtiene la condición $\operatorname{sen}\theta = -\cos\theta$ que tiene soluciones $\theta = \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$. Éstas conducen a los mismos puntos que ya se obtuvieron sobre la frontera de la región.

En resumen, el máximo absoluto está en el punto $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, con valor de $3 + 4\sqrt{2}$ y el mínimo absoluto (que también es local) está en el punto $(-1, 1)$ con un valor de -3.

21. Se va a cortar y adornar un espejo rectangular con área de A centímetros cuadrados. Si los adornos a lo largo de los lados horizontales cuestan p centavos por centímetro y los de los lados verticales cuestan q centavos por centímetro, encuentra las dimensiones que minimicen el costo total.

    Solución. Si denotamos por x la longitud horizontal del espejo y por y su longitud vertical, el área es $A = xy$; ésta es la restricción, que podemos escribir como $g(x, y) = xy - A$. El costo de los adornos es $C(x, y) = px + qy$. La ecuación de multiplicadores de Lagrange es $\nabla C = \lambda \nabla g$ produce las ecuaciones

    $$\begin{aligned} p &= \lambda y \\ q &= \lambda x \end{aligned}$$

    de donde $\lambda = p/y = q/x \Rightarrow y = \frac{px}{q}$. De la restricción, $A = xy = \frac{px^2}{q} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{Aq}{p}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{Ap}{q}}$.

    También se puede eliminar una variable mediante la ecuación de restricción despejando, por ejemplo x, para sustituirla en la expresión del costo, de manera que $C(y) = pA/y + qy$. Al derivar e igualar a cero, obtenemos $\frac{dC}{dy} = -\frac{pA}{y^2} + q = 0 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{pA}{q}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{qA}{p}}$, que son las expresiones ya obtenidas.

22. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las coordenadas de los vértices de la hipérbola representada por la ecuación $xy = 4$.

    [Primer Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 4]

    Solución. El centro de la hipérbola está en el origen, de modo que el problema es encontrar los puntos de la hipérbola cuya distancia al origen es mínima. Conviene utilizar la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ con restricción $g(x, y) = xy - 4$. La ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ da lugar a las ecuaciones:

    $$\begin{aligned} 2x &= \lambda y \\ 2y &= \lambda x \end{aligned}$$

    Al despejar λ de ambas ecuaciones e igualar, obtenemos que $x^2 = y^2$. Como $xy = 4$, el signo de x y y es el mismo, así que $x = y$. De $4 = xy = x^2$, tenemos que los vértices de la hipérbola son $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

23. Un aro metálico cuya configuración geométrica está representada por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{c} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 27 = 0 \end{array} \right.$$

está en un medio con temperatura $T(x, y, z) = xyz + 10$. Determina los puntos donde el aro está más caliente y más frío.

Solución. Este es un problema con dos restricciones. La ecuación $\nabla T = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$ da lugar a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} yz &= -\lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ xz &= \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ yx &= 8\lambda_2 z \end{aligned}$$

De $x = y$ tenemos que al sustituir en las primeras dos ecuaciones se obtiene $\lambda_1 = 0$, con lo que $z = 2\lambda_2$, que al sustituir en la tercera ecuación da $x^2 = 4z^2$, pero de la otra ecuación de restricción, $4z^2 = 27 - 2x^2$. Esto implica que $x^2 = 27 - 2x^2 \Rightarrow x = \pm 3$. Los puntos son entonces $(3, 3, \frac{3}{2}), (3, 3, -\frac{3}{2}), (-3, -3, \frac{3}{2}), (-3, -3, -\frac{3}{2})$, con temperaturas respectivas de 23.5, -3.5, 23.5 y -3.5.

24. Determina el radio r y la altura h de un cilindro que puede ser inscrito en una esfera de radio R, de modo que su superficie total sea máxima.

Solución. La superficie consiste en dos tapas (de área πr^2 cada una) y la superficie lateral (de área de $\pi 2r \cdot h$), de donde la superficie del cilindro es

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

La restricción es que el cilindro está inscrito en una esfera: $R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$, por lo que función de restricción se puede escoger como

$$f(R, r) = -R^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2.$$

La ecuación $\nabla S = \lambda \nabla f$ produce las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4\pi r + 2\pi h &= \lambda 2r \\ 2\pi r &= \lambda \tfrac{h}{2} \end{aligned}$$

De la segunda ecuación, $h = \frac{4\pi r}{\lambda}$. Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos $\lambda^2 - 2\pi\lambda - 4\pi^2 = 0$, con raíces $\lambda = (1 \pm \sqrt{5})\pi$. De la restricción, $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - r^2$, y del valor de λ, $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{4r^2}{(1+\sqrt{5})^2}$. Igualando, despejamos r, y con r obtenemos h. Los valores son (descartamos los valores negativos):

$$\begin{aligned} r &= \tfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} R \cong 0.85R \\ h &= \tfrac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} R \cong 1.05R, \end{aligned}$$

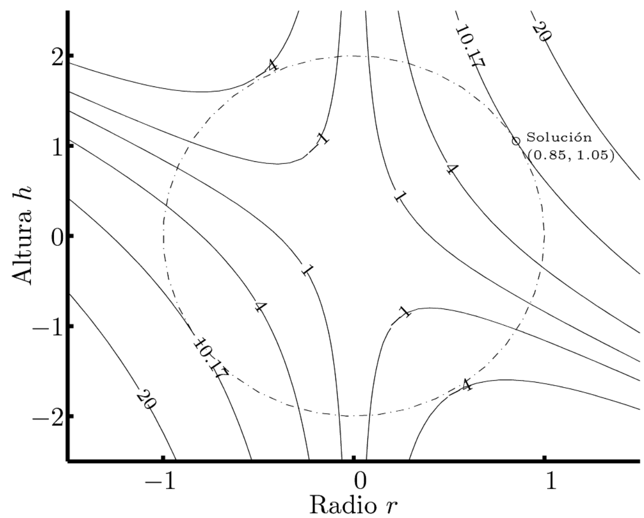


Figura 1.5 Curvas de nivel de $S(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

que corresponden a una superficie de $10.17R^2$. En la Fig. 1.5 se muestra la gráfica de las curvas de nivel de la superficie, junto con la restricción (que es la curva punteada) con $R = 1$.

25. El paraboloide $z = x^2 + y^2$ es cortado por el plano $z = 4 + x + y$. Utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular el punto de la curva de intersección entre el paraboloide y el plano que esté más alejado del origen.

Solución. Este problema tiene dos restricciones, que podemos escribir como $g_1 = z - x^2 - y^2 = 0$ y $g_2 = z - 4 - x - y = 0$. La función a la queremos buscar extremos es la distancia al origen: $d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. En este caso, es equivalente buscar los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, ya que si tenemos un punto que es extremo de f, también lo es de g. Debemos considerar dos multiplicadores de Lagrange, dado que hay dos restricciones:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2.$$

Junto con las ecuaciones de restricción tenemos cinco ecuaciones:

$$\begin{aligned}
2x &= \lambda_1(-2x) - \lambda_2 \\
2y &= \lambda_1(-2y) - \lambda_2 \\
2z &= \lambda_1 + \lambda_2 \\
z &= x^2 + y^2 \\
z &= 4 + x + y
\end{aligned}$$

Al multiplicar la primera ecuación por y, la segunda por x y restarlas, obtenemos $\lambda_2(x - y) = 0$. Si $\lambda_2 = 0$, de la primeras dos ecuaciones se deduce que $\lambda_1 = -1$ (x, y no pueden ser ambos cero ya que ni el paraboloide ni el plano pasan por el origen). De la tercera ecuación tenemos entonces que $z = -\frac{1}{2}$. Al utilizar las dos últimas ecuaciones para encontrar x y y encontramos que no hay soluciones reales.

El otro caso es cuando $x = y$. De las dos últimas ecuaciones, tenemos que $2x^2 = 4 + 2x \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$. En el caso $x = 2$, tenemos que $y = 2$, y (de la última ecuación), $z = 8$, con una distancia de $d(2, 2, 8) = \sqrt{72}$. En el caso $x = -1$, tenemos que $y = -1$ y $z = 2$, con una distancia de $d(-1, -1, 2) = \sqrt{6}$. Estos puntos son los extremos de la distancia, por lo que el punto que se pide tiene coordenadas $(2, 2, 8)$.

1.1. Problemas propuestos

Encuentra la naturaleza de todos los puntos críticos de las siguientes funciones.

1. $f(x,y) = x^2 + 9x + xy + 9y + y^2$. Respuesta: $(-3,-3)$ es un mínimo local.

2. $f(x,y) = x^2 + 42x + 4xy + 24y + 2y^2$. Respuesta: $(9,-15)$ es un punto silla.

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$. Respuesta: $(0,0)$ y $(-2,2)$ son puntos silla, $(-2,0)$ es un máximo local y $(0,2)$ es un mínimo local.

4. $f(x,y) = x^3 - 3x + y^2$. Respuesta: $(1,0)$ es un mínimo local y $(-1,0)$ es un punto silla.

5. $f(x,y) = xy(1-x-y)$. Respuesta: $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ son puntos silla, $(1/3,1/3)$ es un máximo local.

6. $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - xy$. Respuesta: $(0,0)$ es un punto silla; $(4,4)$ y $(-1,-1)$ son mínimos locales.

7. $f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - 4y + x^2y$. Respuesta: $(2,0)$ y $(-2,0)$ son puntos silla, $(0,2)$ es un mínimo local, y $(0,-2)$ es un máximo local.

8. $f(x,y) = 2 - (xy^2 - y - 1)^2 - (y^2-1)^2$. Respuesta: $(2,1)$ es un máximo local y $(0,-1)$ es un mínimo local.

9. $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Respuesta: $(0,0)$ es un punto silla. Aquí, el criterio de la segunda derivada no decide, por lo que hay que buscar otra forma de determinar la naturaleza del punto crítico.

10. $f(x,y) = (1+y)^3x^2 + y^2$. Respuesta: $(0,0)$ es un mínimo local.

11. $f(x,y) = (a-x)^2 + b(y-x^2)^2$. Respuesta: (a,a^2) es un mínimo local si $b \geqslant 0$ y es un punto silla si $b < 0$.

12. $f(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{6}y^3 + z^2 + xz - \frac{1}{2}y$. Respuesta: $(0,1,0)$ es un mínimo local y $(0,-1,0)$ es un punto silla.

13. $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + z^2 + yz - 4x$. Respuesta: $(2,0,0)$ es un mínimo local y $(-2,0,0)$ es un punto silla.

14. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$. Respuesta: $(0,0,0)$ es un mínimo local, y $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ son puntos silla.

15. $f(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$. Respuesta: $(0,0,0)$ es un mínimo local, y $(-4,-4,-4)$, $(-3/2,1,1)$, $(1,-3/2,1)$, $(1,1,-3/2)$ son puntos silla.

16. $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2y - 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 4x + 2y - z$. Respuesta: $(2,2,1)$ es un mínimo local y $(-2,2,1)$ es un punto silla.

Utiliza multiplicadores de Lagrange para resolver los siguientes problemas.

17. Encuentra los extremos de la función $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $x^2 + 4y^2 = 8$. Respuesta: El máximo absoluto se alcanza en $(2, 1)$ y en $(-2, 1)$. El mínimo absoluto se alcanza en $(-2, 1)$ y en $(2, -1)$.

18. Encuentra los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 8$ sujeta a la restricción $xy = 1$. Respuesta: El mínimo absoluto se alcanza en $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y en $\left(-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. No hay máximo absoluto.

19. Encuentra el punto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ con el máximo valor de $3x - 4y + 12z$. Es el punto $(3, -4, 12)$.

20. Encuentra el punto del plano $3x - 4y + 12z = 169$ más cercano al origen. Respuesta: Es el punto $(3, -4, 12)$.

21. Encuentra el punto de la elipse $8x^2 + y^2 = 2$ más cercano a la línea recta $x + y = 1$. Respuesta: Es el punto $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$.

22. Encuentra el mínimo de la función $x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a la restricción $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$. Respuesta: El mínimo absoluto se alcanza en los puntos $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

23. Encuentra la distancia del origen a la línea recta de ecuación $ax+by+c = 0$. Respuesta: $\left|\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

24. Encuentra la distancia del punto (m, n) a la recta $ax + by + c = 0$. Respuesta: $\left|\dfrac{am + bn + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

25. Divide el número 12 en tres partes positivas x, y, z de manera que xy^2z^3 sea máximo. Respuesta: $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$.

26. La suma de n números positivos es una constante S. Encuentra los números de manera que su producto sea máximo. Respuesta: Los números deben ser iguales todos ellos a S/n.

27. El producto de n números positivos es una constante P. Encuentra los números de manera que su suma sea mínima. Respuesta: Los números deben ser iguales todos ellos a $\sqrt[n]{P}$.

28. Una caja rectangular sin tapa debe tener un volumen de 20 m^3. El metro cuadrado del material para construir la base cuesta cinco veces más que el del material para las paredes. Encuentra las dimensiones de la caja que minimizan su costo. Respuesta: La base de la caja debe tener medidas de 2m $\times$ 2m y la altura debe ser de 5m.

1.2. Extremos de funciones

INSTRUCCIONES. Para contestar este examen, se necesita Acrobat Reader 5 (o versiones posteriores). Antes de seleccionar las respuestas, se debe dar click en “Inicio del Examen”. Al terminar, se debe dar click en “Final del Examen”. Al dar click en el botón “Muestra”, se corrigen las respuestas del examen.

Una ✓ indica que la respuesta fue correcta; una ✗, indica una respuesta incorrecta; en este caso (o si no se respondió), la respuesta correcta se marca con ●.

Inicio del Test **Extremos de funciones**

1. Una función $f(x, y)$ tiene un punto crítico P, tal que la matriz Hessiana de $f(x, y)$ evaluada en P es $H(P) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. ¿Qué tipo de punto crítico es P?

- ☐ Punto silla
- ☐ Máximo relativo
- ☐ Mínimo relativo
- ☐ Con esta información no es posible saber

1 punto

---

2. Una función $f(x, y)$ tiene un punto crítico P, tal que la matriz Hessiana de $f(x, y)$ evaluada en P es $H(P) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$. ¿Qué tipo de punto crítico es P?

- ☐ Punto silla
- ☐ Máximo relativo
- ☐ Mínimo relativo
- ☐ Con esta información no es posible saber

1 punto

---

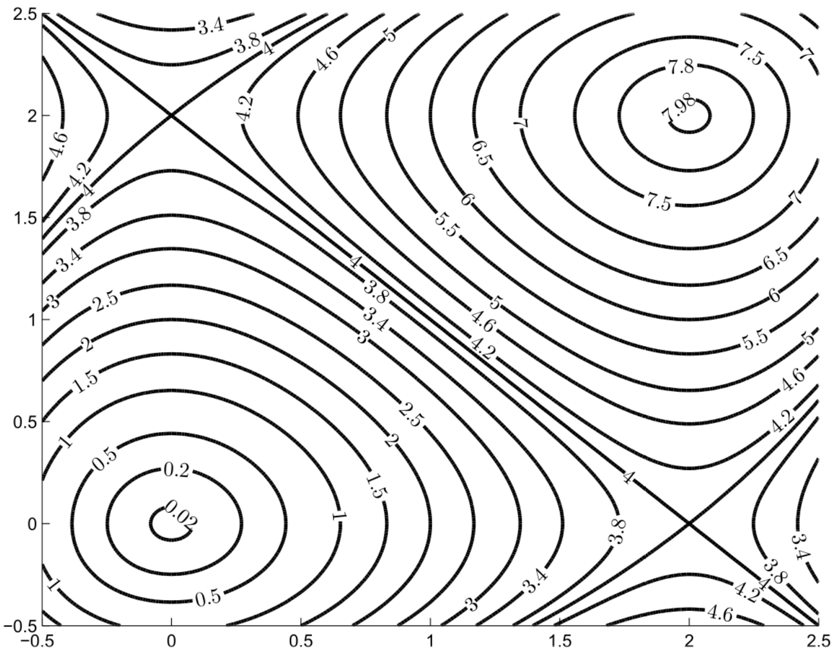
3. Sea f la función definida por $f(x, y) = ax^2 - xy + y^2 + 2x + 4y - 5$. El intervalo de valores de la constante a para los cuales f tiene un máximo relativo es:

- ☐ $-\infty < a < \frac{1}{4}$
- ☐ No existe
- ☐ $a > \frac{1}{4}$
- ☐ $-\infty < a \leq \frac{1}{4}$

1 punto

---

4. La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel de una función de dos variables. ¿Qué información se puede obtener acerca de los puntos críticos de la función?



- [ ] Hay un máximo relativo en $(2, 0)$, un mínimo relativo en $(0, 2)$ y dos puntos silla en $(0, 0)$ y $(2, 2)$
- [ ] Hay un máximo relativo en $A(0, 0)$, un mínimo relativo en $(2, 2)$ y dos puntos silla en $(0, 2)$ y $(2, 0)$
- [ ] Hay un máximo relativo en $A(2, 2)$, un mínimo relativo en $(2, 0)$ y dos puntos silla en $(0, 2)$ y $(0, 0)$
- [ ] Hay un máximo relativo en $A(2, 2)$, un mínimo relativo en $(0, 0)$ y dos puntos silla en $(2, 0)$ y $(0, 2)$

1 punto

---

5. Una función $f(x, y, z)$ tiene un punto crítico P, tal que la matriz Hessiana de $f(x, y, z)$ evaluada en P tiene valores propios -1, 3 y 4. ¿Qué tipo de punto crítico es P?

- [ ] Punto silla
- [ ] Máximo relativo
- [ ] Mínimo relativo
- [ ] Con esta información no es posible saber

1 punto

---

6. Se buscan tres números reales positivos de tal manera que su producto sea 9 y su suma sea mínima. Al resolver este problema con multiplicadores de Lagrange, una función objetivo es

☐ $f(x, y, z) = xyz$ ☐ $f(x, y, z) = x + y + z$

☐ $xyz = 9$ ☐ $x + y + z = 9$

1 punto

---

7. Se buscan las dimensiones x, y, z de una caja con un área superficial de 2 m^3, de manera que su volumen sea máximo. Al resolver este problema con multiplicadores de Lagrange, una función restricción adecuada es:

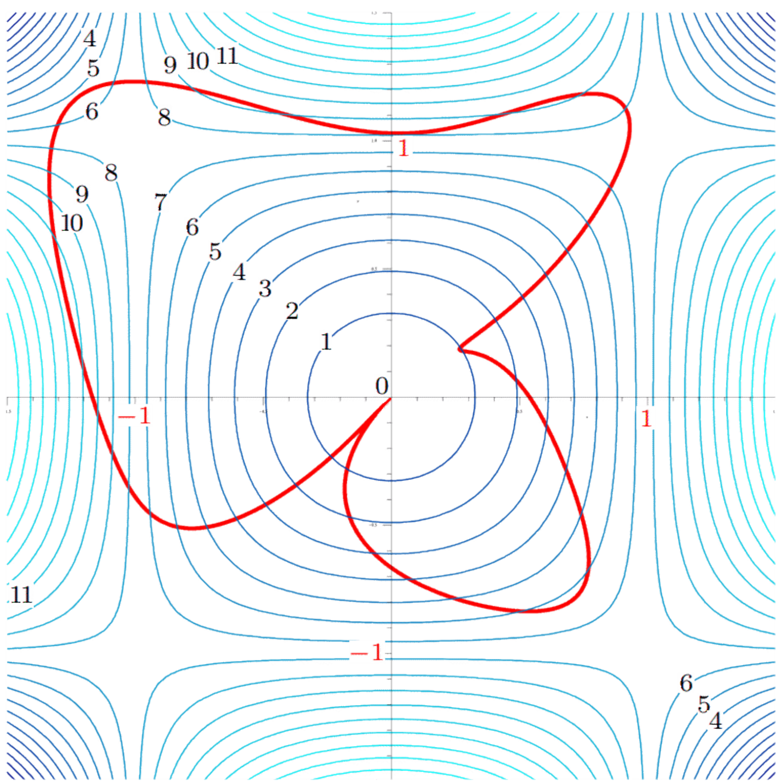
☐ $R(x, y, z) = xyz$ ☐ $R(x, y, z) = x + y + z$

☐ $R(x, y, z) = xy + yz + xz$ ☐ $R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

1 punto

---

8. La siguiente gráfica muestra las curvas de nivel de una función de dos variables y una curva restricción (en rojo). ¿Dónde están localizados los extremos de la función sujeta a la restricción?



☐ El mínimo absoluto está en $(0,0)$ y no hay máximo absoluto.

☐ El mínimo absoluto está en $(0,0)$ y el máximo absoluto está en $(-1.35, 1.15)$

☐ El mínimo absoluto está en $(0,0)$ y el máximo absoluto está en $(-1.26, 0.36)$

☐ El mínimo absoluto está en $(0,0)$ y el máximo absoluto está en $(0, 1.02)$

1 punto

---

9. Se desea encontrar los puntos de la superficie de ecuación $x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$ que están más cerca del origen. Al resolver el problema usando multiplicadores de Lagrange, ¿cuál es una función objetivo adecuada?

☐ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ☐ $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$

☐ $f(x,y,z) = x - y + z$ ☐ $f(x,y,z) = x + y + z$

1 punto

---

10. La distancia mínima de la curva $xy - x - y - 3 = 0$ al origen es:

☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 4 ☐ $\sqrt{18}$

1 punto

Final del Test

Calificación: ☐

Corrige Respuestas: Correctas

Capítulo 2

Parametrización, Triedro de Frenet

1. Calcula las coordenadas del punto P de la curva $\mathbf{r}(t) = (1-2t)\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + (2e^{2(t-1)})\hat{\mathbf{k}}$ en el que el vector $\dot{\mathbf{r}}(t)$ es paralelo a $\mathbf{r}(t)$.

   Solución. Dos vectores son paralelos si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro. El vector $\dot{\mathbf{r}}(t)$ es
   $$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-2, 2t, 4e^{2(t-1)}).$$
   Si $\mathbf{r}(t) = k\dot{\mathbf{r}}(t)$ donde k es una constante, entonces al dividir las componentes cartesianas correspondientes de cada vector, obtendremos el mismo número:
   $$\frac{1-2t}{-2} = \frac{t^2}{2t} = \frac{2e^{2(t-1)}}{4e^{2(t-1)}} = \frac{1}{2}.$$
   Por lo tanto, de la primera fracción, tenemos que $t = 1$, y las coordenadas del punto que se pide son $\mathbf{r}(1) = (-2, 2, 4)$.

2. Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria cuya ecuación vectorial es $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\hat{\mathbf{i}} + (e^t \operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{j}}$, donde t es el tiempo. Demuestra que el ángulo entre el vector de posición y el vector velocidad es constante y determina el valor de dicho ángulo.

   Solución. El vector velocidad es
   $$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t, e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t\right),$$
   y el producto punto entre el vector de posición y el vector velocidad es:
   $$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = e^{2t}\left[\cos^2 t - \cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t \cos t\right] = e^{2t},$$
   de modo que el ángulo entre los dos vectores se puede obtener de:
   $$\cos\theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\|\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \frac{e^{2t}}{e^t \cdot \sqrt{2}e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ,$$

el cual no depende de t, por lo tanto, el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ siempre es de $45°$.

3. Determina ecuaciones cartesianas para las siguientes ecuaciones paramétricas:

   a) $\mathbf{r}(t) = (t, 10/t)$ con $t \neq 0$.
   b) $\mathbf{r}(u, v) = (u - v, 4uv, (u + v)^2)$
   c) $\mathbf{r}(u, v) = (u - v, u + v, u^2 - v^2)$
   d) $\mathbf{r}(u, v) = (u - v, u + v, u^2 + v^2)$

   Solución. Las ecuaciones cartesianas son las relaciones entre x, y y z, tales que cualquier punto que las satisface, pertenece a la ecuación paramétrica dada.

   a) De la ecuación para $\mathbf{r}(t)$, tenemos que $xy = 10$.
   b) Usamos la identidad $(u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv$, para obtener que $z = x^2 + y$, con $z \geq 0$.
   c) Usamos la identidad $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$, para obtener que $xy = z$.
   d) Usamos la identidad $(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(u^2 + v^2)$, para obtener que $x^2 + y^2 = 2z$.

   En todos los casos, se pueden despejar los parámetros en función de x, y y z, de manera que cualquier punto que satisfaga la ecuación cartesiana, también satisface la ecuación paramétrica.

4. Esboza una gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas.

   a) $\mathbf{r}(u, t) = (\cos t(3 + \cos u), \operatorname{sen} t(3 + \cos u), \operatorname{sen} u)$
   b) $\mathbf{r}(u, t) = (\cos t \cos u, \operatorname{sen} t \cos u, \operatorname{sen} u)$
   c) $\mathbf{r}(u, t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, u)$
   d) $\mathbf{r}(u, t) = (u \operatorname{sen} t, u \cos t, t/3)$

   Solución.

   a) La ecuación se puede reescribir como $\mathbf{r}(u, t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0) + \cos u(\cos t, \operatorname{sen} t, 0) + \operatorname{sen} u(0, 0, 1)$ de modo que <u>para t fijo</u>, los dos últimos términos son la ecuación paramétrica de un círculo en los ejes definidos por los vectores ortogonales $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ y $(0, 0, 1)$. El primer término traslada el círculo, y cuando t varía, el círculo gira. Esta superficie es un toro. El código en Matlab:

```
[u v]=meshgrid(linspace(0,2*pi,40));
surf(cos(u).*(3+cos(v)),sin(u).*(3+cos(v)),sin(v))
view(-37.5,50)
axis([-4 4 -4 4 -3 3])
```

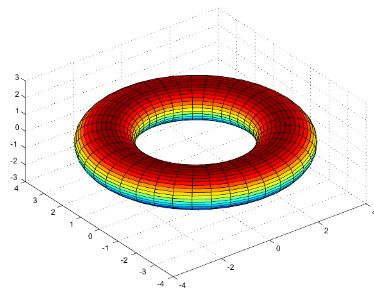


Figura 2.1 Toro

produce la Fig. 2.1.

b) La gráfica es una esfera. Para la Fig. 2.2, graficamos en un rango restringido de los parámetros:

```
U=linspace(0,2*pi-pi/4,40);
V=linspace(-pi/2,pi/2-pi/4,40);
[u v]=meshgrid(U,V);
surf(cos(u).*cos(v),sin(u).*cos(v),sin(v))
view(60,50)
axis([-1.2 1.2 -1.2 1.2 -1.2 1.2]);
```

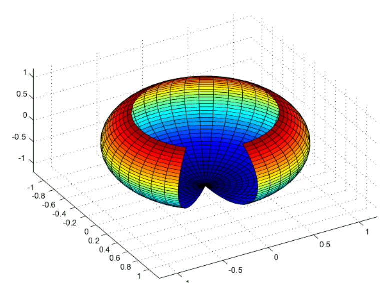


Figura 2.2 Esfera

c) La gráfica es un cilindro. A continuación el código en Matlab que produce la Fig 2.3.

```
U=linspace(0,2*pi,40);V=linspace(-3,3,20);
[u v]=meshgrid(U,V);
surf(sin(u),cos(u),v)
view(-37.5,50)
axis([-2 2 -2 2 -3 3]);
```

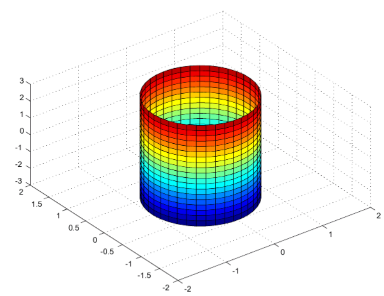


Figura 2.3 Cilindro

d) Para u fijo, la ecuación $(u \operatorname{sen} t, u \cos t, t/3)$ describe una hélice de radio u. Cuando t es fijo, es decir, a una altura $t/3$ en la hélice y a un ángulo fijo t, al variar u estamos variando el radio. Por esto, podemos ver a la superficie como generada por un segmento de recta inicialmente en el plano xy, que gira alrededor de su centro y se eleva de manera constante a lo largo del eje z. Esta superficie se conoce como *helicoide*. El siguiente código produce la superficie mostrada en la Fig. 2.4.

```
U=linspace(0,2*pi,40);V=linspace(-3,3,20);
[u v]=meshgrid(U,V);
surf(v.*sin(u),v.*cos(u),u./3)
view(-50,50)
axis([-3.5 3.5 -3.5 3.5 0 2*pi/3]);
```

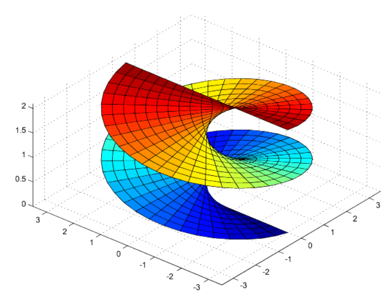


Figura 2.4 Helicoide

5. Encuentra una parametrización para las curvas o superficies definidas por las siguientes ecuaciones cartesianas.

   a) Curva $x^2 + y^2 - 6x + 12y + 44 = 0$

   b) Curva $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y + 24 = 0$

c) Superficie $x^2 - y^2 = z$

d) Superficie $yz = 1$

Solución.

a) Podemos completar cuadrados para escribir la ecuación como $(x-3)^2+(y+6)^2 = 1$, que es un círculo de radio 1 con centro en $(3,-6)$. Si pasamos a coordenadas polares centradas en el círculo: $x-3 = \operatorname{sen}\theta$, $y+6 = \cos\theta$. Tenemos entonces que una parametrización está dada por $\mathbf{r}(\theta) = (3+\operatorname{sen}\theta, \cos\theta - 6)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

b) De manera análoga al inciso anterior, completamos cuadrados para obtener $(2x+4)^2+(3y-3)^2 = 1$; y al pasar a coordenadas polares: $2x+4 = \operatorname{sen}\theta$, $3y-3 = \cos\theta$. Tenemos entonces que una parametrización está dada por $\mathbf{r}(\theta) = (\frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta - 4), \frac{1}{3}(\cos\theta + 3))$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

c) Usamos la identidad $(u+v)^2 - (u-v)^2 = 4uv$, para obtener que $\mathbf{r}(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$, en donde u y v pueden tomar cualquier valor.

d) La relación entre y y z la podemos parametrizar, por ejemplo, como $y = v$, $z = 1/v$ con $v \neq 0$. Además, como se trata de una superficie, el valor de x es libre, por lo que podemos poner $x = u$. De manera que una parametrización es $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, 1/v)$, con $v \neq 0$.

En todos los casos, se pueden despejar los parámetros en función de x, y y z, de manera que todos los puntos que satisfacen las ecuaciones cartesianas corresponden a algunos valores de los parámetros.

6. Para cada una de las siguientes curvas, determina los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de la recta tangente en los puntos que corresponden a $t = 0$.

a) $\mathbf{r}(t) = 6t\hat{\mathbf{i}} + 3t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$

b) $\mathbf{p}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^2, t)$

c) $\mathbf{p}(t) = (t\operatorname{sen}t, t\cos t, \sqrt{3}t)$

d) $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\hat{\mathbf{i}} + e^t\hat{\mathbf{j}} + e^{-t}\hat{\mathbf{k}}$

Solución.

a) La velocidad es $\dot{\mathbf{r}}(t) = 6\hat{\mathbf{i}}+6t\hat{\mathbf{j}}+3t^2\hat{\mathbf{k}}$ y la aceleración es $\ddot{\mathbf{r}}(t) = 6\hat{\mathbf{j}}+6t\hat{\mathbf{k}}$. Cuando $t = 0$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, y $\dot{\mathbf{r}}(0) = 6\hat{\mathbf{i}}$, por lo tanto, la recta tangente a $\mathbf{r}(t)$ en $t = 0$ está dada por $\mathbf{s}(t) = 6t\hat{\mathbf{i}}$.

b) La velocidad es $\dot{\mathbf{p}}(t) = (-\operatorname{sen}2t, 3-2t, 1)$ y la aceleración es $\ddot{\mathbf{p}}(t) = (-2\cos 2t, -2, 0)$. Cuando $t = 0$, $\mathbf{p}(0) = (1,0,0)$, y $\dot{\mathbf{p}}(0) = (0,0,1)$, así que la recta tangente a $\mathbf{p}(t)$ en $t = 0$ es $\mathbf{q}(t) = (1,0,t)$.

c) La velocidad es $\dot{\mathbf{p}}(t) = (t\cos t + \operatorname{sen}t, -t\operatorname{sen}t + \cos t, \sqrt{3})$ y la aceleración es $\ddot{\mathbf{p}}(t) = (-t\operatorname{sen}t + 2\cos t, -t\cos t - 2\operatorname{sen}t, 0)$. Cuando $t = 0$, $\mathbf{p}(0) = (0,0,0)$, y $\dot{\mathbf{p}}(0) = (0,1,\sqrt{3})$, por lo que la recta tangente a $\mathbf{p}(t)$ en $t = 0$ es $\mathbf{q}(t) = (0,t,\sqrt{3}t)$.

d) La velocidad es $\dot{\mathbf{r}}(t) = \sqrt{2}\hat{\mathbf{i}} + e^t\hat{\mathbf{j}} - e^{-t}\hat{\mathbf{k}}$ y la aceleración es $\ddot{\mathbf{r}}(t) = e^t\hat{\mathbf{j}} + e^{-t}\hat{\mathbf{k}}$. Cuando $t = 0$, $\mathbf{r}(0) = \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, y $\dot{\mathbf{r}}(0) = \sqrt{2}\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, por lo tanto, la recta tangente a $\mathbf{r}(t)$ en $t = 0$ está dada por $\mathbf{s}(t) = \sqrt{2}t\hat{\mathbf{i}} + (1+t)\hat{\mathbf{j}} + (1-t)\hat{\mathbf{k}}$.

7. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t - \operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{i}} + (\operatorname{sen} t - \cos t)\hat{\mathbf{j}}$ con $t \geq 0$. Determina las componentes tangencial y normal de la aceleración.

   Solución. La velocidad es $\dot{\mathbf{r}}(t) = (-\operatorname{sen} t - \cos t)\hat{\mathbf{i}} + (\cos t + \operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{j}}$ y la aceleración es $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-\cos t + \operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{i}} + (-\operatorname{sen} t + \cos t)\hat{\mathbf{j}}$. La trayectoria es un segmento de línea recta, como puede verse de la relación cartesiana entre los componentes de la ecuación vectorial: $x = -y$. Es claro entonces que no hay componente normal de la aceleración. Esto se puede verificar al hacer el producto cruz entre la velocidad y la aceleración:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -\operatorname{sen} t - \cos t & \cos t + \operatorname{sen} t & 0 \\ -\cos t + \operatorname{sen} t & -\operatorname{sen} t + \cos t & 0 \end{vmatrix} \\
&= \big(0, 0, \operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t - \cos^2 t \\
&\qquad + \cos^2 t - \operatorname{sen} t \cos t + \operatorname{sen} t \cos t - \operatorname{sen}^2 t\big) \\
&= (0,0,0) = \vec{0}.
\end{aligned}$$

   Por tanto, la aceleración sólo tiene componente tangencial, que es ella misma.

8. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva C representada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2)\hat{\mathbf{i}} + (\operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{j}} + (\cos t)\hat{\mathbf{k}}.$$

   Dado el punto $A(0,0,1)$ sobre C, encuentra:

   a) Los vectores velocidad y aceleración en A.

   b) Los vectores aceleración normal y aceleración tangencial en A.

   c) ¿La trayectoria está contenida en un plano?

   [Primer Examen Final "B" 2005-1 Problema 2]

   Solución.

   a) La velocidad es $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, \cos t, -\operatorname{sen} t)$, y la aceleración es $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (2, -\operatorname{sen} t, -\cos t)$. En A, $t = 0$, por lo que velocidad y aceleración son $(0,1,0)$ y $(2,0,-1)$, respectivamente.

   b) La aceleración es perpendicular a la velocidad, así que la aceleración sólo tiene componente normal. Es decir: $\vec{a}_N = \ddot{\mathbf{r}}(0) = (2,0,-1)$ y $\vec{a}_T = \ddot{\mathbf{r}}(0) - \vec{a}_N = (0,0,0)$.

c) La proyección en el plano yz es un círculo, mientras que la componente x va creciendo de manera cuadrática. La curva es entonces una hélice circular cuyo paso va aumentando. Es claro que *no* está contenida en un plano. También se puede calcular la torsión para ver que es así▶, pero el enunciado del problema no pedía ese cálculo.

De hecho, si se calcula la torsión en este punto, se obtiene cero; lo que no significa que la curva sea plana, así como una curva con derivada igual a cero en un punto no necesariamente es una recta horizontal. La curva es plana si la torsión es cero para todos los puntos de la curva.

9. Sea la curva
$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ y = x \end{cases}$$
Determina los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$, así como la curvatura y la torsión de la curva, para el punto $P(1, 1, 2)$.

[Segundo Examen Parcial "A" 2004-1 Problema 1]

Solución. La torsión en cualquier punto sobre C es cero ya que la curva se encuentra sobre el plano $x - y = 0$. Un vector normal unitario a este plano es $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, de manera que el vector binormal es (para todos los puntos de C) este vector, o su negativo, dependiendo de la parametrización. Si parametrizamos la curva como $\mathbf{r}(t) = (t, t, 2t^2)$, la binormal es
$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0).$$
La velocidad es $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 1, 4t)$, así que el vector tangente unitario en $P(1, 1, 2)$, que corresponde a $t = 1$ es:
$$\mathbf{T}_P = \frac{(1, 1, 4)}{3\sqrt{2}},$$
por lo que el vector normal principal en P es
$$\mathbf{N}_P = \mathbf{B}_P \times \mathbf{T}_P = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-4, -4, 2) = \frac{1}{3}(-2, -2, 1).$$
La rapidez en P es $3\sqrt{2}$. La aceleración es $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 0, 4)$, así que la componente normal de la aceleración es $a_N = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{N} = \frac{4}{3}$. De la fórmula para la aceleración $\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$, vemos que se debe cumplir $\frac{4}{3} = \kappa(3\sqrt{2})^2$, así que la curvatura es $\kappa = \frac{2}{27}$.

Otra forma (más laboriosa) de resolver el problema, es calcular $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa$ y τ con las fórmulas usuales. Los vectores tangente unitario y normal principal son:
$$\mathbf{T} = \frac{(1, 1, 4t)}{\sqrt{16t^2 + 2}} \Rightarrow \mathbf{N} = \frac{\dot{\mathbf{T}}}{|\dot{\mathbf{T}}|} = \frac{(-2t, -2t, 1)}{\sqrt{8t^2 + 1}},$$
por lo que el vector binormal y la torsión son:
$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \Rightarrow \tau = \left|\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right| = 0.$$

Finalmente, se encuentra que la curvatura es:

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{\dot{\mathbf{T}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\right| = \frac{2}{(8t^2+1)^{3/2}}.$$

Al sustituir $t = 1$, obtenemos las expresiones que ya teníamos.

10. Sea la curva C representada por

$$C : \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Para el punto $(1, 0, 3)$ que pertenece a dicha curva, determina:

a) El triedro móvil.

b) La curvatura y la torsión.

c) La ecuaciones de la circunferencia de curvatura.

[Segundo Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 1]

Solución. La curva está en el plano $z = 3$, así que la torsión es cero y el vector binormal es $\mathbf{B} = (0, 0, -1)$ (o el negativo, según la parametrización). Si al pasar por el vértice de la hipérbola $V(1, 0, 3)$ vamos en el sentido positivo de las y, entonces el vector tangente unitario es $\mathbf{T} = (0, 1, 0)$, y el vector normal principal es $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (1, 0, 0)$ en V.

De la ecuación $(x+y)(x-y) = 1$, obtenemos una parametrización al hacer $x + y = t, x - y = 1/t$. La curva es $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}(t + t^{-1}), \frac{1}{2}(t - t^{-1}), 3)$, y V corresponde a $t = 1$. La velocidad es $\dot{\mathbf{r}}(t) = (\frac{1}{2}(1 - t^{-2}), \frac{1}{2}(1 + t^{-2}), 0)$ y la aceleración $\ddot{\mathbf{r}}(t) = (t^{-3}, -t^{-3}, 0)$, que en $t = 1$ es $(1, -1, 0)$, así que la aceleración normal es $\vec{a}_N = \mathbf{N}$. Además, la rapidez en V es 1, por lo que $\vec{a}_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \mathbf{N} = \kappa \cdot 1^2 \cdot \mathbf{N}$ de donde la curvatura es $\kappa = 1$, y el radio de curvatura es $\rho = 1$. El centro de la circunferencia de curvatura está entonces en $(1, 0, 3) + (1, 0, 0) = (2, 0, 3)$, y las ecuaciones de la circunferencia de curvatura son $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ y $z = 3$.

11. Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria $\tilde{\mathbf{r}}(t) = 4t^2\hat{\mathbf{i}} - 3t^2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, donde t es el tiempo. Determina:

a) La velocidad $\tilde{\mathbf{v}}$ y la rapidez $|\tilde{\mathbf{v}}|$ de la partícula.

b) La aceleración $\tilde{\mathbf{a}}$ y su módulo $|\tilde{\mathbf{a}}|$.

c) La curvatura κ y la torsión τ de la trayectoria.

d) La forma de la trayectoria.

[Segundo Examen Parcial "B" 2002-2 Problema 1]

Solución.

a) La velocidad es la derivada del vector posición con respecto al tiempo:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = 8t\hat{\mathbf{i}} - 6t\hat{\mathbf{j}}$$

La rapidez es el módulo del vector velocidad: $|\tilde{\mathbf{v}}| = \sqrt{64t^2 + 36t^2} = 10t$.

b) La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = 8\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}$$

El módulo del vector aceleración es $|\tilde{\mathbf{a}}| = \sqrt{64 + 36} = 10$.

c) El vector tangente unitario es $\mathbf{T} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{|\tilde{\mathbf{v}}|} = \frac{8t\hat{\mathbf{i}}-6t\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{64t^2+36t^2}} = \frac{8t\hat{\mathbf{i}}-6t\hat{\mathbf{j}}}{10t} = \frac{4}{5}\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{5}\hat{\mathbf{j}}$, es decir, constante, por lo que $\kappa = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$. También se puede calcular la curvatura mediante la fórmula:

$$\kappa = \frac{\left|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\right|}{\left|\dot{\mathbf{r}}\right|^3} = \frac{\left(8t\hat{\mathbf{i}}-6t\hat{\mathbf{j}}\right)\times\left(8\hat{\mathbf{i}}-6\hat{\mathbf{j}}\right)}{\left|8t\hat{\mathbf{i}}-6t\hat{\mathbf{j}}\right|^3}$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 8t & -6t & 0 \\ 8 & -6 & 0 \end{vmatrix}}{(64t^2+36t^2)^{3/2}} = \frac{(-48t+48t)\hat{\mathbf{k}}}{1000t^3} = 0$$

El que $\kappa = 0$, debía esperse si se había visualizado la trayectoria, el último inciso obliga a pensar en esto. La torsión es 0 ya que la curva está contenida en un plano. Esto también se puede ver de la ecuación que define la torsión: $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, y de que $\mathbf{N} \neq \tilde{\mathbf{0}}$.

d) Las componentes cartesianas son $z = 2$, $x = 4t^2$ y $y = -3t^2$ por lo que $t^2 = x/4 = -y/3$. Es decir, la relación entre x y y es $3x + 4y = 0$. La trayectoria es una línea recta en un plano paralelo a xy a una altura de $z = 2$. También se puede deducir que es una recta a partir de que la curvatura es cero.

12. Encuentra la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie que tiene por ecuación

$$\mathbf{r}(s,t) = 2(s+t)\hat{\mathbf{i}} + 2(s-t)\hat{\mathbf{j}} + 16st\hat{\mathbf{k}}$$

en el punto $(2, -2, 0)$.

Solución. En $(2, -2, 0)$, tenemos $s = 0$ y $t = 1$. Los vectores tangentes son $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s} = (2, 2, 16t)$ y $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = (2, -2, 16s)$, que en $s = 0$, $t = 1$ son $(2, 2, 16)$ y $(2, -2, 0)$. Un vector normal a la superficie (y al plano tangente), es:

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & 2 & 16 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (32, 32, -8) = 8\,(4, 4, -1)\,.$$

La ecuación cartesiana del plano tangente es $(x-2, y+2, z)\cdot(4, 4, -1) = 0 \Rightarrow z = 4(x+y)$.

13. Obtén la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie S representada por

$$S : \begin{cases} x = \sec v \\ y = \operatorname{sen} u \tan v \\ z = \cos u \tan v \end{cases}$$

con $u \in (0, \pi/2)$, $v \in (0, \pi/2)$, en el punto $P(3, 2, 2)$.

Solución. Las derivadas parciales de $\mathbf{r}$ con respecto a u y v son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= (0, \cos u \tan v, -\operatorname{sen} u \tan v) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \left(\sec v \tan v, \operatorname{sen} u \sec^2 v, \cos u \sec^2 v\right), \end{aligned}$$

y su producto cruz es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \sec v \tan v \,(\sec v, -\operatorname{sen} u \tan v, -\cos u \tan v) \\ &= \sec v \tan v (x, -y, -z). \end{aligned}$$

En la última expresión se usaron las ecuaciones de la parametrización de S. Entonces un vector normal a S es $(x, -y, -z)$. En $P(3, 2, 2)$, el vector normal es $(3, -2, -2)$, así que la ecuación del plano tangente a S en $P(3, 2, 2)$ es

$$(x - 3, y - 2, z - 2) \cdot (3, -2, -2) = 0,$$

reduciendo, la ecuación es $3x - 2y - 2z = 1$.

14. Sea la curva C representada por

$$\mathbf{r}(t) = t\hat{\mathbf{i}} + (t^{-1} + 1)\hat{\mathbf{j}} + (t^{-1} - t)\hat{\mathbf{k}}$$

Para el punto $A(1, 2, 0)$ que pertenece a la curva, determina:

a) Los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$.

b) La curvatura y la torsión.

[Segundo Examen Parcial "A" 2005-2 Problema 1]

Solución. La curva se encuentra sobre el plano $x - y + z = -1$, de modo que la torsión es cero. El vector binormal es proporcional a $(1, -1, 1)$, que es normal al plano. Debido a la parametrización, cuando t aumenta de 0 a 1, el punto viene desde $(0, \infty, \infty)$ hasta $(1, 2, 0)$, así que el sentido positivo de la curva es el del vector $(1, -1, 1)$. Entonces el vector binormal (que es unitario) es $\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$ para todos los puntos de la curva. La velocidad está dada por

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(1, -t^{-2}, -t^{-2} - 1\right),$$

así que el vector tangente unitario en $A(1,2,0)$, que corresponde a $t=1$, es

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2).$$

El vector normal es:

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\times\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3,3,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

La rapidez en $A(1,2,0)$ es $\sqrt{6}$. La aceleración es $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 2t^{-3}, 2t^{-3})$, que en $t=1$ es $(0,2,2)$, así que la componente normal de la aceleración es $a_N = \ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{N} = \sqrt{2}$. De la fórmula para la aceleración $\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}$, vemos que se debe cumplir $\sqrt{2} = \kappa(\sqrt{6})^2$, así que la curvatura es $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Otra forma (mucho más laboriosa) de resolver el problema, es calcular $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa$ y τ con las fórmulas usuales. Los vectores tangente unitario y normal principal son:

$$\mathbf{T} = \frac{\left(1, -t^{-2}, -t^{-2}-1\right)}{\sqrt{2(t^{-4}+t^{-2}+1)}} \Rightarrow \mathbf{N} = \frac{\dot{\mathbf{T}}}{|\dot{\mathbf{T}}|} = \frac{(2t^{-2}+1, t^{-2}+2, 1-t^{-2})}{\sqrt{6(t^{-4}+t^{-2}+1)}},$$

por lo que el vector binormal y la torsión son:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0) \Rightarrow \tau = \left|\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right| = 0.$$

Finalmente, se encuentra que la curvatura es:

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{\dot{\mathbf{T}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{t^{-3}}{(t^{-4}+t^{-2}+1)^{3/2}}.$$

Al sustituir $t=1$, recuperamos las expresiones anteriores.

15. Sean las superficies S_1 y S_2 representadas por:

$$\begin{aligned} &S_1 : \mathbf{r}(s,t) = (2\operatorname{sen} t\cos s)\hat{\mathbf{i}} + (3\operatorname{sen} t\operatorname{sen} s)\hat{\mathbf{j}} + (3\cos t)\hat{\mathbf{k}} \\ &S_2 : \mathbf{r}(u,v) = (u)\hat{\mathbf{i}} + (v)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

a) Calcula el ángulo que forman S_1 y S_2.

b) Identifica las superficies.

[Segundo Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 3]

Solución. En este problema es más sencillo considerar la situación geométrica. S_1 es un elipsoide (sus ecuaciones paramétricas son las ecuaciones de transformación de las coordenadas esféricas), centrado en el origen, con sus ejes principales a lo largo de los ejes x, y y z. S_2 es el plano xz, por lo que S_1 y S_2 son ortogonales.

A continuación se describe la solución más analítica, que en este caso es más laboriosa. El ángulo entre las superficies es el ángulo entre sus vectores normales. En el caso de la superficie S_1, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} &= (-2\operatorname{sen} t \operatorname{sen} s, 3\operatorname{sen} t\cos s, 0)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} &= (2\cos t\cos s, 3\cos t\operatorname{sen} s, -3\operatorname{sen} t),\end{aligned}$$

por lo que el vector normal a S_1 está dado por

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \left(-9\operatorname{sen}^2 t\cos s, -6\operatorname{sen}^2 t\operatorname{sen} s, -3\operatorname{sen} 2t\right).$$

En el caso de S_2,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= (1,0,0)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (0,0,1)\end{aligned}$$

por que su vector normal es

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0,-1,0).$$

El coseno del ángulo entre los vectores normales es

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1|\cdot|\mathbf{n}_2|} = \frac{6\operatorname{sen}^2 t\operatorname{sen} s}{\sqrt{36\operatorname{sen}^2 t + 45\operatorname{sen}^4 t\cos^2 s}}.$$

En los puntos comunes entre S_1 y S_2 debe cumplirse que sus componentes en y sean iguales: $3\operatorname{sen} t\operatorname{sen} s = 0$, por lo que $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$.

16. Sea la curva C que resulta de la intersección entre las superficies

$$S_1 : \mathbf{r}(s,t) = (s+t)\hat{\mathbf{i}} + (4st)\hat{\mathbf{j}} + (s-t)\hat{\mathbf{k}} \text{ y } S_2 : \mathbf{r}(u,v) = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$$

   a) Identifica las superficies.
   b) A partir de las ecuaciones vectoriales de S_1 y S_2, determina la ecuación cartesiana del plano normal a la curva C, en el punto $P(0,-4,2)$.
   c) Encuentra una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva C en el punto $P(0,-4,2)$.

[Segundo Examen Parcial "A" 2004-1 Problema 4]

Solución.

   a) En la supeficie S_1, tenemos que se cumple la relación $x^2 - z^2 = y$ entre sus componentes, además, por la parametrización, $s+t$ y $s-t$ puede tomar cualquier valor real, por lo que S_1 es un paraboloide hiperbólico (una silla de montar). En cuanto a S_2, es un plano paralelo al plano xy con coordenada $z = 2$.

b) La intersección de S_1 y S_2 debe tener $z = 2$; entonces la ecuación cartesiana de C es $y = x^2 - 4$, que es una parábola en un plano paralelo a xy, con $z = 2$; el punto P que corresponde a $t = -1$ es el vértice de esta parábola, por lo que podemos ver que la ecuación del plano normal a C en P es $x = 0$, es decir, el plano yz.

En un caso más general donde no sea clara la situación geométrica, hay que hallar el vector normal a la curva. Aquí, $s-t = 2$, $s+t = 2t+2$ y $4st = 4t^2 + 8$, por lo que la ecuación paramétrica de C es

$$\mathbf{r}(t) = \big(2t + 2, 4t^2 + 8t, 2\big)$$

El vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|} = \frac{(2, 8t + 8, 0)}{\sqrt{64t^2 + 128t + 68}}$$

que en el punto P es $\mathbf{T}(-1) = (1, 0, 0)$. Entonces la ecuación cartesiana del plano normal a la curva es $(x-0, y-(-4), z-2) \cdot (1, 0, 0) = 0$. Es, como ya sabíamos, $x = 0$.

c) Del inciso anterior, $\mathbf{T}(-1) = (1, 0, 0)$, por lo que una ecuación paramétrica de la tangente a C en $P(0, -4, 2)$ es $\mathbf{r}(w) = w(1, 0, 0) + (0, -4, 2) = (w, -4, 2)$ en donde el punto $P(0, -4, 2)$ corresponde a $w = 0$.

Capítulo 3

Coordenadas curvilíneas

1. Dadas las ecuaciones de transformación

$$\begin{aligned} x + y &= u + v \\ x - y &= 2u + v \end{aligned}$$

   a) Calcula los jacobianos $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ y $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.

   b) Sea la región R del plano xy limitada por las rectas $x = 0$, $y = x - 2$, $y = 1$. Determina la región R' del plano uv en que se tranforma R y representa gráficamente a R y R'.

   Solución.

   a) De las ecuaciones de transformación, encontramos que las derivadas parciales son: $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{3}{2}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{2}$ y $\frac{\partial y}{\partial v} = 0$. El jacobiano es:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \Rightarrow J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = 2.$$

   b) R es un triángulo en xy que se transforma en un triángulo en uv. Los vértices $A(0,1)$, $B(3,1)$ y $C(0,-2)$ se transforman en $A'(-2,3)$, $B'(-2,6)$ y $C'(4,-6)$ en uv. En la Fig. 3.1 se muestran R y R'.

2. Considera el sistema de coordenadas curvilíneas definido por las ecuaciones

$$\begin{aligned} u &= 3x + y \\ v &= x - 3y \end{aligned}$$

   a) Determina si el sistema es ortogonal.

   b) Calcula los vectores unitarios $\hat{e}_u$ y $\hat{e}_v$.

   c) Calcula los factores de escala.

   d) Determina los jacobianos de la transformación $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ y $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$.

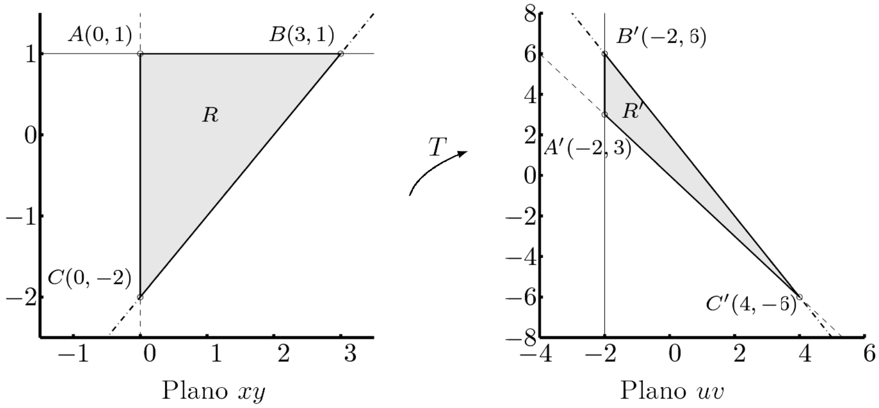


Figura 3.1 $T(x, y) = (-2y, x + 3y)$

[Segundo Examen Parcial "B" 2005-1 Problema 5]

Solución.

a) Las superficies correspondientes a u constante y v constante están dadas por $\mathbf{r} \cdot (3, 1) = \text{cte}_1$ y $\mathbf{r} \cdot (1, -3) = \text{cte}_2$, respectivamente (en donde $\mathbf{r} = (x, y)$). Las normales son perpendiculares, ya que $(3, 1) \cdot (1, -3) = 0$. Por ello, sistema es ortogonal.

b) Al despejar x, y y obtener sus derivadas parciales con respecto a u, v, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{10}(3u + v) \\ y = \frac{1}{10}(u - 3v) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{3}{10}, \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{10} \\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{10}, \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{3}{10} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{1}{10}, -\frac{3}{10}\right) \end{array}$$

Al normalizar las parciales encontramos que los vectores unitarios son: $\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)$ y $\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3)$.

c) Los factores de escala son los factores de normalización en el inciso anterior: $h_u = h_v = \sqrt{10}/10 = 1/\sqrt{10}$.

d) Los jacobianos son:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{100}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{10} \Rightarrow J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = -10$$

3. Sea la transformación T: $\left\{\begin{array}{c} u = x + 2y - 1 \\ v = 2y - x \end{array}\right.$ y sea R una región en el plano XY cuya área es igual a 3 u^2. Determina:

a) si el sistema de coordenadas (u, v) es ortogonal.

b) los factores de escala h_u y h_v.

c) los vectores base $\hat{e}_u$ y $\hat{e}_v$.

d) el Jacobiano de transformación $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

e) el área de la región R', siendo R' la imagen de la región R bajo la transformación T.

[Segundo Examen Parcial "B" 2004-2 Problema 5]

Solución. Al despejar x y y, obtenemos que $x = \frac{1}{2}(u - v + 1)$ y $y = \frac{1}{4}(u + v + 1)$. Las derivadas parciales que necesitamos son

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}; \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{2}; \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{4}; \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{4}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} h_u^2 &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{5}{16} \\ h_v^2 &= \left(\tfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \tfrac{5}{16} \\ h_{uv} &= 2\left(\tfrac{\partial x}{\partial u}\tfrac{\partial x}{\partial v} + \tfrac{\partial y}{\partial u}\tfrac{\partial y}{\partial v}\right) = 2\left(\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{3}{8} \end{aligned}$$

Esto nos ayuda para las soluciones:

a) Como $h_{uv} \neq 0$, el sistema *no* es ortogonal. Esto también puede verse de la expresión para los vectores unitarios, en el inciso *c*).

b) Los factores de escala son $h_u = h_v = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

c) Los vectores base son $\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial i}$:

$$\begin{aligned} \hat{e}_u &= \tfrac{1}{h_u}\left(\tfrac{\partial x}{\partial u}, \tfrac{\partial y}{\partial u}\right) = \tfrac{4}{\sqrt{5}}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1) \\ \hat{e}_v &= \tfrac{1}{h_v}\left(\tfrac{\partial x}{\partial v}, \tfrac{\partial y}{\partial v}\right) = \tfrac{4}{\sqrt{5}}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1) \end{aligned}$$

d) El Jacobiano es $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

e) El área de R en xy es $3 = \int_R dxdy$, esto es igual a $\int_{R'} J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) dudv$, que por el inciso anterior, es $\frac{1}{4}$ del área de R', por lo tanto $A_{R'} = 12\mathrm{u}^2$.

4. Sea la transformación T: $\begin{cases} u = 2x \\ v = 2y - x^2 \end{cases}$, y sea la región R del plano xy limitada por las curvas $x = 1$, $2y = 1 + x^2$ y $2y = x^2 - 2x$.

a) Determina si el sistema de coordenadas (u, v) es ortogonal.

b) Grafica la región R del plano xy.

c) Grafica la región R' del plano uv, que es la región en la cual se transforma la región R bajo la transformación T.

d) Calcula el Jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$.

e) Calcula el área de la región R.

[Segundo Examen Parcial "A" 2004-1 Problema 5]

Solución. Al obtener las derivadas parciales con respecto a x y y de las ecuaciones de transformación, obtenemos $\frac{\partial u}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -2x$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = 2$. De aquí, tenemos que el $\nabla u \cdot \nabla v = -4x$, por lo que el sistema no es ortogonal. Se puede obtener el siguiente jacobiano:

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2x & 2 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}.$$

El área de R en xy es $\int_R dxdy = \int_{R'} J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) dudv = \frac{1}{4}\int_{R'} dudv$ que es un cuarto del área de R'. El área de R' es $\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$ (es un triángulo), así que el área de R es $\frac{9}{8}\text{u}^2$. En la Fig. 3.2 se ilustran las regiones.

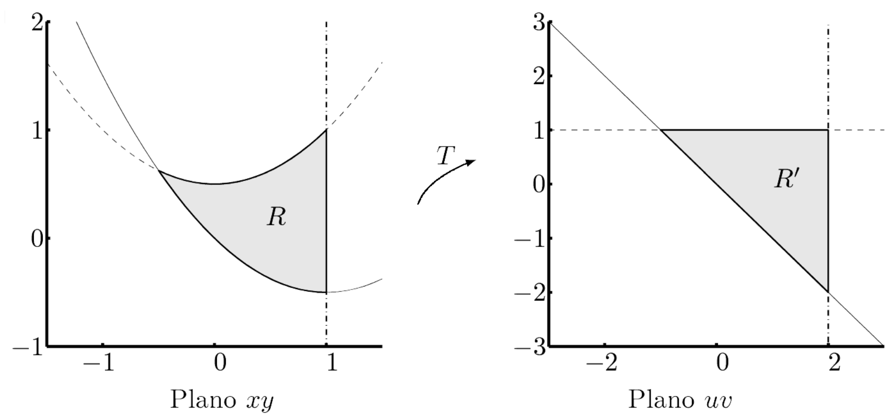


Figura 3.2 $T(x,y) = (2x, 2y - x^2)$

5. Sean las funciones: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y $\mathbf{F}(x,y,z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Determina:

   a) $\text{rot}(f\mathbf{F})$

   b) $f \text{ rot } \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$

[Primer Examen Final "B" 2005-1 Problema 3]

Solución.

a) $f\mathbf{F} = (x^3 + y^2x + z^2x, x^2y + y^3 + z^2y, x^2z + y^2z + z^3)$, y:

$$\nabla \times f\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + y^2x + z^2x & x^2y + y^3 + z^2y & x^2z + y^2z + z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (2yz - 2yz, -2xz + 2xz, 2xy - 2xy) = (0,0,0).$$

b) El rotacional del campo vectorial es:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

por lo que f rot $\mathbf{F} = \vec{0}$. Para el segundo sumando calculamos:

$$\begin{aligned} \nabla f &= (\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}, \tfrac{\partial f}{\partial z}) = (2x, 2y, 2z) \\ \nabla f \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= (2yz - 2zy, -2xz + 2zx, 2xy - 2yx) = (0,0,0) \end{aligned}$$

de modo que el resultado también es el vector cero: $(0,0,0)$.

La igualdad $\text{rot}(f\mathbf{F}) = f \text{ rot } \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$ siempre es válida, sin importar cuáles sean los campos escalar y vectorial. La manera más corta de resolver el problema es demostrar que $\text{rot}(f\mathbf{F}) = \vec{0}$ usando coordenadas esféricas y recurrir a la igualdad para decir que el inciso *b*) también es $\vec{0}$.

6. Encuentra $\nabla \times (\nabla f)$ para la función

$$f(x,y,z) = x^3y^2 + y \operatorname{sen} x + xe^{zy}$$

[Segundo Examen Parcial "B" 2002-2 Problema 5]

Solución. Si f es una función diferenciable, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Además, si f es de clase C^2 (dos veces continuamente diferenciable), tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ &= (0,0,0) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ya en ese caso las derivadas parciales mixtas son iguales. La función f del enunciado tiene todas sus derivadas de todos los órdenes continuas, de manera que se cumple $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

7. Sea la función $f(x,y,z) = -\frac{4}{x^2+y^2+z^2}$. Utiliza coordenadas esféricas para calcular ∇f en el punto $P(\sqrt{3}, -1, 2)$.

[Segundo Examen Parcial "B" 2002-2 Problema 6]

Solución. La función en coordenadas esféricas es $f(r,\theta,\phi) = -4/r$. Como no hay dependencia en θ y en ϕ, el gradiente sólo tiene el término radial:

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} = 4/r^2\hat{\mathbf{r}}$. En P, tenemos que $r^2 = 3+1+4 = 8$, y $\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{8}}(\sqrt{3}, -1, 2)$. Por lo tanto,

$$\nabla f|_P = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{2\sqrt{8}}(\sqrt{3}, -1, 2)$$

en donde la última expresión está en coordenadas cartesianas.

8. Calcula el laplaciano de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$.

[Segundo Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 4]

Solución. Es conveniente utilizar coordenadas esféricas; así, la función es $f(r, \theta, \phi) = r^3$. Como no hay dependencia en θ y en ϕ, el laplaciano sólo tiene el término radial:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(3r^4\right) = 12r.$$

Por lo tanto, $\nabla^2 f = 12r$, o $\nabla^2 f = 12\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, si se quiere en coordenadas cartesianas.

9. Determina si el campo vectorial $\mathbf{F}$ representado por

$$\mathbf{F}(r, \theta, z) = (z\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_r + (\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta)\mathbf{e}_\theta + (r\cos\theta)\mathbf{e}_z,$$

dado en coordenadas cilíndricas, es irrotacional.

[Segundo Examen Parcial "A" 2005-1 Problema 6]

Solución. Si $f(r, \theta, z) = rz\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta$, tenemos que $\mathbf{F}(r, \theta, z) = \nabla f$. Por otra parte, sabemos que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$, siempre que f sea al menos de clase C^2 (dos veces continuamente diferenciable), que es cierto en este caso. Por lo tanto, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{F}$ es irrotacional.

Otra forma de resolver el problema, es calcular directamente el rotacional:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\theta + \operatorname{sen}\theta & r(\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta) & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= (-r\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{e}_r + (\cos\theta - \cos\theta)\,r\mathbf{e}_\theta \\ &\qquad + (\cos\theta - z\operatorname{sen}\theta + z\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)\,\mathbf{e}_z = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

10. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}$ representado por $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{\rho^3}$, en donde $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ y $\rho = |\mathbf{r}|$.

   a) Determina si $\mathbf{F}$ es irrotacional.

   b) Determina si $\mathbf{F}$ es solenoidal.

[Segundo Examen Parcial "B" 2004-2 Problema 6]

Solución. En lo que sigue se utilizará $r = |\mathbf{r}|$.

a) De la fórmula para el rotacional en coordenadas esféricas,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \operatorname{sen}\theta\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r \operatorname{sen}\theta F_\phi \end{vmatrix}$$

es fácil ver que cualquier campo vectorial en la dirección radial que sólo tiene dependencia del radio, tiene rotacional $\mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{F}$ es irrotacional.

b) $\mathbf{F}$ no tiene componentes en $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$, por lo tanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right)$$

En este caso $\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}}$ donde $F_r = 1/r^2$, por lo tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0.$$

Así que $\mathbf{F}$ es solenoidal, excepto en el origen.

3.1. Problemas propuestos

1. Demuestra que la curva $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}\right)$ es plana y que se encuentra en el plano $x - 4y + 2z = -1$.

2. En la parametrización del círculo de radio 1 con centro en el origen $\mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, utiliza el cambio de parámetro $t = \tan\theta/2$ para obtener una parametrización racional del círculo. Respuesta: $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

3. Parametriza la curva de intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y el cilindro $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. (A esta curva se le conoce como curva de Viviani). Respuesta: $\mathbf{r}(t) = \left(1 + \cos t, \operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)$.

4. Demuestra que las hélices $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$ tienen curvatura y torsión constantes.

5. Demuestra que la función longitud de arco de la cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ es $s(t) = 4 - 4\cos(t/2)$.

6. Si $\mathbf{r}(s)$ es la parametrización de una curva en términos de su longitud de arco, demuestra que $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \kappa\mathbb{N}$, donde κ es la curvatura y $\mathbb{N}$ es el vector normal principal.

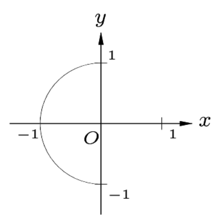
3.2. Parametrizaciones y coordenadas curvilíneas

INSTRUCCIONES. Para contestar este examen, se necesita Acrobat Reader 5 (o versiones posteriores). Antes de seleccionar las respuestas, se debe dar click en “Inicio del Examen”. Al terminar, se debe dar click en “Final del Examen”. Al dar click en el botón “Muestra”, se corrigen las respuestas del examen.

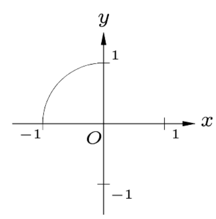
Una ✓ indica que la respuesta fue correcta; una ✗, indica una respuesta incorrecta; en este caso (o si no se respondió), la respuesta correcta se marca con ●.

Inicio del Test **Parametrizaciones y coordenadas curvilíneas**

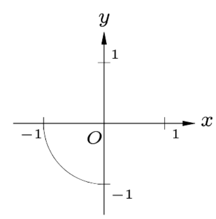
1. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a $\{(\operatorname{sen} t, \cos t) : -\pi/2 \leq t \leq 0\}$ en el plano xy?



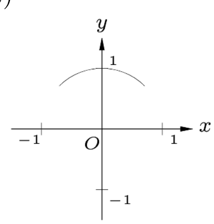
(a)



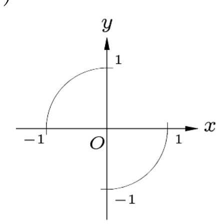
(b)



(c)



(d)



(e)

☐ (a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐ (e)

1 punto

---

2. Sea C la curva parametrizada por $\mathbf{r}(s) = \left(\frac{4}{5}s\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3\cos\frac{s}{5}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(3\operatorname{sen}\frac{s}{5}\right)\hat{\mathbf{k}}$, donde s es el parámetro longitud de arco. La torsión de C en cualquiera de sus puntos, es:

☐ 0 ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{3}{25}$ ☐ $\frac{4}{25}$

1 punto

---

3. Para $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$, el vector $d\mathbf{r}$ es

☐ $d\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ☐ $d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + d\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

☐ $d\mathbf{r} = r\,dr\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + d\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$ ☐ $d\mathbf{r} = dr\,\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$

1 punto

---

4. Sea C la curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = 2(\cos t + t \operatorname{sen} t)\hat{\mathbf{i}} + 2(\operatorname{sen} t - t\cos t)\hat{\mathbf{j}}$. La curvatura de C en el punto para el cual $t = \pi/2$, es:

☐ $\dfrac{2}{\pi}$ ☐ 2π ☐ $\dfrac{1}{\pi}$ ☐ π

1 punto

---

5. Una ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = e^{-x}\operatorname{sen} y$ en el punto donde $x = 0$ y $y = \pi/2$ es

☐ $x + y = 1$ ☐ $x + z = 1$ ☐ $x - z = 1$ ☐ $y + z = 1$ ☐ $y - z = 1$

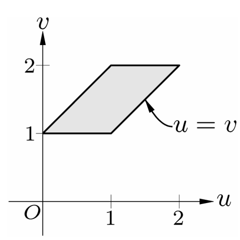
1 punto

---

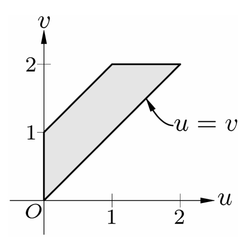
6. Considera el cambio de variables del plano xy al plano uv dado por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} u &= x^{1/3} + y \\ v &= 1 + y. \end{aligned}\right\}$$

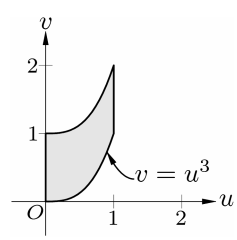
Bajo esta transformación, ¿cuál de las siguientes regiones sombreadas es la imagen de la región $\{(x, y) : 0 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le y \le 1\}$?



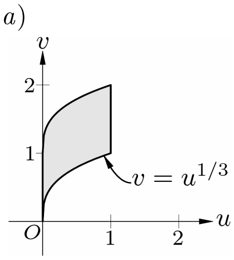
(a)



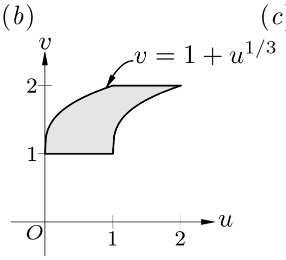
(b)



(c)



(d)



(e)

$\square$ (a) $\square$ (b) $\square$ (c) $\square$ (d) $\square$ (e)

1 punto

---

7. El cambio de variables dado por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= u\,\mathrm{sen}\,\theta + v\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

representa una rotación con un ángulo θ. ¿Cuánto vale el Jacobiano $J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right)$?

$\square$ u^2+v^2 $\square$ x^2+y^2 $\square$ 1 $\square$ θ $\square$ $\tan\theta$

1 punto

---

8. Sea T la transformación dada por $T:\begin{cases} x = u+6v \\ y = 2u-3v \end{cases}$ y sea R la región del plano XY limitada por las rectas $x=0$, $x=2$, $y=0$ y $y=2$. El área de la región R', que es la imagen de la región R bajo la transformación T, es:

$\square$ $\dfrac{1}{60}$ $\square$ $\dfrac{4}{15}$ $\square$ $\dfrac{15}{4}$ $\square$ 60

1 punto

---

9. El sistema de coordenadas curvilíneas (u,v) es tal que $\nabla u = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\nabla v = 2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$. El valor del Jacobiano $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$ es:

$\square$ -20 $\square$ $-\dfrac{1}{20}$ $\square$ $\dfrac{1}{20}$ $\square$ 20

1 punto

---

10. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)(-x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}} - z\hat{\mathbf{k}})$. La divergencia de $\mathbf{F}$ es:

$\square$ $-5\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\square$ $-5(x^2+y^2+z^2)$

$\square$ $-5(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$ $\square$ $-5(x^2+y^2+z^2)^2$

1 punto

Final del Test

Calificación:

Corrige Respuestas: Correctas

Capítulo 4

Integrales de trayectoria y de línea

1. Evalúa las siguientes integrales de trayectoria $\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y, z)\, ds$, donde

   a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\boldsymbol{\sigma} : t \to (\operatorname{sen} t, \cos t, t), t \in [0, 2\pi]$;

   b) $f(x, y, z) = \cos z$, $\boldsymbol{\sigma}$ como en *a*);

   c) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\boldsymbol{\sigma} : t \to t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}}, t \in [0, 1]$.

   Solución.

   a) Sobre la trayectoria $\boldsymbol{\sigma}$, el valor de f es $f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = \operatorname{sen} t + \cos t + t$. Además, el valor de la rapidez es $\frac{ds}{dt} = |(\cos t, -\operatorname{sen} t, 1)| = \sqrt{2}$ por lo que $ds = \sqrt{2}\, dt$. Entonces la integral que se pide es:

   $$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y, z)\, ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(\operatorname{sen} t + \cos t + t)\, dt \\ &= \sqrt{2}\left(-\cos t + \operatorname{sen} t + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi^2. \end{aligned}$$

   b) Aquí, $f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = \cos z(t) = \cos t$, y la integral es:

   $$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y, z)\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cos t\, dt = \sqrt{2} \operatorname{sen} t\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

   c) La trayectoria está sobre el plano xy, así que la componente z es cero, por lo tanto, el valor de f sobre la trayectoria es $f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = x(t) = t$. Además, el valor de la rapidez es $\frac{ds}{dt} = |(1, 2t, 0)| = \sqrt{4t^2 + 1}$ por lo que $ds = \sqrt{4t^2 + 1}\, dt$. La integral que se pide es:

   $$\int_{\boldsymbol{\sigma}} f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 t\sqrt{4t^2 + 1}\, dt = \frac{\left(4t^2 + 1\right)^{3/2}}{12}\Bigg|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}.$$

2. Calcula las coordenadas del centroide de la región sombreada que se muestra en la figura 4.1.

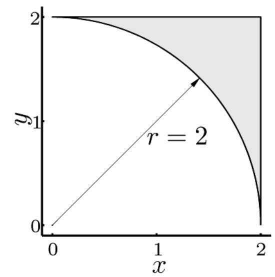


Figura 4.1 Región en el primer cuadrante

[Tercer Examen Parcial "A" 2003-2 Problema 5]

Solución. La coordenada x del centroide está dada por $\frac{\int_0^2 x\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)dx}{\int_0^2 \left(2-\sqrt{4-x^2}\right)dx}$. El denominador es el área, que es $4-\pi$, y el numerador es

$$\int_0^2 x\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)dx = \left[x^2+\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\right]_0^2 = 4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3},$$

por lo que la coordenada x del centroide es $\frac{4}{3(4-\pi)}$. Por simetría, la coordenada y vale lo mismo, así que las coordenadas del centro de gravedad son $(\frac{4}{3(4-\pi)}, \frac{4}{3(4-\pi)}) \cong (1.553, 1.553)$.

3. En la figura 4.2 se muestran cuatro campos vectoriales en el plano. Especifica en cada uno si el rotacional y la divergencia son iguales o no a cero. Justifica detalladamente tu respuesta.

Solución.

a) Consideremos la curva cerrada mostrada en la figura 4.3. El campo es paralelo a los lados verticales, y normal a los horizontales. Al calcular la integral de línea del campo sobre la curva (es decir, la circulación), sólo es necesario considerar los lados verticales. La contribución del lado derecho es mayor que la del izquierdo, así que la circulación sobre la curva *no* es cero. El rotacional del campo no es cero, porque podemos hallar curvas con circulación distinta de cero.

Notemos que $F_x = 0$ y que los vectores son constantes en la dirección en que apunta el campo, es decir, $\frac{\partial F_y}{\partial y} = 0$, así que la divergencia es cero. Otra forma de verlo es notar que en la curva ilustrada, el flujo que entra es igual al flujo que sale. Cualquier trayectoria se forma de curvas como la ilustrada, en las que el flujo total es cero. Si el flujo es cero para cualquier trayectoria, entonces la divergencia del campo es cero. La expresión analítica de este campo es $\mathbf{F}(x,y) = (0,x)$.

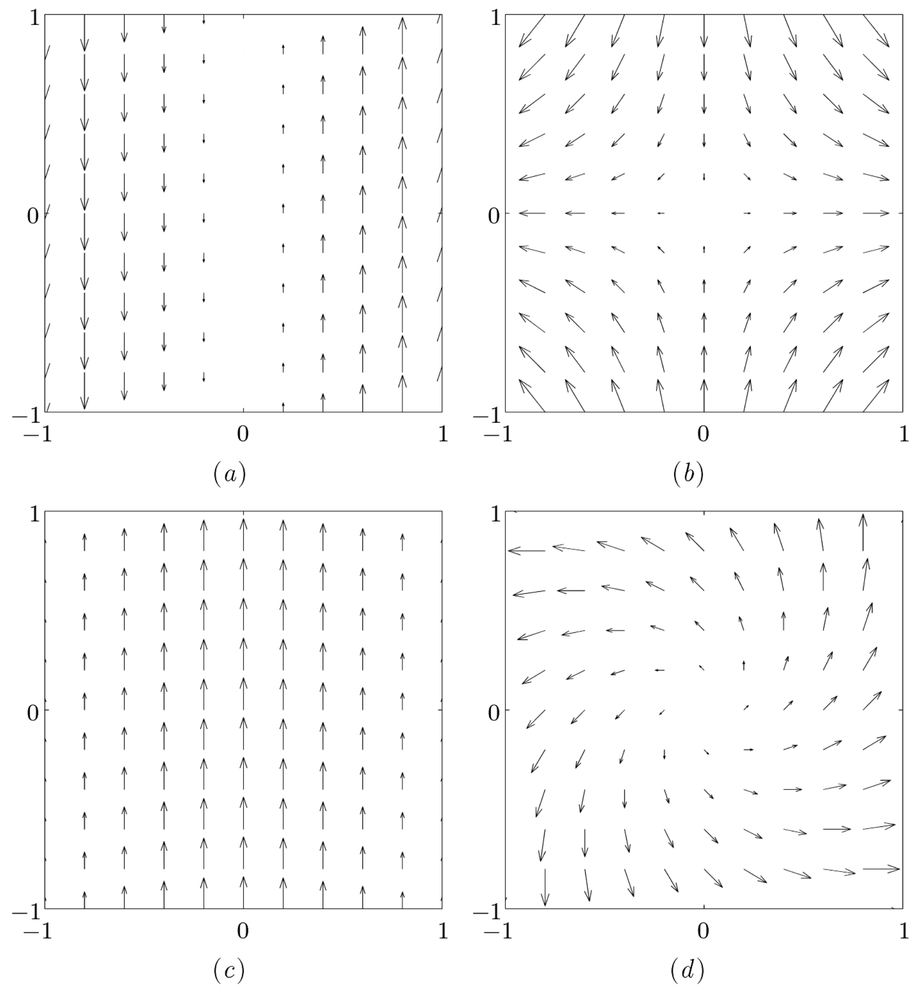


Figura 4.2 Campos en el plano

b) En la curva cerrada mostrada en la figura, el campo es paralelo a dos de las fronteras y normal a las otras dos. En la frontera más alejada del origen, el campo es más intenso que en la frontera más cercana al origen, pero la longitud de la frontera más alejada es menor, así que la circulación podría ser cero. De hecho, el rotacional de este campo es cero, y la gráfica es compatible con esto, aunque no es obvio.

El flujo sobre esta trayectoria es cero, ya que los vectores no cambian de longitud sobre las curvas que van definiendo con su dirección[1].

[1] Tal vez quede la duda de que sobre los ejes x, y, los vectores sí parecen cambiar de longitud. Sin embargo, hay que notar que una trayectoria que encierre una parte de estos ejes,

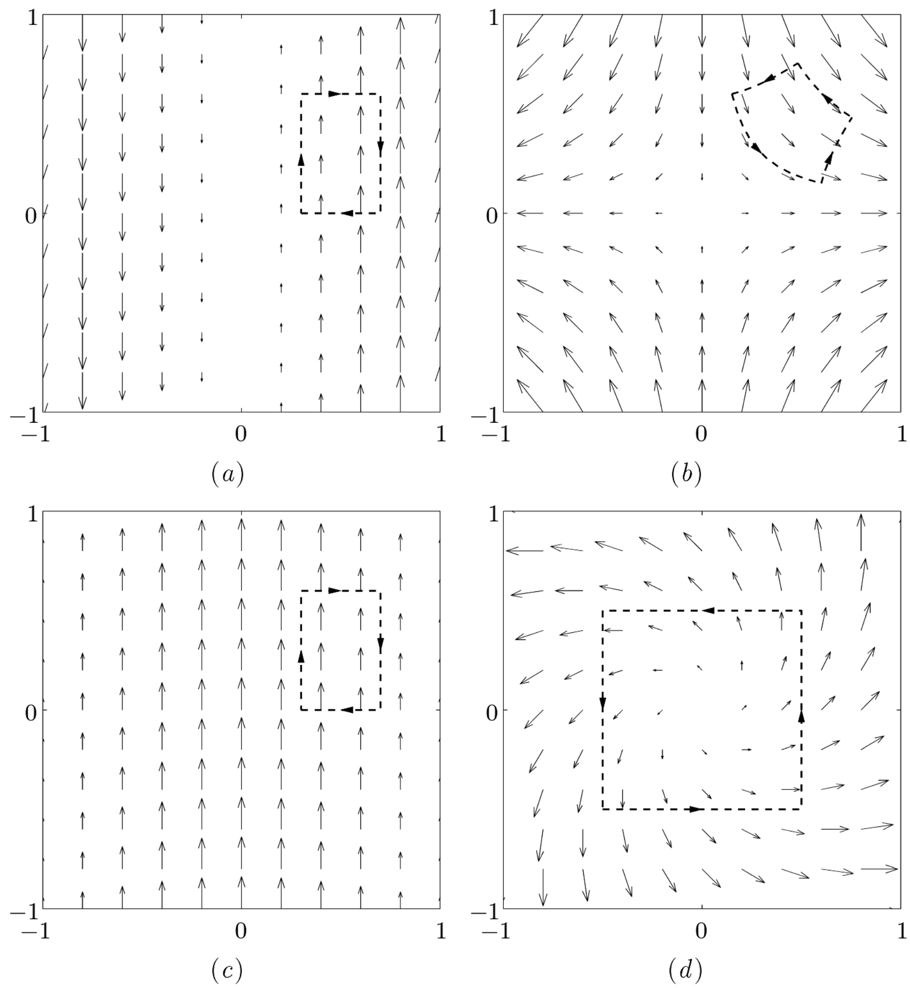


Figura 4.3 Trayectorias sobre los campos

Cualquier otra curva cerrada puede formarse con curvas de este tipo. Por tanto, la divergencia de este campo es cero. La expresión analítica de este campo es $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$.

c) De manera análoga al inciso *a*), $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, y $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. La expresión analítica de este campo es $\mathbf{F}(x, y) = (0, e^{-x^2})$.

d) La circulación sobre la trayectoria mostrada es claramente distinta de cero porque sobre cualquier frontera de la trayectoria el campo tiene componentes positivas a lo largo de dicha trayectoria. Por tanto, el

sin importar qué tan delgada sea, tiene una contribución distinta de cero a lo largo de las fronteras de dicha trayectoria.

rotacional es distinto de cero.

Por otra parte, los vectores aumentan de longitud conforme se alejan del origen. El flujo sobre una curva es mayor si está más alejada del origen, por lo que es claro que la divergencia es distinta de cero. La expresión analítica de este campo es $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, x + y)$.

4. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$. Evalúa la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de las siguientes dos trayectorias.

   a) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (t, t, t), 0 \le t \le 1$

   b) $\boldsymbol{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0), 0 \le t \le 2\pi$

   Solución.

   a) El valor de $\mathbf{F}$ sobre la trayectoria es $\mathbf{F}\left(x(t), y(t), z(t)\right) = (t, t, t)$. Además, la velocidad es $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = (1, 1, 1)$ por lo que $d\boldsymbol{\sigma} = (1, 1, 1)\, dt$. Entonces, la integral de línea que se pide es

   $$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^1 (t, t, t) \cdot (1, 1, 1)\, dt = 3 \int_0^1 t\, dt = 3\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

   b) El valor de $\mathbf{F}$ sobre la trayectoria es $\mathbf{F}\left(x(t), y(t), z(t)\right) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. Además, la velocidad es $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)$ por lo que $d\boldsymbol{\sigma} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt$. Entonces, la integral de línea que se pide es

   $$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt = 0.$$

   En general, si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es el gradiente de un campo escalar f, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva cualquiera sólo depende de los puntos inicial y final de la curva. En este problema, se puede ver que si $f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$, lo cual puede ser útil al calcular las integrales. En el inciso *a*), la integral es $f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = \frac{3}{2}$. En el inciso *b*), la integral es cero, ya que la trayectoria es cerrada, y los puntos inicial y final de la trayectoria son el mismo.

5. Calcula el trabajo efectuado al mover una partícula en el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2)\hat{\mathbf{i}} + (y - 2xz)\hat{\mathbf{j}} + (z)\hat{\mathbf{k}}$ a lo largo de la curva $\left\{ \begin{array}{c} 8z = 3x^3 \\ 4y = x^2 \end{array} \right.$ del punto $A(0, 0, 0)$ al punto $B(2, 1, 3)$.

   [Tercer Examen Parcial "B" 2004-2 Problema 1]

   Solución. La curva se puede parametrizar como $\mathbf{r}(t) = (t, t^2/4, 3t^3/8)$, donde los puntos A y B corresponden a $t = 0$ y $t = 2$, respectivamente. El trabajo es:

   $$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^2 \left(3t^2, \frac{t^2}{4} - \frac{3t^4}{4}, \frac{3t^3}{8}\right) \cdot \left(1, \frac{t}{2}, \frac{9t^2}{8}\right) dt \\ &= \int_0^2 \left(3t^2 + \frac{t^3}{8} - \frac{3t^5}{8} + \frac{27t^5}{64}\right) dt = \left[t^3 + \frac{t^4}{32} + \frac{t^6}{128}\right]_0^2 = 9. \end{aligned}$$

6. Sobre la trayectoria $\mathbf{r} = (a \operatorname{sen}\omega t, b\cos\omega t)$ con $2\pi \geq t \geq 0$ se mueve una partícula de masa m. ¿Cuál es el trabajo realizado cuando se mueve desde $(0, b)$ hasta $(a, 0)$?

   Solución. El punto inicial corresponde a $t = 0$ y el final a $t = \pi/2\omega$. El trabajo es el siguiente:▶

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C m\ddot{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r} = m\int_C \ddot{\mathbf{r}}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = m\int_C \ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}\,dt \\
&= m\int_0^{\pi/2\omega}\left(-a\omega^2\operatorname{sen}\omega t, -b\omega^2\cos\omega t\right)\cdot(a\omega\cos\omega t, -b\omega\operatorname{sen}\omega t)\,dt \\
&= m\int_0^{\pi/2\omega}\left(-a^2\omega^3\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t + b^2\omega^3\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\right)dt \\
&= \frac{m\omega^3(b^2-a^2)}{2}\int_0^{\pi/2\omega}\operatorname{sen}2\omega t\,dt = \frac{m\omega^3(b^2-a^2)}{2}\cdot\left.\frac{-\cos 2\omega t}{2\omega}\right|_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \\
&= \frac{m\omega^3(b^2-a^2)}{2}\left(\frac{1}{2\omega}+\frac{1}{2\omega}\right) = \frac{m\omega^2(b^2-a^2)}{2}.
\end{aligned}$$

Hay dos casos de interés. Cuando $a = b$, el trabajo es cero: en un movimiento circular uniforme sólo hay fuerza centrípeta, que siempre es perpendicular a la velocidad. Cuando $a \gg b$, la trayectoria se aproxima a la de un oscilador armónico.

7. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x + yz)\hat{\mathbf{i}} + (2x + y^2)\hat{\mathbf{j}} + (xz)\hat{\mathbf{k}}$, calcula $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva $C : \begin{cases} x = 2 + y \\ y = z^2 \end{cases}$ del punto $A(3, 1, 1)$ al punto $B(3, 1, -1)$.

   [Tercer Examen Parcial "A" 2002-1 Problema 1]

   Solución. De la definición de la curva, tenemos que z es la variable independiente que fija a x y a y. Una parametrización de esta curva es entonces $\mathbf{r}(t) = (2 + t^2, t^2, t)$. En esta parametrización, el punto A corresponde a $t = 1$ y el punto B a $t = -1$; la velocidad es $\mathbf{v}(t) = (2t, 2t, 1)$. La integral que se pide es, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt \\
&= \int_1^{-1}\left(3(2+t^2) + t^2\cdot t, 2(2+t^2) + t^4, (2+t^2)\cdot t\right)\cdot(2t, 2t, 1)\,dt \\
&= \int_1^{-1}\left(t^3 + 3t^2 + 6, t^4 + 2t^2 + 4, t^3 + 2t\right)\cdot(2t, 2t, 1)\,dt \\
&= \int_1^{-1}(2t^4 + 6t^3 + 12t + 2t^5 + 4t^3 + 8t + t^3 + 2t)dt \\
&= \int_1^{-1}(2t^5 + 2t^4 + 11t^3 + 14t)dt = \left.\left(\frac{2}{6}t^6 + \frac{2}{5}t^5 + \frac{11}{4}t^4 + \frac{14}{2}t^2\right)\right|_1^{-1} \\
&= -\frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

   Los términos de potencia par no contribuyen. El resultado es negativo debido al sentido de la curva C.

8. Calcula el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (4xy\cos z + 2)\,\hat{\mathbf{i}} + \left(2x^2\cos z - 6y\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(5 - 2x^2 y \operatorname{sen} z\right)\hat{\mathbf{k}}$$

al desplazar una partícula del punto $P(2,-1,1)$ al punto $Q(3,1,2)$.

Solución. No se especifica la trayectoria entre P y Q, lo que sugiere que el trabajo no depende de ella. Si es así, el trabajo tendría que ser el gradiente de alguna función escalar; es decir, $\mathbf{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Al plantear las ecuaciones y hacer las integrales,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= 4xy\cos z + 2 \Rightarrow f(x,y,z) = 2x^2 y\cos z + 2x + g_1(y,z)\\
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= 2x^2\cos z - 6y \Rightarrow f(x,y,z) = 2x^2 y\cos z - 3y^2 + g_2(x,z)\\
\tfrac{\partial f}{\partial x} &= 5 - 2x^2 y \operatorname{sen} z \Rightarrow f(x,y,z) = 2x^2 y\cos z + 5z + g_3(x,y)
\end{aligned}$$

es fácil ver que $f(x,y,z) = 2x^2 y\cos z + 2x - 3y^2 + 5z$ es una función cuyo gradiente es $\mathbf{F}$. Por lo tanto, el trabajo es:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f|_P^Q &= \left(2\cdot 3^2\cdot 1\cdot\cos 2 + 2\cdot 3 - 3\cdot 1^2 + 5\cdot 2\right)\\
&\quad - \left(2\cdot 2^2\cdot(-1)\cdot\cos 1 + 2\cdot 2 - 3\cdot(-1)^2 + 5\cdot 1\right)\\
&= (18\cos 2 + 13) - (-8\cos 1 + 6)\\
&= 18\cos 2 + 8\cos 1 + 7 \cong 3.832.
\end{aligned}$$

9. Calcula el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z\hat{\mathbf{i}} + (x+6z)\hat{\mathbf{k}}$$

para mover una partícula a lo largo de la curva $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 2\\ x^2+z^2 = y\end{cases}$ del punto $A(1,1,0)$ al punto $B(0,1,1)$.

Solución. $\mathbf{F} = \nabla(xz + 3z^2)$, y el trabajo es $0\cdot 1 + 3\cdot 1^2 - (1\cdot 0 + 3\cdot 0^2) = 3$.

También se puede hacer explícitamente. La curva es la intersección de una esfera y un paraboloide elíptico: un círculo en un plano paralelo al plano xz. El radio es $r = \sqrt{y}$, donde y está determinado por $y^2 + y = 2$, cuya única solución positiva es $y = 1$. La curva puede parametrizarse por $\mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, 1, \operatorname{sen}\theta)$. El punto A corresponde a $\theta = 0$, y el punto B, a $\theta = \pi/2$. El trabajo es entonces:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}d\theta &= \int_0^{\pi/2}(\operatorname{sen}\theta, 0, \cos\theta + 6\operatorname{sen}\theta)\cdot(-\operatorname{sen}\theta, 0, \cos\theta)d\theta\\
&= \int_0^{\pi/2}\left(-\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 6\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)d\theta = \int_0^{\pi/2}(\cos 2\theta + 3\operatorname{sen}2\theta)d\theta\\
&= \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta - \frac{3}{2}\cos 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3.
\end{aligned}$$

10. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial dado en coordenadas polares por $\mathbf{F}(\rho,\theta) = \left(-\rho^2 \operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_\rho + \left(\rho^2\cos\theta\right)\hat{e}_\theta$. Calcula $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C de ecuación $x^2+y^2-4x=0$, del punto $A(0,0)$ al punto $B(4,0)$ para $y\geq 0$.

Solución. Al convertir la ecuación de la curva a coordenadas polares, tenemos que $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$, de donde $\rho = 4\cos\theta$. El punto A corresponde a $\theta=\pi/2$, y el punto B corresponde a $\theta = 0$. El vector de posición es $\mathbf{r}=\rho\hat{\rho}$, por lo que▶

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \rho d\hat{\rho} + \hat{\rho}d\rho = \rho\hat{\theta}d\theta + \hat{\rho}d\rho \\ &= 4\cos\theta\hat{\theta}d\theta - \hat{\rho}4\operatorname{sen}\theta d\theta = 4(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)d\theta \end{aligned}$$

en donde se usó que $\rho = 4\cos\theta$ y $d\rho = -4\operatorname{sen}\theta d\theta$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= 4\left(-\rho^2\operatorname{sen}\theta, \rho^2\cos\theta\right)\cdot(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta)\,d\theta \\ &= 4\left(\rho^2\left(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)\right)d\theta = 4\rho^2 = 64\cos^2\theta d\theta. \end{aligned}$$

La integral que se pide es:▶

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 64\int_{\pi/2}^{0}\cos^2\theta d\theta = 64\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{\pi/2}^{0}\left(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\right)d\theta = -16\pi.$$

$d\hat{\rho} = \hat{\theta}d\theta$ porque una variación en ρ, no produce cambio en $\hat{\rho}$, mientras que una variación $d\theta$ cambia el vector de posición en la dirección de $\hat{\theta}$.

Por simetría, las integrales de $\cos^2\theta$ y $\operatorname{sen}^2\theta$ son iguales en el intervalo dado; al sumarlas, se halla fácilmente su valor.

11. Calcula $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ siendo $\mathbf{F}(\rho,\theta) = 6\rho\cos 2\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\rho - 6\rho\operatorname{sen}2\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta$, y C la circunferencia de ecuación $x^2+4x+y^2=0$.

[Tercer Examen Parcial "B" 2003-1 Problema 2]

Solución. Recordemos que en coordenadas polares, el gradiente de una función $f(\rho,\theta)$ es $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}$. De aquí podemos ver que este campo vectorial es conservativo, ya que $\mathbf{F}(\rho,\theta) = \nabla(3\rho^2\cos 2\theta)$. Como la trayectoria es cerrada, entonces $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

12. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}(\rho,\theta,z) = (2\rho z\cos\theta)\hat{e}_\rho - (\rho z\operatorname{sen}\theta)\hat{e}_\theta + (\rho^2\cos\theta)\hat{e}_z$, donde (ρ,θ,z) son coordenadas cilíndricas. Calcula el valor de $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(1,1,1)$, a lo largo de la curva

$$C:\begin{cases} x - z^2 = 0 \\ 3y - 4z^2 + z = 0 \end{cases}$$

[Primer Examen Final "B" 2005-1 Problema 4]

Solución. Este campo vectorial es conservativo (es decir, es el gradiente de un campo escalar). Recordemos que en coordenadas cilíndricas, el gradiente es $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial\rho}\hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z$ por lo que si ponemos $f(\rho,\theta,z) = \rho^2 z\cos\theta$ tenemos que $\mathbf{F} = \nabla f$. Por lo tanto, la integral que se pide es:

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f|_A^B = f(1,1,1) - f(0,0,0) = \sqrt{2}$$

ya que $f(0,0,0) = 0$ y $f(1,1,1) = (1^2+1^2)\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

13. El campo vectorial $\mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas está dado por $\mathbf{F}(\rho, \theta, z) = 2\rho \operatorname{sen} \theta z^3 \hat{e}_\rho + \rho \cos \theta z^3 \hat{e}_\theta + 3\rho^2 \operatorname{sen} \theta z^2 \hat{e}_z$. Calcula el trabajo que desarrolla el campo $\mathbf{F}$ al mover una partícula del punto $A(1, \pi/2, 1)$ al punto $B(2, 0, -1)$, a lo largo de la recta que los une. Los puntos están dados en coordenadas cilíndricas.

[Tercer Examen Parcial "A" 2003-2 Problema 2]

Solución. La función $f(\rho, \theta, z) = \rho^2 \operatorname{sen} \theta z^3$ es tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, de manera que el trabajo que se pide es:

$$f|_A^B = 2^2 \cdot \operatorname{sen} 0 \cdot (-1)^3 - 1^2 \cdot \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2}) \cdot 1^3 = -1.$$

Capítulo 5

Integrales Iteradas

1. Utiliza integrales dobles para calcular el área de la región del plano xy localizada en el primer cuadrante y limitada por las curvas de ecuaciones $16(x-1) = y^2$ y $8x = y^2$.

   [Tercer Examen Parcial "A" 2002-1 Problema 3]

   Solución. El área es

$$\int_0^4 \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{y^2}{16}+1} dx\, dy = \int_0^4 \left(\frac{y^2}{16} + 1 - \frac{y^2}{8} \right) dy$$

$$= \int_0^4 \left(-\frac{y^2}{16} + 1 \right) dy = \left[-\frac{y^3}{48} + y \right]_0^4 = \frac{8}{3}.$$

   Esto se puede ver como la suma de las áreas de rectángulos horizontales de base $x = \frac{y^2}{16} + 1 - \frac{y^2}{8}$ y altura dy, lo que se ilustra en la Fig. 5.1.

2. Determina el área de la superficie cuya ecuación vectorial es $\mathbf{F}(u,v) = u^2\hat{\mathbf{i}} + v^2\hat{\mathbf{j}} + (u^2+v^2)\hat{\mathbf{k}}$ para $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$

   [Tercer Examen Parcial "A" 2002-2 Problema 5]

   Solución. El elemento vectorial de área para esta superficie está determinado por

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2u & 0 & 2u \\ 0 & 2v & 2v \end{vmatrix} = (-4uv, -4uv, 4uv)$$

   por lo que $da = 4\sqrt{3}uv\, du\, dv$. El área de la superficie es:

$$\int_S da = \int_0^2 \int_0^1 4\sqrt{3}uv\, du\, dv = 4\sqrt{3} \int_0^2 v \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 dv$$

$$= 2\sqrt{3} \int_0^2 v\, dv = 2\sqrt{3} \left.\frac{v^2}{2}\right|_0^2 = 4\sqrt{3}.$$

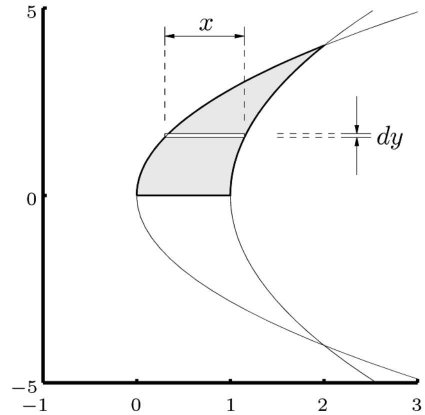


Figura 5.1 Región entre $16(x-1)=y^2$ y $8x=y^2$ en el primer cuadrante

3. Sea T un sólido cuyo volumen es igual a

$$V=\int_T dV=\int_0^2\int_0^{9-x^2}\int_0^{2-x} dz\,dy\,dx.$$

Dibuja T y completa los espacios en blanco.

a) $V=\int\limits_{\square}^{\square}\int\limits_{\square}^{\square}\int\limits_{\square}^{\square} dy\,dx\,dz.$

b) $V=\int\limits_{\square}^{\square}\int\limits_{\square}^{\square}\int\limits_{\square}^{\square} dy\,dz\,dx.$

c) $V=\int\limits_{0}^{5}\int\limits_{\square}^{\square}\int\limits_{\square}^{\square} dz\,dx\,dy+\int\limits_{5}^{9}\int\limits_{\square}^{\square}\int\limits_{\square}^{\square} dz\,dx\,dy.$

Solución. De los límites de integración, se deduce que T está limitado por el cilindro parabólico $y=9-x^2$ y el plano $z=2-x$ en el primer octante. En la Fig. 5.2 se ilustra T.

Por lo tanto las expresiones para el volumen son $V=\int\limits_0^2\int\limits_0^{2-z}\int\limits_0^{9-x^2} dy\,dx\,dz=\int\limits_0^2\int\limits_0^{2-x}\int\limits_0^{9-x^2} dy\,dz\,dx=\int\limits_0^5\int\limits_0^2\int\limits_0^{2-x} dz\,dx\,dy+\int\limits_5^9\int\limits_0^{\sqrt{9-y}}\int\limits_0^{2-x} dz\,dx\,dy$. Con cualquiera de estas integrales se obtiene $V=\frac{50}{3}$.

En los ejercicios siguientes, sea V el volumen del sólido T delimitado por el cilindro parabólico $y=4-z^2$ y el cilindro en forma de cuña $y=|x|$. Sean Ω_{xy}, Ω_{yz}, Ω_{xz}, las proyecciones de T sobre los planos xy, yz, xz respectivamente.

4. Completa los espacios en blanco.

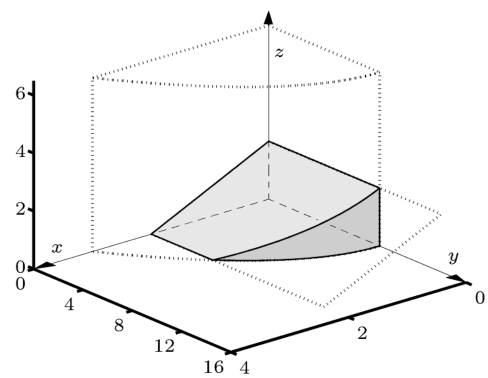


Figura 5.2 Sólido con volumen $\int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} dz\, dy\, dx$.

$$a)\ V = \iint\limits_{\Omega_{xy}} \boxed{}\; dx\, dy.$$

$$b)\ V = \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int_{\square}^{\square} dz \right) dx\, dy.$$

$$c)\ V = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} dz\, dy\, dx.$$

$$d)\ V = \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} \int_{\square}^{\square} dz\, dx\, dy.$$

Solución. Es conveniente tener una ilustración como guía. En la Fig. 5.3 se muestra T.

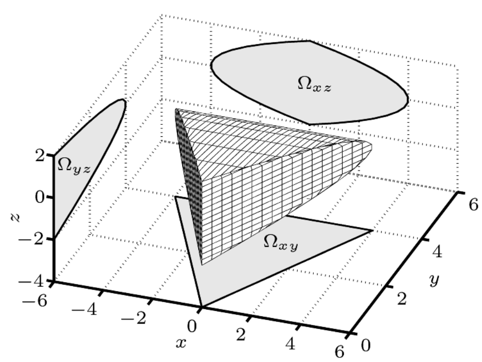


Figura 5.3 Intersección entre $y = 4 - z^2$ y $y = |x|$

Las proyecciones de T se muestran desplazadas para claridad de la figura. El volumen es $V = \iint\limits_{\Omega_{xy}} 2\sqrt{4-y}\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega_{xy}} \left(\int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dz \right) dx\,dy = \int\limits_{-4}^{4} \int\limits_{|x|}^{4} \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dz\,dy\,dx = \int\limits_{0}^{4} \int\limits_{-y}^{y} \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dz\,dx\,dy$.

5. Completa los espacios en blanco.

   a) $V = \iint\limits_{\Omega_{yz}} \boxed{}\; dy\,dz$.

   b) $V = \iint\limits_{\Omega_{yz}} \left(\int\limits_{\square}^{\square} dx \right) dy\,dz$.

   c) $V = \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} dx\,dz\,dy$.

   d) $V = \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} dx\,dy\,dz$.

   Solución. Con ayuda de la Fig. 5.3, tenemos que el volumen es $V = \iint\limits_{\Omega_{yz}} 2y\,dy\,dz = \iint\limits_{\Omega_{yz}} \left(\int\limits_{-y}^{y} dx \right) dy\,dz = \int\limits_{0}^{4} \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} \int\limits_{-y}^{y} dx\,dz\,dy = \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{0}^{4-z^2} \int\limits_{-y}^{y} dx\,dy\,dz$.

6. Completa los espacios en blanco.

   a) $V = \iint\limits_{\Omega_{xz}} \boxed{}\; dx\,dz$.

   b) $V = \iint\limits_{\Omega_{xz}} \left(\int\limits_{\square}^{\square} dy \right) dx\,dz$.

   c) $V = \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} dy\,dx\,dz$.

   d) $V = \int\limits_{-4}^{0} \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} dy\,dz\,dx + \int\limits_{0}^{4} \int\limits_{\square}^{\square} \int\limits_{\square}^{\square} dy\,dz\,dx$.

   Solución. Con ayuda de la Fig. 5.3, tenemos que el volumen es $V = \iint\limits_{\Omega_{xz}} (4 - z^2 - |x|)dx\,dz = \iint\limits_{\Omega_{xz}} \left(\int\limits_{|x|}^{4-z^2} dy \right) dx\,dz = \int\limits_{-2}^{2} \int\limits_{z^2-4}^{4-z^2} \int\limits_{|x|}^{4-z^2} dy\,dx\,dz = \int\limits_{-4}^{0} \int\limits_{-\sqrt{4+x}}^{\sqrt{4+x}} \int\limits_{-x}^{4-z^2} dy\,dz\,dx + \int\limits_{0}^{4} \int\limits_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} \int\limits_{x}^{4-z^2} dy\,dz\,dx$.

El volumen en los ejercicios 4 al 6 es $V = \frac{512}{15}$.

7. Calcula el volumen de la región D limitada por las superficies $S_1 : x^2 + z^2 - y = 3$ y $S_2 : y - 2 = 0$.

   [Primer Examen Final “B” 2005-1 Problema 5]

Solución. Para una y fija, $x^2 + z^2 = y + 3$ es un círculo (en un plano paralelo al xz) de área πr^2 y radio $\sqrt{y+3}$. Un cilindro con este círculo como base y altura dy tiene volumen $\pi(y+3)dy$. Los valores de y están entre $y = 2$ (limitado por S_2) y $y = -3$ (el mínimo permisible para que $x^2 + z^2$ sea no negativo). El volumen es, integrando:

$$\int_{-3}^{2} \pi(y+3)dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} + 3y\right]_{-3}^{2} = \frac{25}{2}\pi.$$

También se puede integrar el elemento de volumen. Aquí conviene convertir las coordenadas x, z en coordenadas polares. El radio está entre 0 y $\sqrt{2+3}$, el ángulo entre 0 y 2π, y $y = x^2 + z^2 - 3 = r^2 - 3$. El volumen es:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_{r^2-3}^{2} dy\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{5}} (5 - r^2)r\, dr\\ &= 2\pi\left[\tfrac{5r^2}{2} - \tfrac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{5}} = \tfrac{25}{2}\pi.\end{aligned}$$

8. Calcula $\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 - y^2 = 6$, $xy = 1$ y $xy = 8$.

   Sugerencia. Considera el cambio de variable $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

   [Tercer Examen Parcial "B" 2003-1 Problema 3]

   Solución. Se puede encontrar el Jacobiano de la transformación sugerida a través de

$$J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

   de donde $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1}$. por lo que la integral $\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy$ se convierte en

$$\iint_{R'} \left(x^2 + y^2\right) J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^8\int_3^6 du\, dv = \frac{21}{2}.$$

9. Calcula el volumen del sólido limitado por las superficies de ecuaciones $y^2 + z^2 = 9$, $x + z = 4$, y $y - 2x - 3z = 12$.

   [Tercer Examen Parcial "B" 2002-1 Problema 4]

   Solución. El sólido es un cilindro cortado por dos planos, y su proyección sobre el plano yz es el círculo de radio 3 centrado en el origen. Para cada punto del círculo, la altura x varía entre $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z - 6$ y $x = 4 - z$. Conviene que las coordenadas del círculo sean polares; el volumen es:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_{\frac{1}{2}r\operatorname{sen}\theta - \frac{3}{2}r\cos\theta - 6}^{4 - r\cos\theta} dx\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \left(-\tfrac{1}{2}r\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}r\cos\theta + 10\right) r\, dr\, d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{r^3}{6}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + 5r^2\right]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\tfrac{9}{2}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + 45\right) d\theta = 90\pi.\end{aligned}$$

10. Utiliza integración triple para resolver el siguiente problema. En una esfera de 5 cm de radio y 2 kg de peso se hace una perforación cilíndrica y simétrica con una broca de 6 cm de diámetro. ¿Cuál es el peso de la pieza después de la perforación?

[Tercer Examen Parcial "A" 2003-2 Problema 6]

Solución. Consideremos un sistema de coordenadas con origen en el centro de la esfera. Al realizar la perforación, la parte que queda tiene un volumen de $\int_R \int_{-z}^{z} dz\, da$, en donde R es un sector circular de radio interno 3 y radio externo 5, con centro en el origen (en el plano xy, digamos). Si utilizamos coordenadas polares para R, tenemos que el elemento de área es $da = r\, dr\, d\theta$, mientras que la altura sobre cada elemento de área es $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, por lo que el volumen de la pieza perforada es:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_3^5 \sqrt{25 - r^2}\, r\, dr\, d\theta = 4\pi\left[-\frac{1}{3}\left(25 - r^2\right)^{3/2}\right]_3^5 = \frac{256\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3.$$

La densidad del material es $\rho = \frac{2}{\left(\frac{4}{3}\pi 5^3\right)} = \frac{3}{250\pi}$ kg cm^{-3}, así que el peso de la pieza perforada es $\rho V = \frac{128}{125} = 1.024$ kg.

11. Calcula el área de una hoja de la rosa de 4 pétalos que tiene por ecuación polar $\rho = 3\cos 2\theta$.

[Tercer Examen Parcial "B" 2004-2 Problema 4]

Solución. Es muy útil ver cómo se recorre la curva, para poner los límites correctos en las integrales. Podemos por ejemplo, tabular puntos variando el ángulo a intervalos de 45°. El orden en que se recorre la curva cuando θ va de 0 a 2π, es $AODOCOBOA$, donde los puntos están marcados en la Fig. 5.4. Para el pétalo determinado por OAO, θ varía entre $-45°$ y $45°$. El elemento diferencial de área en coordenadas polares es $da = \rho\, d\rho\, d\theta$, por lo que el área es:

$$\int_S da = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{3\cos 2\theta} \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2\Big|_0^{3\cos 2\theta} d\theta = \frac{9}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\cos 4\theta + 1}{2}\right) d\theta = \frac{9}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} + \theta\right)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{9}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{8}.$$

12. Calcula el área de la porción de superficie de ecuación $2(8 - z) = x^2 + y^2$ localizada por arriba del plano xy.

[Tercer Examen Parcial "B" 2002-1 Problema 5]

Solución. La proyección de la superficie sobre xy, es el círculo de radio 4 con centro en $(0, 0)$. En cada punto del círculo, la altura z se obtiene de la ecuación de la superficie, que entonces se parametriza como $\mathbf{r}(u, v) =$

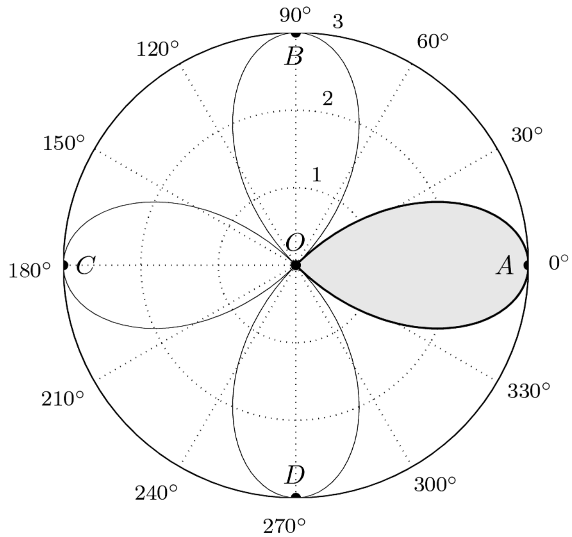


Figura 5.4 Gráfica de $\rho = 3\cos 2\theta$. Se calcula el área del pétalo sombreado.

$\left(u\cos v, u \operatorname{sen} v, 8 - \frac{u^2}{2}\right)$, con $4 \geq u \geq 0$ y $2\pi \geq v \geq 0$, por lo que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & -u \\ -u \operatorname{sen} v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(u^2\cos v, u^2 \operatorname{sen} v, u\right),$$

y $da = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\, dv = u\sqrt{u^2+1}\, du\, dv$. El área de la superficie es:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 u\sqrt{u^2+1}\, du\, dv = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(u^2+1\right)^{3/2}\Big|_0^4 dv = 2\pi\frac{17^{3/2}-1}{3}.$$

Capítulo 6

Teoremas Integrales

1. En cada uno de los siguientes incisos, transforma la integral de superficie $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$ en una integral de línea usando el teorema de Stokes, y evalúa la integral.

   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\hat{\mathbf{i}} + xy\hat{\mathbf{j}} + xz\hat{\mathbf{k}}$, donde S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria con un componente z no negativo.

   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\hat{\mathbf{i}} + z\hat{\mathbf{j}} + x\hat{\mathbf{k}}$, donde S es la porción del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$, y $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal unitaria con un componente z no negativo.

   c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - z)\hat{\mathbf{i}} + yz\hat{\mathbf{j}} - xz\hat{\mathbf{k}}$, donde S consiste en las cinco caras del cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$, que no están en el plano xy. La normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal que apunta hacia afuera.

   d) $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}} + x^2y\hat{\mathbf{k}}$, donde S consiste en las tres caras que no están en el plano xz del tetraedro limitado por los tres planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$. La normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal que apunta hacia afuera del tetraedro.

   Solución.

   a) S está limitada por C: la circunferencia unitaria en xy centrada en $(0, 0)$, que podemos parametrizar como $\mathbf{r}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, ya que C debe recorrerse en el sentido antihorario debido al sentido de la normal de S. Sobre C, $\mathbf{F} = (\operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}\theta\cos\theta, 0)$, y $d\mathbf{r} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)d\theta$, así que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta)d\theta = 0$.

   b) Con C igual al inciso anterior, y $\mathbf{F} = (\operatorname{sen}\theta, 0, \cos\theta)$ sobre C, la integral de línea es: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = -\pi$.

   c) S está limitada por la cara que está sobre el plano xy (tomada en el sentido antihorario) en donde $\mathbf{F} = (y, 0, 0)$. Sólo contribuye la arista que tiene $y = 2$. Entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_2^0 (2, 0, 0) \cdot (dt, 0, 0) = -4$.

d) S está limitada por la cara que está sobre el plano xz, donde $\mathbf{F} = (xz, 0, 0)$. Las dos aristas con $x = 0$ o $z = 0$, no contribuyen, y la otra arista es $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 2-t)$ (debido al sentido que debe tener la curva para la normal a la superficie) con $0 \geq t \geq 2$. Entonces $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (2t - t^2, 0, 0) \cdot (dt, 0, -dt) = \frac{4}{3}$.

2. Dado el campo de velocidades $\mathbf{F}(x, y, z) = (3z)\hat{\mathbf{i}} - (xz)\hat{\mathbf{j}} + (xz^2)\hat{\mathbf{k}}$, calcula la circulación total alrededor de la curva

$$C : \begin{cases} 3z = x^2 + y^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

[Primer Examen Final "B" 2005-1 Problema 6]

Solución. Por el teorema de Stokes, hay que calcular $\int_S \nabla \times \mathbf{F}$, en donde S es el círculo $x^2 + y^2 = 3$ a una altura de $z = 1$. El rotacional es:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & -xz & xz^2 \end{vmatrix} = (x, 3 - z^2, -z).$$

Si escogemos la normal al círculo apuntando en la dirección positiva del eje z, el elemento de área es $d\mathbf{a} = (0, 0, 1)da$. La integral es entonces:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S (x, 3 - 1, -1) \cdot (0, 0, 1)da = \int_S -da = -A_S = -3\pi$$

ya que $z = 1$ sobre S, y el área de S es $\pi(\sqrt{3})^2$. La circulación (al recorrer C en sentido antihorario, por la orientación que escogimos para S) es -3π.

3. Utiliza el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $\mathbf{F} = x^3\hat{\mathbf{i}} + y^3\hat{\mathbf{j}} + z^3\hat{\mathbf{k}}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución. La divergencia del campo es $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2$, así que por el teorema de Gauss, el flujo es igual a

$$3\int_B r^2 dV = 3\int_0^{4\pi}\int_0^3 r^2 \cdot r^2 dr\, d\Omega = 3 \cdot 4\pi \cdot \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^3 = \frac{2916}{5}\pi,$$

en donde $d\Omega$ es el elemento diferencial de ángulo sólido, y B es la bola centrada en el origen, con radio $R = 3$.

4. Encuentra el valor de $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ calculada a lo largo de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy^2}{\sqrt{1 - x^4y^4}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{2x^2y}{\sqrt{1 - x^4y^4}}\hat{\mathbf{j}}.$$

[Tercer Examen Parcial "A" 2002-2 Problema 1]

Solución. Por el teorema de Stokes, $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}$, en donde S es el círculo de radio 1 con centro en el origen. El rotacional de $\mathbf{F}$ es

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

ya que ni F_x ni F_y dependen de z. Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{\sqrt{1-x^4y^4}\,4xy - \left(2x^2y\right)\frac{-4x^3y^4}{2\sqrt{1-x^4y^4}}}{1-x^4y^4} = \frac{\left(1-x^4y^4\right)4xy + 4x^5y^5}{\left(1-x^4y^4\right)^{3/2}} \\ &= \frac{4xy}{\left(1-x^4y^4\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

El valor de $\frac{\partial F_x}{\partial y}$ es el mismo, por lo que $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0} \Rightarrow \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

5. Utiliza el teorema de Gauss para calcular el valor de la integral $\iint\limits_{\gamma} \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS$ donde $\mathbf{F} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ y γ es la superficie de ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{j}} + \cos\phi\hat{\mathbf{k}}$$

con $0\le\theta\le 2\pi$ y $0\le\phi\le\pi$.

[Tercer Examen Parcial "A" 2002-2 Problema 6]

Solución. La divergencia de $\mathbf{F}$ es $\nabla\cdot\mathbf{F} = 2$. La superficie descrita es la esfera de radio 1 con centro en el origen. Por el teorema de Gauss, la integral que se pide es:

$$\iint\limits_{\gamma} \mathbf{F}\cdot\hat{n}\,dS = \int_B \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \int_B 2\,dV = 2\int_B dV = 2\frac{4}{3}\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

en donde B es la bola de radio 1 con centro en el origen.

6. Calcula el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = (x^3+2y)\hat{\mathbf{i}} + (y^2+4x)\hat{\mathbf{j}}$ al mover una partícula a lo largo de la trayectoria cerrada mostrada en la Fig. 6.1.

[Tercer Examen Parcial "A" 2002-1 Problema 2]

Solución. El rotacional de $\mathbf{F}$ es $\nabla\times\mathbf{F} = (0,0,2)$, y por el teorema de Stokes, la integral que se pide es $\int_S (0,0,2)\cdot(0,0,-1)\,da = -2\int_S da = -2A$ ▶ . El área del triángulo es $A = 3\text{u}^2$, por lo que el trabajo es -6.

La orientación de la curva indica que el vector de área de la superficie apunta en el sentido negativo del eje z.

También se puede calcular directamente la integral de línea, lo que se simplifica si encontramos la parte de $\mathbf{F}$ que es un campo conservativo, ya que $\oint_C \mathbf{F} = 0$, para cualquier curva cerrada C. Al integrar con respecto a x la coordenada x de $\mathbf{F}$ y con respecto a y su coordenada y, encontramos que $\phi = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4xy$ es tal que $\mathbf{F}(x,y) = \nabla\phi + (-2y,0)$. Por tanto, basta con encontrar $\oint_C(-2y,0)$. Otra simplificación es que el segmento horizontal no contribuye (porque $y=0$). Este cálculo también da -6.

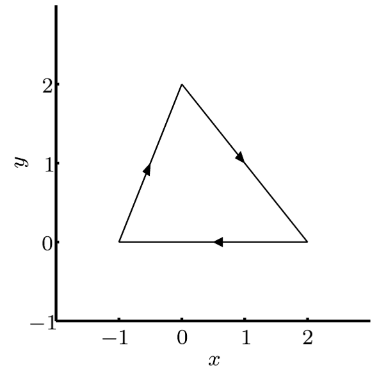


Figura 6.1 Los vértices del triángulo están en $(-1, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 0)$.

7. Por medio del teorema de Green, calcula el área de la región R del plano xy limitada por las gráficas de $y = 3 \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen} x$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

[Tercer Examen Parcial "B" 2004-2 Problema 3]

Solución. Por el teorema de Green, el área es $A = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx$. La curva puede ser parametrizada en tres trozos:

$$\begin{aligned}
C_1 &: \mathbf{r}_1(t) = \left(\tfrac{\pi}{2}, t\right) \text{ con } t \in [1, 3] \\
C_2 &: \mathbf{r}_2(t) = (t, 3 \operatorname{sen} t) \text{ con } t \in [\tfrac{\pi}{2}, 0] \\
C_3 &: \mathbf{r}_3(t) = (t, \operatorname{sen} t) \text{ con } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]
\end{aligned}$$

por lo que el área es la suma de tres integrales de línea:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot (dx, dy) = \tfrac{1}{2} \Big[\textstyle\int_1^3 \left(-t, \frac{\pi}{2}\right) \cdot (0, dt) + \\
&+ \textstyle\int_{\pi/2}^0 (-3 \operatorname{sen} t, t) \cdot (dt, 3 \cos t dt) + \int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t, t) \cdot (dt, \cos t dt) \Big] \\
&= \tfrac{1}{2} \Big[\pi + \textstyle\int_{\pi/2}^0 (-3 \operatorname{sen} t + 3t \cos t)\, dt + \int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t + t \cos t)\, dt \Big] \\
&= \tfrac{1}{2} \Big[\pi + \textstyle\int_0^{\pi/2} (2 \operatorname{sen} t - 2t \cos t)\, dt \Big] \\
&= \tfrac{1}{2} \Big[\pi + 2 \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} - 2 \textstyle\int_0^{\pi/2} t \cos t dt \Big] \\
&= \tfrac{1}{2} \left[\pi + 2 - 2 \left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right) \right] = 2.
\end{aligned}$$

En el último renglón se utilizó la siguiente integración por partes:

$$\int_0^{\pi/2} t \cos t\, dt = t \operatorname{sen} t\big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = \frac{\pi}{2} + \cos t\big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

8. Utiliza el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo

$$\mathbf{F} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})$$

que atraviesa la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

[Tercer Examen Parcial "B" 2003-1 Problema 6]

Solución. El campo tiene una expresión más sencilla en coordenadas esféricas: $\mathbf{F} = 2r\mathbf{r} = 2r^2\hat{\mathbf{r}}$, lo que facilita el cálculo de su divergencia al no tener componentes en θ y ϕ: $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(2r^4\right) = 8r$. Al aplicar el teorema de Gauss, tenemos que el flujo del campo es:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_0^{4\pi}\int_0^1 (8r)r^2 dr\, d\Omega = 8\int_0^{4\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\Omega = 2\int_0^{4\pi} d\Omega = 8\pi.$$

9. Mediante el teorema de Green, calcula el valor de

$$\oint_C \left(-3x^3\right) dx + \left(6xy + y^3\right) dy$$

según la trayectoria que lleva de $P_0(0,0)$ a $P_1(2,1)$, de $P_1(2,1)$ a $P_2(2,4)$, y de $P_2(2,4)$ a $P_0(0,0)$.

[Segundo Examen Parcial "B" 2000-3 Problema 5]

Solución. El teorema de Green establece la identidad $\iint_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dx\, dy = \oint_C P\, dx + Q\, dy$; en este caso, vemos de la Fig. 6.2 que conviene integrar en el orden $dy\, dx$. La integral de línea se convierte en

$$\int_0^2 \int_{x/2}^{2x} 6y\, dy\, dx = \int_0^2 3y^2\Big|_{x/2}^{2x} dx = \int_0^2 \frac{45}{4}x^2\, dx = \frac{15}{4}x^3\Big|_0^2 = 30.$$

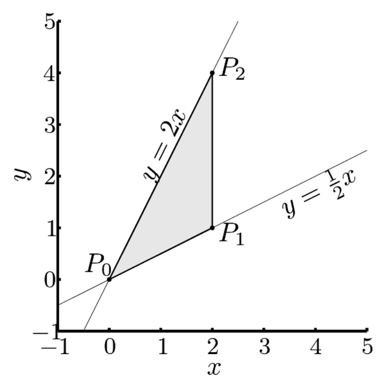


Figura 6.2 Región definida por P_0, P_1 y P_2

6.1. Problemas propuestos

1. Cambia el orden de integración de la integral $\int_0^2 \int_0^{x^2} dy\, dx$. Respuesta: $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 dx\, dy$.

2. Expresa el área de la región limitada por las curvas $x = y^2$, $x + 1 = 2y^2$ como una integral doble. Respuesta: $\int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2y^2-1} dx\, dy$.

6.2. Integrales y Teoremas Integrales

INSTRUCCIONES. Para contestar este examen, se necesita Acrobat Reader 5 (o versiones posteriores). Antes de seleccionar las respuestas, se debe dar click en "Inicio del Examen". Al terminar, se debe dar click en "Final del Examen". Al dar click en el botón "Muestra", se corrigen las respuestas del examen.

Una ✓ indica que la respuesta fue correcta; una ✗, indica una respuesta incorrecta; en este caso (o si no se respondió), la respuesta correcta se marca con ●.

Inicio del Test **Integrales y Teorema Integrales**

1. De los siguientes campos vectoriales, selecciona el que es conservativo

- ☐ $\bar{F}(x,y) = (e^y)\hat{\imath} + (xe^y)\hat{\jmath}$
- ☐ $\bar{F}(x,y) = (-e^y)\hat{\imath} + (xe^y)\hat{\jmath}$
- ☐ $\bar{F}(x,y) = (e^{-y})\hat{\imath} + (xe^{-y})\hat{\jmath}$
- ☐ $\bar{F}(x,y) = (-e^{-y})\hat{\imath} + (xe^y)\hat{\jmath}$

1 punto

---

2. $\bar{F}(x,y) = \left(2xy^2\right)\hat{\imath} + \left(2x^2y\right)\hat{\jmath}$ es un campo conservativo. El valor de $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r}$ a lo largo de la circunferencia de radio 2 con centro en el origen es

- ☐ 0
- ☐ 2π
- ☐ -2π
- ☐ 4π

1 punto

---

3. El campo conservativo $\bar{F}$ que se obtiene a partir de la función potencial

$$f(r,\theta,z) = r^2 \operatorname{sen}\theta + rz^3\cos\theta$$

dada en coordenadas cilíndricas circulares, es

- ☐ $\bar{F}(r,\theta,z) = \left(2r\operatorname{sen}\theta + z^3\cos\theta\right)\hat{e}_r + \left(r\cos\theta - rz^3\operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_\theta + \left(3rz^2\right)\hat{e}_z$
- ☐ $\bar{F}(r,\theta,z) = \left(\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta + \frac{r^2z^3}{2}\cos\theta\right)\hat{e}_r + \left(-r^2\cos\theta + rz^3\operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_\theta + \left(\frac{rz^4}{4}\cos\theta\right)\hat{e}_z$
- ☐ $\bar{F}(r,\theta,z) = \left(2r\operatorname{sen}\theta + z^3\cos\theta\right)\hat{e}_r + \left(r\cos\theta - z^3\operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_\theta + \left(3rz^2\cos\theta\right)\hat{e}_z$
- ☐ $\bar{F}(r,\theta,z) = \left(2r\operatorname{sen}\theta + z^3\cos\theta\right)\hat{e}_r + \left(r^2\cos\theta - rz^3\operatorname{sen}\theta\right)\hat{e}_\theta + \left(3rz^2\cos\theta\right)\hat{e}_z$

1 punto

---

4. Una función potencial del campo conservativo

$$\bar{F}(x,y,z) = \left(2xy + 2z^3 - yz\right)\hat{\imath} + \left(x^2 - xz\right)\hat{\jmath} + \left(6xz^2 - xy\right)\hat{k},$$

es

- ☐ $\phi(x,y,z) = x^2y + 2xz^3 + xyz + C$
- ☐ $\phi(x,y,z) = x^2y + 2xz^3 - xyz - 3$
- ☐ $\phi(x,y,z) = x^2y - 2xz^3 - xyz + 3$
- ☐ $\phi(x,y,z) = x^2y - 2xz^3 + xyz + C$

1 punto

---

5. El trabajo que efectúa el campo $\bar{F}(x,y,z) = (xy)\hat{\imath} + (yz)\hat{\jmath} + (xz)\hat{k}$ durante el desplazamiento de una partícula a lo largo de la curva $C : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,\mathrm{sen}\, t \\ z = 1 \end{cases}$

desde el punto $A(0,3,1)$ hasta el punto $B(2,0,1)$, por la trayectoria más corta, se calcula mediante la expresión $W =$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (9\,\mathrm{sen}\, t\cos t - 12\,\mathrm{sen}^2 t\cos t)\, dt$ ☐ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{0} (9\,\mathrm{sen}\, t\cos t - 12\,\mathrm{sen}^2 t\cos t)\, dt$

☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} (9\,\mathrm{sen}\, t\cos t + 12\,\mathrm{sen}^2 t\cos t)\, dt$ ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} (9\,\mathrm{sen}\, t\cos t + 12\,\mathrm{sen}^2 t\cos t)\, dt$

1 punto

---

6. El área de la región R del plano xy limitada por las gráficas de $x = 4 - y^2$ y $x = y^2 - 4$ se calcula mediante la expresión

☐ $\displaystyle A = \int_{-2}^{2}\int_{4-y^2}^{y^2-4} dx\, dy$ ☐ $\displaystyle A = 4\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-y^2} dx\, dy$

☐ $\displaystyle A = \int_{-2}^{2}\int_{y^2-4}^{4-y^2} dy\, dx$ ☐ $\displaystyle A = 2\int_{0}^{2}\int_{y^2-4}^{4-y^2} dy\, dx$

1 punto

---

7. El área de la parte del cilindro representado por $\bar{r}(u,v) = (3\cos u, 3\,\mathrm{sen}\, u, v)$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = y + 6$ se calcula mediante la expresión

☐ $\displaystyle S = 3\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{6+3\,\mathrm{sen}\, u} dv\, du$ ☐ $\displaystyle S = 3\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3\,\mathrm{sen}\, u+6} du\, dv$

☐ $\displaystyle S = 9\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{6+3\,\mathrm{sen}\, u} dv\, du$ ☐ $\displaystyle S = 9\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{6+3\,\mathrm{sen}\, u} du\, dv$

1 punto

---

8. El volumen de la región D limitada por las superficies $z = 9 + x^2 + y^2$ y $z = 13$ se calcula mediante la expresión

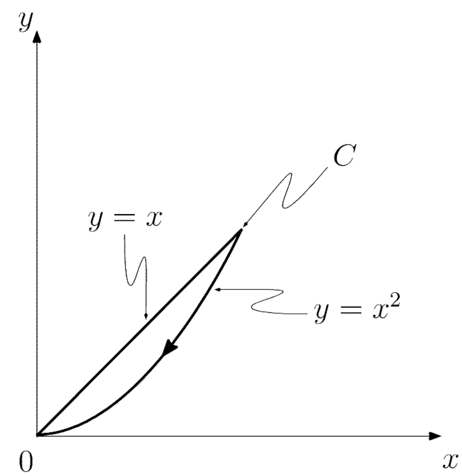
☐ $\displaystyle V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{9+r^2}^{13} r\, dz\, dr\, d\theta$ ☐ $\displaystyle V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{4}\int_{9+r^2}^{13} r\, dz\, dr\, d\theta$

☐ $\displaystyle V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{13}^{9+r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$ ☐ $\displaystyle V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{4}\int_{13}^{9+r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$

1 punto

---

9. El trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\bar{F}(x,y) = (3y)\hat{\imath} + (4x)\hat{\jmath}$ durante el movimiento de una partícula a lo largo de la curva C que se muestra en la figura, se calcula utilizando el teorema de Green, mediante la expresión



☐ $W = \int_0^1 \int_x^{x^2} dx\, dy$ ☐ $W = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx$

☐ $W = -\int_0^1 \int_x^{x^2} dx\, dy$ ☐ $W = -\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx$

1 punto

---

10. El área de la región R, interior a la curva $C_1 : r = 2\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $C_2 : r = 1$, dadas en coordenadas polares, se calcula mediante la expresión

☐ $A = 2\int_0^{\pi/6} \int_1^{2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$ ☐ $A = 2\int_0^{\pi/3} \int_1^{2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

☐ $A = 2\int_0^{\pi/6} \int_1^{2\cos\theta} dr\, d\theta$ ☐ $A = 2\int_0^{\pi/3} \int_1^{2\cos\theta} dr\, d\theta$

1 punto

Final del Test

Calificación:

Corrige Respuestas: Correctas