



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial



Segundo Examen Extraordinario
Sinodales: ING.PATIÑO RAMÍREZ JESÚS ANTONIO
FÍS. RAMÍREZ MANNY PEDRO

Semestre: 2017-2

Duración máxima: 2 horas

Nombre: _____ No. de cuenta: _____

1. Determinar las dimensiones del cono circular de mayor volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio 5m.

15 PUNTOS

2. Sea la curva C representada por: $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}e^t \cos t\right)\hat{i} - \left(\frac{1}{2}e^t \sin t\right)\hat{j} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^t\right)\hat{k}$

a) Encuentre la longitud de arco de la curva desde el punto $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

hasta el punto $B(\cos(\ln 2), -\sin(\ln 2), \sqrt{2})$

b) Determinar el vector tangente unitario a la curva C en el punto $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

20 PUNTOS

3. Utilice coordenadas curvilíneas para calcular el área de la región limitada por la elipse de ecuación $(x+3y+4)^2 + (4x+3y-2)^2 = 64$.

15 PUNTOS

4. Calcular el trabajo de la fuerza $\overline{F} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ cuando su punto de aplicación se desplaza de la posición P(a,0) a la posición Q(0,b).

15 PUNTOS

5. Determinar el área de la banda delimitada por las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \phi = \frac{\pi}{3}, \quad \phi = \frac{\pi}{6}$$

15 PUNTOS

6. Hallar el flujo a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donde

$$\overline{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

20 PUNTOS



Semestre: 2017-2

1.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$(h-5)^2 + r^2 = 25$$

$$\ell(r, h, \lambda) = \frac{1}{3} \pi r^2 h + \lambda [(h-5)^2 + r^2 - 25]$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial r} = \frac{2}{3} \pi r h + 2\lambda r = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{\pi h}{3} \quad \dots\dots\dots 1$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial h} = \frac{1}{3} \pi r^2 + 2\lambda(h-5) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\frac{\pi r^2}{6(h-5)} \quad \dots\dots\dots 2$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = (h-5)^2 + r^2 - 25 = 0$$

$$1 = 2$$

$$-\frac{\pi h}{3} = -\frac{\pi r^2}{6(h-5)} \quad \rightarrow \quad r^2 = 2h(h-5)$$

$$(h-5)^2 + 2h(h-5) = 25$$

$$h^2 - 10h + 25 + 2h^2 - 10h = 25$$

$$3h^2 - 20h = 0$$

$$h(3h - 20) = 0$$

$$h = 0 \quad , \quad h = \frac{20}{3}$$

Entonces

$$r^2 = 2h(h-5)$$

$$r^2 = 2\left(\frac{20}{3}\right)\left(\frac{20}{3} - 5\right)$$

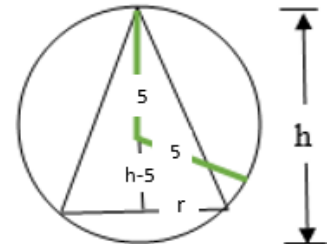
$$r^2 = \left(\frac{40}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{200}{9} \quad \rightarrow \quad r^2 = \frac{200}{9}$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{200}{9}} = \pm \frac{10}{2} \sqrt{2}$$

Dimensiones

$$h = \frac{20}{3} \text{ m}$$

$$r = \frac{10}{2} \sqrt{2} \text{ m}$$



2.

a)

Punto A

$$x = \frac{1}{2} e^t \cos t = \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2} e^t \sin t = 0$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^t = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow t = 0$$

Punto B

$$x = \frac{1}{2} e^t \cos t = \cos(\ln 2)$$

$$y = -\frac{1}{2} e^t \sin t = -\sin(\ln 2)$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} e^t = \sqrt{2} \rightarrow e^t = 2 \rightarrow t = \ln 2$$

$$s = \int_0^{\ln 2} \|\vec{r}'(t)\| dt$$

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{2} [-e^t \sin t + e^t \cos t] \hat{i} - \frac{1}{2} [e^t \cos t + e^t \sin t] \hat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^t \hat{k}$$

$$\vec{r}'(t) = \frac{1}{2} e^t [\cos t - \sin t] \hat{i} - \frac{1}{2} e^t [\cos t + \sin t] \hat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^t \hat{k}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4} e^{2t} [\cos t - \sin t]^2 + \frac{1}{4} e^{2t} [\cos t + \sin t]^2 + \frac{2}{4} e^{2t}}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t} + \frac{2}{4} e^{2t}} = \sqrt{e^{2t}} = e^t$$

$$s = \int_0^{\ln 2} e^t dt = e^t \Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1 \text{ unidad de long}$$

$$b) \quad \vec{r}'(0) = \frac{1}{2} \hat{i} - \frac{1}{2} \hat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{k} \quad \|\vec{r}'(0)\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \hat{i} - \frac{1}{2} \hat{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{k}$$

3.

$$T : \begin{cases} u = x + 3y + 4 \\ v = 4x + 3y - 2 \end{cases}$$

$$A_R = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| A_R'$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{9}$$

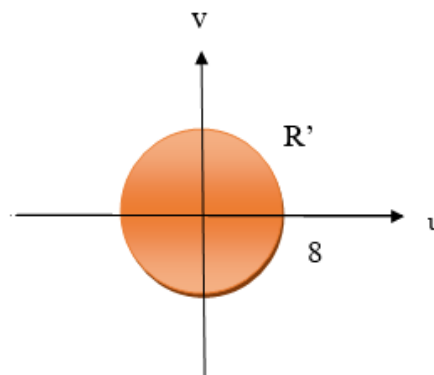
$$u^2 + v^2 = 64$$

$$A_R' = \pi(8)^2 = 64\pi$$

$$A_R' = 64\pi \text{ unidades de área}$$

$$A_R = \left| -\frac{1}{9} \right| (64\pi)$$

$$A_R = \frac{64\pi}{9} \text{ unidades de área}$$



15 PUNTOS

4.

$$\overline{\nabla} x \overline{F} = \left[\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] k = \overline{0}$$

\overline{F} es campo conservativo excepto en (0,0)

$$\phi = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + c$$

$$\phi(P) = \frac{1}{2} \ln(a^2) + c \quad ; \quad \phi(Q) = \frac{1}{2} \ln(b^2) + c$$

$$W = \phi(Q) - \phi(P) = \frac{1}{2} [\ln(b^2) - \ln(a^2)] = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$W = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ u.t.}$$

15 PUNTOS

5.

$$A = \iint_{\sigma} |\overline{r}_u \times \overline{r}_v| \, dudv$$

usando coordenadas esféricas

$$A = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\theta d\phi \quad ; \quad \rho^2 = r^2$$

$$A = 2\pi r^2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = 2\pi r^2 (-\cos \phi) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$A = -2\pi r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi r^2 (\sqrt{3} - 1) \text{ u.a.}$$

15 PUNTOS

6.

$$\text{Flujo} = \iiint_v \operatorname{div} \overline{F} \, dv$$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{F} = \overline{\nabla} \cdot (xi + yj + zk) = 3$$

$$\text{Flujo} = \iiint_v 3 \, dv = 3 \iiint_v dv \quad ; \quad r = a$$

$$= 3 \left[\frac{4}{3} \pi a^3 \right]$$

$$\text{Flujo} = 4\pi a^3 \text{ u.f.}$$

20 PUNTOS