Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL

Universidad Nacional Autónoma de México

SEGUNDO EXAMEN FINAL

Semestre: 2017-1 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________ No. de cuenta: ____________________

1. Empleando multiplicadores de Lagrange determinar los puntos sobre la superficie

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{64}=1$$

cuya distancia a su centro sea mínima y máxima.

15 PUNTOS

2. Determinar la curvatura en $z = 1$ para la curva de intersección de los cilindros.

$$x=\sqrt{z}\ , \qquad y=2\sqrt{z}$$

15 PUNTOS

3. Calcular el valor de $\oint_C \overline{F}\bullet\overline{dr}$ a lo largo de una vuelta a la circunferencia de ecuaciones $x^2+y^2+z^2=16\ ,\quad 2x-y+z=0\ ,$
donde el campo vectorial $\overline{F}$ está dado por

$$\overline{F}=(8xy-18x^2z+1)\hat{i}+(4x^2-6yz+1)\,j+(1-6x^3-3y^2)k$$

15 PUNTOS

4. Sea el sistema de referencia definido por las ecuaciones de transformación

$$T:\begin{cases} x = x \\ y = r\cos\theta \\ z = r\,sen\,\theta \end{cases}$$

a) Determinar si el sistema $(x,\ r,\ \theta)$ es ortogonal

b) Obtener $\{h_x\,, h_r\,, h_\theta\}$

c) Determinar los vectores $\hat{i},\ j,\ k$ en términos de $e_x\,,\ e_r\,,\ e_\theta$

d) Obtener los jacobianos $J\left(\dfrac{x,\ y,\ z}{x,\ r,\ \theta}\right)$ y $J\left(\dfrac{x,\ r,\ \theta}{x,\ y,\ z}\right)$

e) Para el cilindro

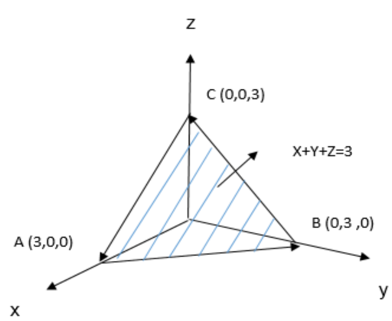
$$\text{S}:\begin{cases} x = x \\ y = 3\cos\theta \\ z = 3\,sen\,\theta \end{cases}$$

Determinar el vector de posición de todo punto de S en el sistema de referencia propuesto.

20 PUNTOS

---

5. Por medio del Teorema de Stokes, calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y,z)=(5x-3y,\ x,\ \text{z}^3)$ en el desplazamiento de una partícula a lo largo de la curva C que se muestra en la figura



15 PUNTOS

---

6. Calcular el flujo del campo $\overline{F}(\text{x},\text{y},\text{z})=(5x+y,\ x-\text{y}^2,\ 2yz-2z)$ a través de la superficie cerrada que envuelve al sólido limitado por las superficies de ecuaciones: $x=0$, $y=0$, $x+y+z=4$ y $x+y-z=4$

20 PUNTOS

-Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Cálculo Vectorial
Solución Segundo Examen Final
TIPO A y B

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Semestre: 2017-1

1.

Función objetivo $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

Función de restricción $G(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{64}-1=0$

$\overline{\nabla}F=\lambda\overline{\nabla}y$ $\quad 2x=\frac{\lambda 2x}{25} \quad ; \quad x=0$

$$2y=\frac{\lambda 2y}{36} \quad ; \quad y=0$$

$$2z=\frac{\lambda 2z}{64} \quad ; \quad z=0$$

bajo la restricción

$si\ \ x=0\ ;\ \ y=0\ ;\ \ z=\pm 8\ ,\ \ d=8$ distancia máxima

$x=0\ ;\ \ z=0\ ;\ \ y=\pm 6\ ,\ \ d=6$

$y=0\ ;\ \ z=0\ ;\ \ x=\pm 5\ ,\ \ d=5$ distancia mínima

puntos donde la distancia es mínima (d=5)

$\mathrm{P}_1(-5,0,0)$, $\mathrm{P}_2(5,0,0)$

puntos donde la distancia es máxima (d=8)

$\mathrm{P}_1(0,0,-8)$, $\mathrm{P}_2(0,0,8)$

15 PUNTOS

2.

$Parametrizando \quad t=\sqrt{z}$

$\overline{r}=ti+2tj+t^2k \qquad en\ \ z=1 \Rightarrow t=1$

$\overline{r}'=i+2j+2tk$

$\overline{r}''=2k$

$\overline{r}'x\overline{r}''=(i+2j+2k)x(2k)$

$=-2j+4i$

$\left|\overline{r}'x\overline{r}''\right|=\sqrt{20}$

$\left|\overline{r}'\right|=3$

$k=\frac{\sqrt{20}}{27}=\frac{2}{27}\sqrt{5}$

15 PUNTOS

3.

$\overline{F}$ está definido en una región simplemente conexa

$$\nabla x\overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 8xy - 18x^2 z + 1 & 4x^2 - 6yz + 1 & 1 - 6x^3 - 3y^2 \end{vmatrix}$$

$$\nabla x\overline{F} = \hat{i}(-6y + 6y) - j(-18x^2 + 18x^2) + k(8x - 8x) = \overline{0}$$

$\overline{F}$ – irrotacional $\quad \therefore \overline{F}$ es conservativo $\quad \oint_c \overline{F} \bullet d\overline{r} = 0$

15 PUNTOS

---

4. $a)\ \overline{r}_x = i$

$\overline{r}_r = \cos\theta\ j + sen\,\theta k$

$\overline{r}_\theta = -r\,sen\,\theta\ j + r\cos\theta k \qquad \overline{r_x} \bullet \overline{r_r} = 0$

$\overline{r_x} \bullet \overline{r_\theta} = 0$

$\overline{r_r} \bullet \overline{r_\theta} = 0$

El sistema (x, r, θ) es ortogonal

$b)\quad h_x = 1 \qquad h_r = 1 \qquad h_\theta = r$

$$c)\ \begin{bmatrix} e_x \\ e_r \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & sen\theta \\ 0 & -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -sen\theta \\ 0 & sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_r \\ e_\theta \end{bmatrix}$$

$$d)\ J\left(\frac{x,\ y,\ z}{x,\ r,\ \theta}\right) = \frac{1}{r} \qquad J\left(\frac{x,\ r,\ \theta}{x,\ y,\ z}\right) = r$$

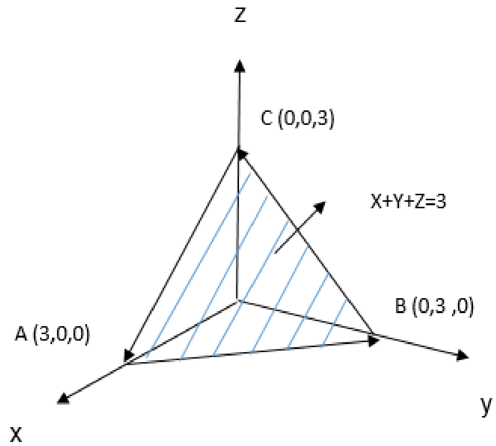
$$e)\ \overline{r} = \left[x,\ 3\cos\theta,\ 3sen\,\theta\right] \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \rightarrow \overline{r} = \left[x,\ 3,\ 0\right] \begin{bmatrix} e_x \\ e_r \\ e_\theta \end{bmatrix} = xe_x + 3e_r$$

20 PUNTOS

5.

$$W = \oint_c \overline{F} \bullet d\overline{r} = \iint_s \nabla x \overline{F} \bullet \overline{n}\, ds$$

$$\nabla x \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 5x-3y & x & z^3 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - j(0) + k(1+3) = 4k$$



$$\overline{n} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$S: \quad z = 3 - x - y$$

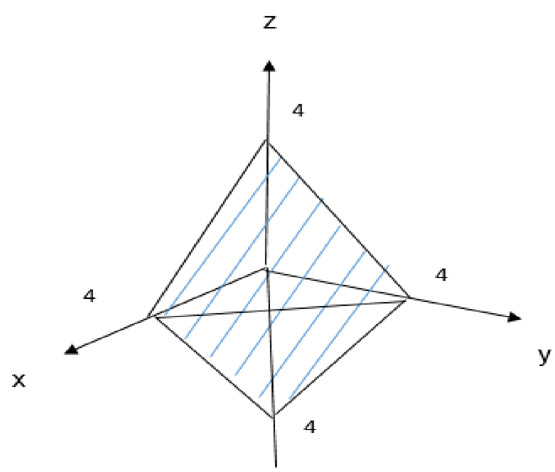
$$ds = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}\; dxdy = \sqrt{3}\; dxdy$$

$$w = \iint_s (0,0,4) \bullet \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \sqrt{3}\, dxdy = 4 \iint_{S_{xy}} dxdy = 4(\frac{3 \bullet 3}{2}) = 18$$

$$\text{w} = 18 \;\; \text{unidades de trabajo}$$

15 PUNTOS

6.



$$Flujo = \oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n}\, ds = \iiint div\, \overline{F} dv = \iiint (5 - 2y + 2y - 2)\, \text{dxdydz}$$

$$Flujo = 3 \iiint dx\, dy\, dz = 3(\frac{64}{3}) = 64 \; unidades \;\; de \;\; flujo$$

$$tetraedro:$$

$$V = \frac{(A_{base})h}{3} = \frac{(\frac{4 \bullet 4}{2})4}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\iiint dx\, dy\, dz = 2\; (\frac{32}{3}) = \frac{64}{3}$$

20 PUNTOS