Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL
SEGUNDO EXAMEN FINAL COLEGIADO

Semestre: 2017-2 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ____ No. de cuenta: ____________

1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función definida por

$$f(x,y)=x^2-xy+y^2+4x+7y$$

15 PUNTOS

2. Sea el sistema de coordenadas curvilíneas definido por las ecuaciones

$$x=\sqrt{u+v}$$
$$y=\sqrt{u-v}$$

a) Determinar si el sistema es ortogonal.

b) Calcular los factores de escala h_u y h_v

c) Obtener los vectores unitarios $\vec{e}_u$ y $\vec{e}_v$

d) Calcular el jacobiano $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ **de la transformación.**

20 PUNTOS

3. Sea la función escalar armónica $\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{a}(\mathrm{x}^2-y^2)+\mathrm{b}\,xy$ **, donde a y b son constantes.**

a) Verificar que $\phi(\mathrm{x},\mathrm{y})$ **es una función armónica.**

b) Comprobar que el campo vectorial dado por $\vec{F}=\nabla\phi$ **es un campo solenoidal e irrotacional.**

15 PUNTOS

4. Calcular $\displaystyle\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ **en donde**

$$\overline{F}(\mathrm{r},\theta,z) = (z^2 sen\,\theta)\,\overline{e}_r + (z^2\cos\theta)\,\overline{e}_\theta + (2\,\mathrm{r}\,\mathrm{z}\,sen\,\theta)\,\overline{e}_z$$

y $C:\begin{cases} r = 1+\cos\theta \\ z = 2 \end{cases}$ $\quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ **Tanto el campo vectorial** $\overline{F}$

como la curva C **están definidos en coordenadas cilíndricas circulares.**

15 PUNTOS

---

5. Calcular la circulación del campo vectorial

$$\overline{F}(x,y,z) = (z-\mathrm{y})\hat{i} + (x-z)\,j + (\mathrm{y}-x)k$$

a lo largo de la curva $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 25 \\ z = 4 \end{cases}$

20 PUNTOS

---

6. Calcular el flujo neto del campo

$$\overline{F}(x,y,z) = (x^2 - y\,z)\hat{i} + (z^2 - 2x\,y)\,j + (z^2 - x\,y)k$$

a través de la superficie cerrada limitada por el semicono

$S:\quad x^2+y^2-z^2 = 0 \quad si \quad z \ge 0$ **y el plano** $\pi: \quad z = 3$

15 PUNTOS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Cálculo Vectorial
Solución Segundo Examen Final
Semestre: 2017-2

1.

$f_x(x,y)=2x-y+4=0$ entonces $y=2x+4$

$f_y(x,y)=2y-x+7=0$

Por lo que $2(2x+4)-x+7=0 \rightarrow 3x+15=0$

$4x+8-x+7=0$

de donde $x=-5$ y $y=-6$

El punto crítico de f es $P(-5,-6)$

$f_{xx}(x,y)=2,\quad f_{yy}(x,y)=2,\quad f_{xy}(x,y)=-1$

$$H=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$h(x,y)=4-1=3>0$ y como $f_{xx}(x,y)>0 \rightarrow$ $en\ P(-5,-6)$

$\boxed{\text{La función tiene un mínimo relativo}}$

15 PUNTOS

2.

$Sea \quad \vec{r}(u, v) = \sqrt{u+v}\ i + \sqrt{u-v}\ j$

$a)\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u+v}} i + \frac{1}{2\sqrt{u-v}}\ j$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{u+v}} i - \frac{1}{2\sqrt{u-v}}\ j$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \bullet \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{1}{4(u+v)} - \frac{1}{4(u-v)} \neq 0$

$\boxed{\text{Por lo tanto el sistema no es ortogonal}}$

$b)\ h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4(u+v)} + \frac{1}{4(u-v)}} = \sqrt{\frac{u}{2(u+v)(u-v)}}$

$h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4(u+v)} + \frac{1}{4(u-v)}} = \sqrt{\frac{u}{2(u+v)(u-v)}} = \boxed{\sqrt{\frac{u}{2(u^2 - v^2)}}}$

$c)\ \overrightarrow{e_u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2u}}(\sqrt{u-v}\ i + \sqrt{u+v}\ \ j)}$

$\overrightarrow{e_v} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2u}}(\sqrt{u-v}\ i - \sqrt{u+v}\ \ j)}$

d) $J(\frac{x,y}{u,v}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+v}} & \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{2\sqrt{u-v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}} - \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}} = \boxed{-\frac{1}{2\sqrt{u^2 - v^2}}}$

20 PUNTOS

3.

$$a)\quad \nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}(2ax+by)+\frac{\partial}{\partial y}(-2ay+bx)=2a-2a=0$$

$$b)\quad \vec{F}=\nabla\phi=(2ax+by)i+(-2ay+bx)\,j$$

Resulta que:

$$\nabla\bullet\vec{F}=2a-2a=0 \qquad \boxed{\vec{F}\ \text{ es solenoidal}}$$

$$\nabla\,\mathrm{x}\,\vec{F}=0\,i+0\,j+\left(b-b\right)k=\vec{0} \qquad \boxed{\vec{F}\ \text{ es irrotacional}}$$

15 PUNTOS

4.

$$\nabla \mathrm{x}\overline{F}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & re_\theta & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 sen\theta & r\,z^2\cos\theta & 2\,r\,z\,sen\theta \end{vmatrix}=\overline{0}, \quad \rightarrow \quad \overline{F}=\nabla\phi\,, \quad \text{entonces:}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=z^2 sen\theta \qquad \phi(r,\theta,z)=r\,z^2 sen\theta+c_1(\theta,z)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=z^2\cos\theta \quad\rightarrow\quad \phi(r,\theta,z)=r\,z^2 sen\theta+c_2(\mathrm{r},z) \quad\rightarrow\quad \phi(r,\theta,z)=r\,z^2 sen\theta+k$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=2rzsen\theta \qquad \phi(r,\theta,z)=r\,z^2 sen\theta+c_3(\theta,z)$$

Los puntos inicial y final de la trayectoria C son A(2,0,2) y B $(1,\frac{\pi}{2},2)$, respectivamen∮ te

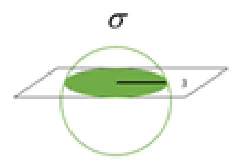
$$\boxed{\int_C \overline{F}\bullet d\overline{r}=\phi(1,\frac{\pi}{2},2)-\phi(2,0,2)=4}$$

15 PUNTOS

5.

$$\nabla \mathrm{x} \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & y-x \end{vmatrix} = 2\hat{i} + 2j + 2k$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 4 \end{cases}$$



Empleando el Teorema de Stokes

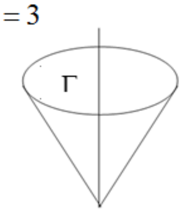
$$\oint_C \overline{F} \bullet d\overline{r} = \iint_\sigma (\nabla \mathrm{x} \overline{F}) \,\mathrm{x}\, k \; dS = \iint_\sigma (2,2,2) \bullet (0,0,1) \; dS = 2 \iint_\sigma dS = 2\,A(\sigma) = 2\pi(3)^2 = \boxed{18\pi}$$

20 PUNTOS

6.

$$\phi = \oiint_S \overline{F} \bullet n \; dS = \iiint_\Gamma \nabla \bullet \overline{F} \; dV$$

$$\phi = \iiint_\Gamma 2\,z \; dV$$



Empleando coordenadas cilíndricas $\quad S: \; r = z \quad y \quad \Gamma: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 3 \\ r \le z \le 3 \end{cases}$

$$\phi = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^3 z\, r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)\, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right)_0^3$$

$$\phi = \theta_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 \right)\Big|_0^3 \quad = 2\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right)$$

$\boxed{\phi = \dfrac{81}{2}\pi}$ unidades de flujo

15 PUNTOS