Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial
Primer Examen Extraordinario
Fís. Arzamendi Pérez Sergio Roberto
Dr. Silva González Francisco Leonel

Semestre: 2017-1 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ____________________________________ No. de cuenta: ______________________

1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - y^2 - z^2 - xy - 2z.$$

18 PUNTOS

2. Obtener una ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie

$$S: \quad \overline{R}(u,v) = (u+v)\,\mathrm{i} + (u^2 - v^2)\,\mathrm{j} + (u-v)\,\mathrm{k} \;\text{ en el punto } A(3,3,1)$$

16 PUNTOS

3. Sea el campo vectorial $\overline{E}(r,\theta,z) = r e_r + \theta e_\theta + z e_z$ expresado en coordenadas cilíndricas circulares. Obtener el rotacional y la divergencia de E.

16 PUNTOS

4. Calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas

$\vec{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = -yi + xj + zk$, sobre una partícula que se desplaza del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(1,1,1)$ sobre la curva $\vec{r}(\mathrm{t}) = ti + tj + t^2k$.

16 PUNTOS

5. Calcular el volumen del sólido que queda debajo de la superficie de ecuación $z = 3x^2 + 3y^2$ y sobre la región $R = \{(x, y) / 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$

16 PUNTOS

6. Mediante el teorema de Stokes calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (y-1)\,\boldsymbol{i} + (\mathrm{z}^2)\,\boldsymbol{j} + (\mathrm{y})\,\boldsymbol{k}$ a través de la curva cerrada de ecuación

$$C = \begin{cases} z - y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

18 PUNTOS

1. Se obtienen los puntos críticos de f

$$\begin{cases} f_x(x,\ y) = x^2 - y = 0 \\ f_y(x,\ y) = -2y - x \\ f_z(x,\ y) = -2z - 2 \end{cases} \quad \rightarrow P_1(0,0,-1)\ \ y\ \ P_2(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-1)\ \ son\ los\ puntos\ criticos\ de\ f$$

$$La\ matriz\ de\ Hess\ es\ H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\ por\ lo\ que\ en\ el\ punto\ P_1$$

$$H(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow p(\lambda) = (-2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 1)\ \ que\ es\ un\ polinomio\ con\ dos\ raices$$

negativas y una positiva, por lo que en P_1 *la función* f *no tiene valor extremo pero su grafica tiene un punto silla. Por otro lado, para el punto* P_2

$$H(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow p(\lambda) = (-2-\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 2)\ \ que\ es\ un\ polinomio\ con\ tres\ raices$$

negativas, por lo que en P_2 *la función* f *tiene un valor máximo relativo.*

18 PUNTOS

2. *Aprovechando que* $S: y = xz$ *se construye la función* $F(x,y,z) = xz - y = 0.$

Un vector perpendicular a S es $\nabla F(x,y,z) = (z)\,\mathrm{i} - \mathrm{j} + (x)\,\mathrm{k}$. En el punto A, $\nabla F(3,3,1) = 3\mathrm{i} - \mathrm{j} + 3\mathrm{k}$

Una ecuación del plano solicitado es entonces

$$\pi: 3(x-3) - (y-3) + 3(z-1) = 0$$
$$\pi: 3x - y + 3z - 9 = 0$$

16 PUNTOS

3.

$$\nabla x\overline{E}(\mathrm{r},\theta,\mathrm{z}) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ r & r\theta & z \end{vmatrix} = \frac{\theta}{r}\ \hat{e}_z$$

$$\nabla\cdot\overline{E}(\mathrm{r},\theta,z) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta)\,\frac{\partial}{\partial z}(rz)\right) = 3 + \frac{1}{r}$$

16 PUNTOS

---

4. El trabajo esta dado por:

$$W = \int_0^1 (-ti + tj + t^2k)\cdot(i + j + 2tk)dt = \int_0^1 2t^3dt = \left.\frac{t^4}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}u.t.$$

16 PUNTOS

---

5. El volumen (V) del sólido está dado por:

$$V = \int_0^2\int_0^2 3x^2 + 3y^2 dxdy = \int_0^2 x^3 + 3xy^2\Big|_0^2 dy = \int_0^2 8 + 6y^2 dy = 8y + 2y^3\Big|_0^2 = 32$$

16 PUNTOS

---

6. Usando teorema de Stokes, la circulación queda dada por:

$$circ = \oint_c \vec{F}\cdot\vec{dr} = \iint_S rot(\vec{F})\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$Se\ observa\ que\ S: F(\mathrm{y.z}) = \mathrm{z} - \mathrm{y} - 1 = 0$ y $\mathrm{R} = \left\{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

$$Entonces, \vec{n} = \frac{0i - j + k}{\sqrt{2}}\ y\ d\sigma = \frac{\sqrt{2}}{1}dxdy$$

$Además: rot(\vec{F}) = (1 - 2z)i + 0j - k.\ Por\ lo$ tanto:

$$circ = \oint_R ((1-2z)i + 0j - k)\cdot\frac{0i - j + k}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{1}dxdy = -\iint_R dxdy = -\pi$$

18 PUNTOS