Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial
Solución Primer Examen Final Tipo A

Semestre: 2018-2

1. Se desea construir una caja prismática de base rectangular sin tapa cuyo volumen sea de $4\,dm^3$. Calcular las dimensionas de la caja de tal modo que el material empleado para construirla sea el menor posible

Solución

Función objetivo (área de la caja): $f(x,y,z)=xy+2xz+2yz$

Función restricción (volumen de la caja): $g(x,y,z)=xyz=4$

Calcular los vectores gradientes:

$$\nabla f=(y+2z)\mathrm{i}+(\mathrm{x}+2\mathrm{z})\,\mathrm{j}+2(x+y)k$$

$$\nabla g=yz\,\mathrm{i}+xz\,\mathrm{j}+xy\,k$$

Teorema de Lagrange: $\nabla f=\lambda\nabla g$

Aplicándolo se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$(y+2z)=\lambda(\mathrm{y\,z}) \ldots\ldots(1)$$

$$(\mathrm{x}+2\mathrm{z})=\lambda(xz) \ldots\ldots.(2)$$

$$2(x+y)=\lambda(xy) \ldots..(3)$$

Agregando la función restricción:

$$\mathrm{x\,y\,z}=4 \ldots\ldots(4)$$

Despejando λ de la ecuación 1, 2, 3 e igualando:

$$\frac{y+2z}{yz}=\frac{x+2z}{xz}=\frac{2(x+y)}{xy}$$

De $\dfrac{y+2z}{yz}=\dfrac{x+2z}{xz}$ se tiene que:

$$xz\,(y+2z)=yz(x+2z)$$
$$xy+2xz=xy+2yz$$
$$2xz=2yz$$
$$x=y$$

De $\dfrac{x+2z}{xz}=\dfrac{2(x+y)}{xy}$ se tiene que:

$$xy(x+2z)=2xz(x+y)$$
$$xy+2yz=2xz+2yz$$
$$xy=2xz$$
$$y=2z$$

De $\dfrac{y+2z}{yz}=\dfrac{2(x+y)}{xy}$ se tiene que:

$$x=2z$$

Sustituyendo $x=y$ y $z=\dfrac{x}{2}$ en (4)

$$xyz=x(x)\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x^3}{2}=4$$

Entonces: $x=\sqrt[3]{8}=2$

Por lo tanto: $y=2$ y $z=1$

Evaluando en la función objetivo:

$$f(2,2,1)=(2)(2)+2(2)(1)+2(2)(1)=12$$

2. Un avión describe una trayectoria de ecuación vectorial $\overline{r}(t)=t^2 i+2tj+4k$. Obtener la posición del avión, su velocidad, su aceleración y las componentes vectoriales de la aceleración $\overline{a}_T$ y $\overline{a}_N$, en el instante $t=1$.

$$\overline{r}(t)=t^2 i+2tj+4k; \qquad \overline{r}(1)=(1,2,4)$$

$$\overline{v}=\overline{r}\,'(t)=2\,\mathrm{t}\,i+2j+0k; \qquad \overline{r}\,'(1)=(2,2,0)$$

$$\overline{a}=\overline{r}\,''(t)=2i+0j+0k\;; \qquad \overline{r}\,''(1)=(2,0,0)$$

Rapidez:

$$\left|\overline{v}\right|=\left|\overline{r}\,'(\mathrm{t})\right|=\sqrt{4t^2+4}=2\sqrt{t^2+1}\;; \qquad \left|\overline{r}\,'(\mathrm{t})\right|=2\sqrt{2}$$

Vector tangente unitario

$$\overline{T_u}=\frac{\overline{r}\,'(t)}{\left|\overline{r}\,'(\mathrm{t})\right|}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}i+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}j+0k\;; \qquad \overline{T_u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

Componentes escalares de aceleración:

$$a_T=\overline{a}\cdot\overline{T_u}=(2,0,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\sqrt{2}$$

$$a_N=\sqrt{\left|\overline{a}\right|^2-a_T{}^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$$

Componentes vectoriales de aceleración

$$\overline{a}_T = a_T \cdot \overline{T}_u = (1,1,0)$$
$$\overline{a}_N = \overline{a} - \overline{a}_T = (2,0,0) - (1,1,0) = (1,-1,0)$$

3. Sea la curva

$$C: \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} + 1 \\ x = z \end{cases}$$

Obtener en el punto $P(0,1,0)$

a) radio de curvatura

b) vector unitario normal principal

c) la ecuación de la circunferencia de curvatura en el punto P

Solución:

De las ecuaciones cartesianas de la curva se identifica

$x = z$

Es la Ec. Cartesiana del plano osculador y la curva es plana.

El centro de la circunferencia tangente a la curva tiene el vector de posición:

$$\overline{C} = \overline{r}(t) + \rho \overline{N}_u$$

$\overline{r}(t) \leftarrow$ Es la posición en $t_p = P(0,1,0); \quad t_0 = 0$

$\rho \leftarrow$ Es el radio de curvatura $\left(\rho = \dfrac{1}{k} \right)$ Es recíproco de K (Curvatura)

$\overline{N}_u \leftarrow$ Es el vector normal unitario principal

Parametrizando: $x = t$ en $t = 0$

$\bar{r}(t) = ti + \left(\frac{t^2}{4} + 1\right) j + tk\,;$ $\bar{r}(0) = (0,1,0)$

$\bar{r}\,'(t) = i + \left(\frac{t}{2} + 1\right) j + k$ $\bar{r}\,'(0) = (1,0,1)$

$\bar{r}\,''(t) = \frac{1}{2}\, j$ $\bar{r}\,''(0) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

$$\bar{r}\,'(0) \times \bar{r}\,''(0) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{r}\,'(0) \times \bar{r}\,''(0) \times \bar{r}\,'(0) = (0,1,0)$$

Curvatura

$$k = \frac{\left|\bar{r}\,'(0) \times \bar{r}\,''(0)\right|}{\left|\bar{r}\,'(0)\right|^3} = \frac{1}{4}$$

$\rho = \frac{1}{k}$ Radio de curvatura

Vector normal unitario

$$\overline{N}_u = \frac{\bar{r}\,'(0) \times \bar{r}\,''(0) \times \bar{r}\,'(0)}{\left|\bar{r}\,'(0) \times \bar{r}\,''(0) \times \bar{r}\,'(0)\right|} = (0,1,0)$$

$$\overline{C} = \bar{r}(t) + \rho \overline{N}_u = (0,1,0) + 4(0,1,0) = (0,1,0)$$

Circunferencia tangente a la curva en $t = 0$ o $P(0,1,0)$, tiene las ecuaciones cartesianas

$$C : \begin{cases} x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 16 & \leftarrow Ec.\, de\, una\, esfera\, de\, radio = \rho\; y\, centro\; c(0,5,0) \\ x = z & \leftarrow Ec.\, cartesiana\, del\; plano\, osculador \end{cases}$$

4. El campo vectorial $\overline{F}$ en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\overline{F}(\rho,\theta,z)=\left(2\rho\theta z^3\right)\overline{e}_\rho+\left(\rho z^3\right)\overline{e}_\theta+\left(3\rho^2\theta z^2\right)\overline{e}_z$$

Calcular el trabajo que desarrolla el campo $\overline{F}$ al mover una partícula una vuelta a lo largo de la circunferencia de ecuaciones

$$x^2+y^2+z^2=9 \quad , \quad 3x-y=0$$

Solución

$$W=\oint_C \overline{F}\cdot d\overline{r}$$

$\overline{F}$ está definida en una región simplemente conexa

$$\nabla\times\overline{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\overline{e}_\rho & \rho\overline{e}_\theta & \overline{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2\rho\theta z^3 & \rho^2 z^3 & 3\rho^2\theta z^2\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\overline{F}&=\frac{1}{\rho}\left[\overline{e}_\rho\left(3\rho^2z^2-3\rho^2z^2\right)-\rho\overline{e}_\theta\left(6\rho\theta z^2-6\rho\theta z^2\right)+\overline{e}_z\left(2\rho z^3-2\rho z^3\right)\right]\\&=\overline{0}\end{aligned}$$

$$\nabla\times\overline{F}=\overline{0}\ ,\ \overline{F}\ es\ irrotacional$$

$$\therefore\ \overline{F}\ es\ conservativo\Rightarrow W=\oint_C\overline{F}\cdot d\overline{r}=0\ \text{ unidades de trabajo}$$

5. Calcular

$$\oint_C xydx + (x+y)dy$$

donde C es la frontera de la región situada entre las gráficas de

$$C_1:\ x^2+y^2=9 \quad \textbf{y} \quad C_2:\ x^2+y^2=16 \quad \textbf{con} \quad y \geq 0$$

Solución

$$\oint_c xydx + (x+y)\,dy = \iint (1-x)dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_3^4 (1-r\cos\theta)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\cos\theta\right)\Bigg|_3^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{7}{2}-\frac{37}{3}\cos\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{7}{2}\theta\Big|_0^{2\pi} - \frac{37}{3}sen\theta\Big|_0^{2\pi} = 7\pi$$

---

6. Sea S **la superficie de ecuación** $9x^2+9y^2+4z^2=36$ **y sea un campo vectorial**

$$\overline{F}(x,y,z) = (sen\,z - \mathrm{y}^2 x)i + (\cos z - x^2 y)j + (4z - e^{xy})k$$

Calcular el flujo neto de $\overline{F}$ **a través de** S **.**

Solución

$$Flujo = \Psi = \iint_S \left(\overline{F} \cdot \overline{n}\right) dG = \iiint_D \left(\overline{\nabla} \cdot \overline{F}\right) dV \quad (Teorema\, de\, Gauss)$$

$$\psi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-\rho^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-\rho^2}} \left(4-\rho^2\right) dz\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} 3\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \rho d\rho d\theta$$

$$= -\frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{5}\left(4-\rho^2\right)^{\frac{5}{2}} \Bigg|_0^2 d\theta = -\frac{3}{5} \int_0^{2\pi} \left[(0)-(5)^5\right] d\theta$$

$$= \frac{(32)(3)}{5} \int_0^{2\pi} d\theta = \left(\frac{96}{5}\right)(2\pi)$$

$$\Psi = \frac{192}{5}\pi \quad unidades\, de\ flujo$$

Nota: la integral se hizo en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z)

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{F} = -y^2 - x^2 + 4 = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - \rho^2$$