Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
Cálculo Vectorial
Solución Segundo Examen Final

Semestre: 2018-2

1. Sea $\bar{v}=(x,y)$ el vector solicitado. La función objetivo es $f(x,y)=2x+4y$. La función restricción es $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Así, la función de Lagrange es $L(x,y)=2x+4y+\lambda(x^2+y^2-1)$.

$$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda)&=2+2\lambda x=0\\ L_y(x,y,\lambda)&=4+2\lambda y=0\\ L_\lambda(x,y,\lambda)&=x^2+y^2-1=0\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} y&=2x\\ 5x^2&=1\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1&=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad y_1=\frac{2}{\sqrt{5}}\\ x_2&=-\frac{1}{\sqrt{5}} \quad y_2=-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

El vector solicitado es entonces $\bar{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

---

2. En el punto P(2,0,1) $\bar{R}(t,s)=(t+s)\,\mathbf{i}+(t-s)\,\mathbf{j}+(ts)\mathbf{k} \quad\Rightarrow\quad t=s=1$. Además,

$$\begin{aligned} \bar{R}_t(t,s)&=\mathrm{i}+\mathbf{j}+(s)\mathbf{k}\\ \bar{R}_s(t,s)&=\mathrm{i}-\mathbf{j}+(t)\mathbf{k}\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \bar{R}_t(1,1)&=\mathrm{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\\ \bar{R}_s(1,1)&=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \bar{N}(1,1)=\bar{R}_t(1,1)\times\bar{R}_s(1,1)=2\mathbf{i}-2\mathbf{k}$$

Por otro lado, una ecuación vectorial de la curva $C:\bar{r}(x)=(x)\,\mathbf{i}+\left(\frac{x^2}{4}\right)\mathbf{k} \Rightarrow \bar{r}\,'(x)=\mathbf{i}+\left(\frac{x}{2}\right)\mathbf{k}$ y $\bar{r}\,'(2)=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ es un vector tangente a C en P. Como $\bar{N}(1,1)\cdot\bar{r}\,'(2)=0$ el ángulo pedido es $\theta=0\,rad$.

---

3. a)
$$\begin{aligned} \nabla u&=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\\ \nabla v&=\mathbf{i}-\mathbf{k}\\ \nabla w&=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \nabla u\cdot\nabla v&=0\\ \nabla u\cdot\nabla w&=0\\ \nabla w\cdot\nabla v&=0\end{aligned}$$
por lo que el sistema es ortogonal.

b) $|\nabla u|=\sqrt{3},\ |\nabla v|=\sqrt{2}$ y $|\nabla w|=\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad h_u=\frac{1}{\sqrt{3}},\ h_v=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $h_w=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

c) $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)=h_uh_vh_w=\frac{1}{6}$.

d) $\nabla \cdot \bar{H}(u,v,w) = \dfrac{1}{h_u h_v h_w}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}\left(h_v h_w H_u\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(h_u h_w H_v\right) + \dfrac{\partial}{\partial w}\left(h_v h_u H_w\right)\right) = 6\left(1+1+1\right) = 18$

4. a) $\nabla \times \bar{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+y & x+2z^2 & ayz \end{vmatrix} = (az-4z)\,\mathbf{i} \;\Rightarrow\; a=4$.

b) Para obtener la función potencial del campo integramos

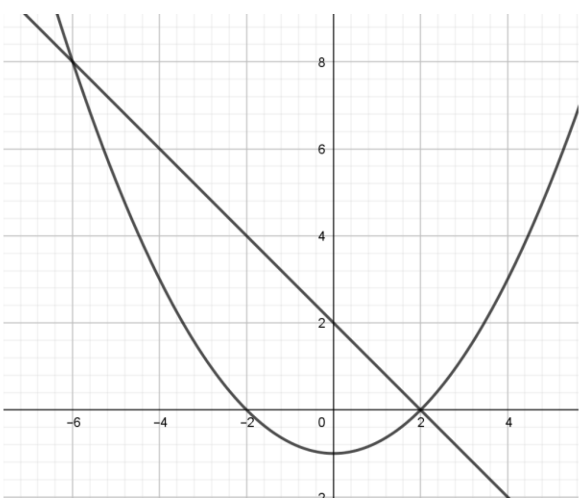
$\varphi(x,y,z) = \int (2x+y)\,dx = x^2 + xy + C_1(y,z)$

$\varphi(x,y,z) = \int (x+2z^2)\,dy = xy + 2yz^2 + C_2(x,z)$ por lo que $\varphi(x,y,z) = x^2 + xy + 2yz^2 + K$

$\varphi(x,y,z) = \int (4yz)\,dz = 2yz^2 + C_3(x,y)$

Por tanto, $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \varphi(0,4,3) - \varphi(4,0,3) = 56$.

5. La gráfica de las líneas se muestra en la siguiente figura.

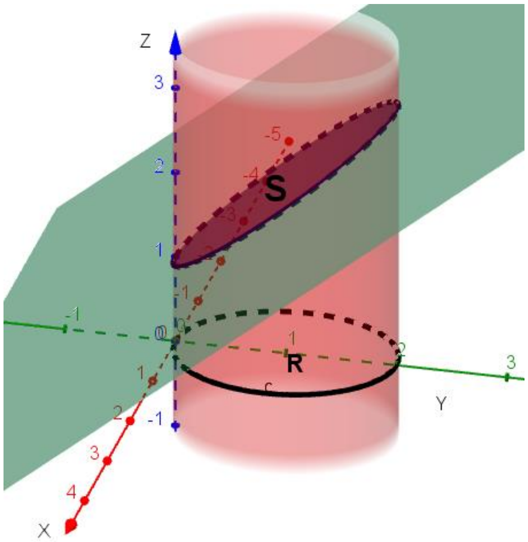


Empleando integrales dobles el área de la región definida es:

$$A(R) = \iint_R dA = \int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^{2}\left(3 - x - \frac{x^2}{4}\right) dx$$

$$A(R) = \left(3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right)_{-6}^{2} = \frac{64}{3}u^2$$

6. Sea $\bar{F}(x,y,z)=(y-1)\mathbf{i}+(z^2)\mathbf{j}+(y)\mathbf{k}$, $\nabla\times\bar{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-1 & z^2 & y\end{vmatrix}=(1-2z)\mathbf{i}-\mathbf{k}$. El vector normal al plano que contiene a C es $\bar{N}=-\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Así, de acuerdo a la figura,



$$\int_C (y-1)dx+z^2dy+ydz=\iint_S \nabla\times\bar{F}\cdot\hat{n}\ dS=I$$

$$I=\iint_R\left((1-2z)\mathbf{i}-\mathbf{k}\right)\cdot\left(-\mathbf{j}+\mathbf{k}\right)dA=-\iint_R dxdy=-A(R)$$

Como el cilindro es circular $I=-\pi$.