Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO A

Semestre: 2017-1 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ________________________________ No. de cuenta: ____________________

---

1. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3-x+2-y^2+2y-z^2+2z$$

15 PUNTOS

---

2. Una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria de la curva descrita por la ecuación vectorial

$$\bar{r}(t)=2e^t i+\cos t\ j+(t^3+3)k\ ,$$ en donde t es el tiempo

calcular para el punto $P(2,1,3)$:

a) La curvatura y la torsión de la curva
b) Los vectores aceleración tangencial y aceleración normal de la partícula

20 PUNTOS

---

3. Sea el sistema coordenado curvilíneo ortogonal definido por las siguientes ecuaciones de transformación

$$x=u^2+v^2\quad,\quad y=u^2-v^2\ ,\quad \mathrm{z}=\mathrm{w}$$

Utilizar este sistema para calcular el Laplaciano de la función escalar

$$f\left(u,v\right)=u^4+v^4$$

15 PUNTOS

4. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas definido por

$$\overline{F}(x,y,z) = (2xy + z^3)\,\hat{i} + x^2\,j + 3\,x\,z^2\,k$$

sobre una partícula que se desplaza desde el punto $A(1,-1,\ 0)$ hasta el punto $B(1,1,0)$ a lo largo del segmento de recta que los une.

15 PUNTOS

5. Mediante el Teorema de Gauss calcular el flujo del campo vectorial

$$\overline{F}(x,y,z) = x\hat{i} + y\,j + zk$$

a través de la superficie cerrada limitada en el primer octante por las superficies

$$x^2 + y^2 = 16\ ,\quad x^2 + y^2 = 25\ ,\quad y = x\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0\quad y\quad z = 10\,.$$

20 PUNTOS

6. Calcular el área del cilindro $y = x^2$ que está limitada por el primer octante y por los planos $\pi_1:\ x = 1$ y $\pi_2:\ z = x$

15 PUNTOS

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Cálculo Vectorial
Solución Primer Examen Final
TIPO A y B

Semestre: 2017-1

1.

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y+2=0 \Rightarrow y=1\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=-2z+2=0 \Rightarrow z=1\end{array}\right\} P.C. \begin{cases}(1,1,1)\\(-1,1,1)\end{cases}$$

La matriz hessiana es:

$$H=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Para (1,1,1):

$$H\big|_{(1,1,1)}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

De donde:

$$\lambda_1=2 \ , \quad \lambda_2=-2 \ , \quad \lambda_3=-2$$

Por lo tanto, hay un punto silla en (1,1,1)

Para $(-1,1,1)$:

$$H\big|_{(-1,1,1)}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

De donde:

$$\lambda_1=-2 \ , \quad \lambda_2=-2 \ , \quad \lambda_3=-2$$

Por lo tanto, hay un máximo relativo en $(-1,1,1)$

15 PUNTOS

2.

a) $(2e^t, \cos t, t^3+3) = (2,1,3) \rightarrow t=0$

$$\bar{r}\,' = (2e^t, -sent, 3t^2);\quad \bar{r}\,'(0) = (2,0,0)$$

$$\bar{r}\,'' = (2e^t, -\cos t, 6\,\mathrm{t});\quad \bar{r}\,''(0) = (2,-1,0)$$

$$\bar{r}\,''' = (2e^t, sent, 6);\qquad \bar{r}\,'''(0) = (2,0,6)$$

$$\bar{r}\,'x\,\bar{r}\,'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2k = (0,0-2);\quad k = \frac{\left|\bar{r}\,'x\,\bar{r}\,''\right|}{\left|\bar{r}\,'\right|^3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\tau = \frac{\left|\bar{r}\,'x\,\bar{r}\,''\right|\cdot\bar{r}\,'''}{\left|\bar{r}\,'x\,\bar{r}\,''\right|^2} = \frac{-12}{4} = -3$$

b) $\overline{a_T} = a_T\widehat{T}\;;\qquad a_T = \bar{a}\cdot\widehat{T} = \dfrac{\bar{r}\,''\cdot\bar{r}\,'}{\left|\bar{r}\,'\right|} = \dfrac{(2,-1,\,0)\cdot(2,0,0)}{2} = 2$

$$\overline{a_T} = 2\,\frac{(2,0,0)}{2} = (2,0,0) \longrightarrow \overline{a_T} = 2i\;;\quad \overline{a_N} = \bar{a} - \overline{a_T}$$

$$\overline{a_N} = (2,-1.0)-(2,0,0) = (0,-1,0) \longrightarrow \overline{a_N} = -\widehat{j}$$

20 PUNTOS

3.

$$\bar{\nabla}^2 f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

$$\mathrm{h}_u = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\right|\;;\quad \mathrm{h}_v = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right|\;;\quad \mathrm{h}_w = \left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial w}\right|\;;\qquad \bar{r} = (u^2+v^2)\hat{i} + (u^2-v^2)\,j + wk$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial u} = 2u\hat{i} + 2u\,j\;;\quad h_u = 2\sqrt{2}u$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial v} = 2v\hat{i} - 2v\,j\;;\quad h_v = 2\sqrt{2}v$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial w} = k\;;\quad h_w = 1$$

$$\bar{\nabla}^2 f = \frac{1}{8uv}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\mathrm{uv}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8uv}\left[\frac{\partial}{\partial u}(4\,\mathrm{u}^2\mathrm{v}) + \frac{\partial}{\partial v}(4\,\mathrm{uv}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{8uv}[8\,\mathrm{uv} + 8\,\mathrm{uv}] = \frac{16uv}{8uv} = \frac{16}{8} = 2$$

$$= \bar{\nabla}^2 f = 2$$

15 PUNTOS

4.

$$\overline{\nabla} X\,\overline{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{bmatrix} = (2x - 2x)\hat{i} - 0\,j + (2x - 2y) = \hat{0}$$

$\therefore$ *Es conservativo y existe $\varnothing$ función potencial*

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial x} = M \qquad \partial \overline{F} = \int M\,dx = \int (2xy + z^3)dx = x^2 y + xz^3 + c_1 = \overline{F}$$

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial y} = N \qquad \partial \overline{F} = \int N\,dy = \int (x^2)dy = x^2 y + c_2 = \overline{F}$$

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial z} = R \qquad \partial \overline{F} = \int R\,dz = \int (3xz^2)dz = xz^3 + c_3 = \overline{F}$$

Entonces la función potencial es

$$\phi = x^2 y + xz^3 \Big|_{(1,-1,0)}^{(1,1,0)} = (1^2)(1) + 0 - (1^2)(-1) + 0 = 1 + 1 = 2 \textit{ unidades}$$

15 PUNTOS

5.

$$div\overline{F} = 3$$

$$\int_S \overline{F} \bullet d\overline{s} = \iiint_Q div\overline{F} dv = \int_0^{\pi/4}\int_4^5\int_0^{10} 3r\,dz\,dr\,d\theta = 3\int_0^{10} dz \int_4^5 rdr \int_0^{\pi/4} d\theta = \frac{135\pi}{4}$$

20 PUNTOS

6.

Una ecuación vectorial de s es $\overline{r}(x,z) = x\hat{i} + x^2\,j + zk$

$$0 \le x \le 1$$
$$0 \le z \le x$$

$$\overline{r_x} x \overline{r_z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\hat{i} - j$$

$$\left| \overline{r_x} x \overline{r_z} \right| = \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$A(\mathrm{s}) = \int_0^1\int_0^x \sqrt{4x^2+1}\;dzdx = \int_0^1 x\sqrt{4x^2+1}\;dx = \frac{1}{12}(4x^2+1)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$A(s) = \frac{1}{12}(5^{3/2} - 1)$$

15 PUNTOS