Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO

VNIVERSIDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

TIPO A

Semestre: 2017-2 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________________ No. de cuenta: ____________

1. **Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange, obtener las dimensiones del rectángulo de máxima área que puede inscribirse en la elipse de ecuación**

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

15 PUNTOS

2. **Una partícula se desplaza sobre la curva C de ecuación**

$$\bar{r}(t) = 2\cos t\, i + \sqrt{2}\, sen\, t\; j - \sqrt{2}\, sen\, t\, k$$

Obtener para el punto $P(\sqrt{2},\ 1,\ -1)$

a) **La curvatura y la torsión de la curva**
b) **La ecuación del plano osculador**
c) **Los vectores aceleración tangencial y normal de la partícula**

20 PUNTOS

3. **Determinar el valor de las constantes** $a,\ b\ y\ c$ **de tal forma que el campo vectorial R expresado por:**

$$\overline{R}(x,y,z) = (x + 2\mathrm{y} + a\,\mathrm{z})\,\hat{i} + (b\,x - 3\,y - z)\,j + (4x + c\,y + 2\,z)\,k$$

Sea irrotacional

15 PUNTOS

4. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\overline{F}(\rho,\theta) = sen^2\theta\,\overline{e}_\rho + sen\,2\theta\,\overline{e}_\theta$ en el movimiento de una partícula que se desplaza desde el punto $A(2,\ 0)$ hasta el punto $B(\ 1,\ \frac{3\pi}{2})$ a lo largo de la recta $\overline{AB}$.

15 PUNTOS

5. Mediante el Teorema de Green evaluar la integral de línea a lo largo de la curva C con orientación positiva

$$\int_C x\,y^2 dx + 2\,x^2 y\,dy$$

Donde C es el triángulo con vértices en los puntos A (0, 0), B (2, 2) y D (2, 4)

20 PUNTOS

6. Calcular la circulación total del campo expresado por $\overline{F}(\mathrm{x,y,z}) = 10\,\mathrm{y}\,\hat{i} + 20x\,j + xyz^2\,k$ alrededor de la curva cerrada C formada por la intersección del plano x-y con el cono $(z-2)^2 = x^2 + y^2$.

15 PUNTOS

1. La función objetivo es el área, aprovechando que la elipse está centrada en el origen y es simétrica respecto de ambos ejes, utilizamos la cuarta parte del rectángulo que esta en el primer cuadrante y cuya área es: $A(x,y)=xy$
La función restricción es la ecuación de la elipse y la podemos reescribir como sigue:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

La ecuación de Lagrange queda:

$$L=xy+\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)$$

Obtenemos las derivadas respecto de cada una de las variables y del multiplicador de Lagrange y las igualamos a cero:

$$L_x=y+2\lambda b^2x=0.....................1$$
$$L_y=x+2\lambda a^2y=0.....................2$$
$$L_\lambda=b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0.........3$$

$De\ 1\, y\, 2:$

$$-\lambda=\frac{y}{2b^2x}=\frac{x}{2a^2y}\qquad\rightarrow\qquad 2a^2y^2=2b^2x^2$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2.................4$$

$La\ \ 4\ en\, la\ 3:$

$$b^2x^2+a^2(\frac{b^2}{a^2}x^2)-a^2b^2=0$$
$$(b^2x^2+b^2x^2-a^2b^2=0)\ \frac{1}{b^2}$$
$$x^2+x^2-a^2=0\qquad\rightarrow\qquad 2x^2=a^2$$
$$x^2=\frac{a^2}{2}...................5$$

$La\ 5\ en\ la\ 4$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(\frac{a^2}{2})$$
$$y^2=\frac{b^2}{2}....................6$$

$De\, la\ 5\ y\ la\, 6$

$$x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\qquad\qquad y=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

De modo que la base del rectangulo es dos veces el valor de x obtenido y la altura es dos veces el valor de y por lo tanto:

$$base=a\sqrt{2}\qquad\qquad altura=b\sqrt{2}$$
$$si\quad a=2\ \ y\ \ b=1$$

$$\boxed{\mathbf{base=2\sqrt{2}}}\qquad\boxed{\mathbf{altura=\sqrt{2}}}$$

15 PUNTOS

2. $a)\ \overline{r_0}=(2\cos t,\sqrt{2}sent,-\sqrt{2}sent)=(\sqrt{2},1,-1)$

$$\left.\begin{array}{l}2\cos t=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}sent=1\\ -\sqrt{2}sent=-1\end{array}\right\}\ t=\frac{\pi}{4}$$

$$k=\frac{\left|\overline{r}'x\overline{r}''\right|}{\left|\overline{r}'\right|^3}$$

$$\overline{r}'=(-2sent,\sqrt{2}\cos t,-\sqrt{2}\cos t)\quad\rightarrow\quad \overline{r}'(\frac{\pi}{4})=(-\sqrt{2},1,-1)$$

$$\overline{r}''=(-2\cos t,-\sqrt{2}sent,\sqrt{2}sent)\quad\rightarrow\quad \overline{r}''(\frac{\pi}{4})=(-\sqrt{2},-1,1)$$

$$\overline{r}'x\overline{r}''=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\sqrt{2} & 1 & -1\\ -\sqrt{2} & -1 & 1\end{vmatrix}=2\sqrt{2}\,j+2\sqrt{2}\,k$$

$$k=\frac{\sqrt{8+8}}{(\sqrt{2+1+1})^3}=\frac{4}{(2)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\tau=\frac{(\overline{r}'x\overline{r}'')\bullet\overline{r}'''}{\left|\overline{r}'x\overline{r}''\right|^2}$$

$$\overline{r}'''=(2sent,-\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\cos t)\quad\rightarrow\quad \overline{r}'''(\frac{\pi}{4})=(\sqrt{2},-1,1)$$

$$\tau=\frac{(0,2\sqrt{2},2\sqrt{2})\bullet(\sqrt{2},-1,1)}{(4)^2}=\frac{0-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{16}=0$$

$\boxed{\textit{La curva es plana}}$

$b)\quad$ *Plano osculador*

$$(\overline{r}-\overline{r}_0)\bullet(\overline{r}'x\overline{r}'')=0\quad\rightarrow\quad(x-\sqrt{2},\ y-1,z+1)\bullet(0,2\sqrt{2},2\sqrt{2})=0$$

$$2\sqrt{2}y-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}z+2\sqrt{2}=0\quad\rightarrow\quad\boxed{\mathbf{y+z=0}}$$

$c)$

$$\overline{a_T}=a_\tau T=(\overline{a}\bullet T)T=[\frac{(-\sqrt{2},-1,1)\bullet(-\sqrt{2},1,-1)}{2}]\frac{(-\sqrt{2},1,-1)}{2}$$

$$\overline{a_\tau}=\left[\frac{2+(-1)+(-1)}{4}\right](-\sqrt{2},1,-1)=(0)(-\sqrt{2},1,-1)=\overline{0}\rightarrow\boxed{\overline{\mathbf{a}_\tau}=\overline{\mathbf{0}}}$$

$$\therefore\ \overline{a_N}=\overline{a}-\overline{a_\tau}=\overline{a}$$

$$\boxed{\overline{\mathbf{a}_N}=(-\sqrt{2},-1,1)}$$

20 PUNTOS

3. $Para\ que\ sea\ irrotacional\ debe\ cumplir\ que\ rot\ \overline{R}=\overline{0},\ entonces:$

$$rot\,\overline{R}=\left(\frac{\partial R_z}{\partial y}-\frac{\partial R_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial R_x}{\partial z}-\frac{\partial R_z}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial R_y}{\partial x}-\frac{\partial R_x}{\partial y}\right)k$$

$$=(c+1)\hat{i}+(a-4)\,j+(b-2)k=0$$

$$\therefore\quad c+1=0$$
$$b-2=0$$
$$a-4=0$$

$Entonces$ $\boxed{\mathbf{a=4,\ b=2\ y\ c=-1}}$

15 PUNTOS

---

4. $$\nabla x\overline{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ sen^2\theta & \rho sen\,2\theta\end{vmatrix}\bar{e}z=[sen\,2\theta-2sen\theta\cos\theta]\bar{e}z$$

$\nabla x\overline{F}=\overline{0}$ $\quad\therefore\ \overline{F}\ es\ un\ campo\ conservativo$

$\text{int}\,egrando\quad \dfrac{\partial\phi}{\partial\rho}=sen^2\theta$

$$\phi=\rho sen^2\theta+h(\theta)$$

$sustituyendo\ en\quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}=sen\,2\theta$

$$\frac{1}{\rho}\rho 2sen\theta\cos\theta+\frac{1}{\rho}\frac{dh}{d\theta}=sen\,2\theta$$

$$\frac{dh}{d\theta}=0\quad h=c$$

$Función\ potencial\ \ \phi=\rho sen^2\theta+c$

$Trabajo$

$$W_{AB}=\phi\left(1,\frac{3\pi}{2}\right)-\phi(2,0)$$

$$\boxed{\mathbf{W_{AB}=1\,Unidad\,de\,trabajo}}$$

15 PUNTOS

5

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$P = xy^2, \quad Q = 2x^2 y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$$

$$\oint_C xy^2 dx + 2x^2 ydy = \iint_S (4xy - 2xy) dxdy = \int_0^2 \int_x^{2x} 2xy \; dydx = \int_0^2 xy^2 \Big|_x^{2x} dx$$

$$\int_0^2 (x(2x)^2 - x(x)^2) dx = \int_0^2 (4x^3 - x^3) dx = \int_0^2 3x^3 dx = \frac{3}{4} x^4 \Big|_0^2 = 12$$

$$\boxed{\int_C \mathbf{xy^2dx + 2x^2ydy = 12}}$$

20 PUNTOS

6.

$$Cuando \;\; z = 0 \quad x^2 + y^2 = R^2$$

$$\Gamma = circulación = \oint_C \overline{F} \bullet d\overline{r} = \iint_S (\overline{\nabla} x \overline{F}) \cdot \overline{n} \; ds$$

$$ds = \left|\overline{N}'\right| dA \qquad \overline{N}' = K$$

$$\Gamma = \iint_R (\overline{\nabla} x \overline{F} \cdot \overline{N}') \, dA$$

$$\overline{\nabla} x \overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 10y & 20x & xyz^2 \end{vmatrix} = xz^2 \hat{i} - yz^2 j + 10k$$

$$(\overline{\nabla} x \overline{F}) \bullet \overline{N}' = (xz^2, -yz^2, 10) \bullet (0,0,1) = 10$$

$$\Gamma = \iint_R (10) \, dA = 10 \iint_R dA = 10 AR$$

$$A(R) = \pi R^2 \quad \longrightarrow \quad \Gamma = 10\pi R^2$$

$Si \;\; R \; es \; 2 \;\; entonces$ $\boxed{\mathbf{\Gamma = 40\pi}}$

15 PUNTOS