# Universidad Nacional Autónoma de México
## Facultad de Ingeniería
## División de Ciencias Básicas
## Coordinación de Matemáticas
## Cálculo Vectorial
## Primer Examen Final Colegiado
## Tipo C

Semestre: 2016-2    Duración máxima: 2 horas

Nombre: ______________________________________ No. de cuenta: ____________________

---

**1. Determinar los valores extremos de la función** $f(x,y)=x^2+2y^2$ **sujetos a la restricción** $x^2+y^2=1$.

**15 PUNTOS**

---

**2. Una partícula se mueve desde el punto A (1,-1,1) para t = 0 s , con una velocidad dada por**

$$\bar{v}(t)=[(2t)\hat{i}+(2t)\,j+(t)k] \quad m/s$$

**Determinar en t = 1 s :**

**a) Las coordenadas del punto P donde se encuentra la partícula.**

**b) Los vectores aceleración tangencial y normal de la partícula.**

**c) La curvatura de la trayectoria descrita por la partícula.**

**20 PUNTOS**

---

**3. Determinar la divergencia y el rotacional del campo**

$$\overline{F}(r,\ \theta,\ z)=(r\cos\,\theta)\ e_r+(r\,sen\,\theta)\ e_\theta+(z)\ e_z$$

**expresado en coordenadas cilíndricas circulares**

**15 PUNTOS**

**4. Sean el campo** $\overline{R}(x, y, z) = (x, y, z)$ **y la curva** $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

**Calcular** $\int_c \overline{R} \, x \, d\overline{r}$ **desde** $A(1, 0, 1)$ **hasta** $B(0, 1, 1)$.

**15 PUNTOS**

---

**5. Calcular la circulación del campo**

$$\overline{F}(x, y, z) = (sen\, x + y\, z)\, \hat{i} + (2x\, z)\, j + (sen\ z + x\, y)\, k$$

**a lo largo de una vuelta a la curva** $C: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 9 \end{cases}$

**20 PUNTOS**

---

**6. Calcular el flujo neto del campo vectorial**

$$\overline{F}(x, y, z) = (y\, z)\, i + (x\, z)\, j + (3z^2)\, k$$

**a través de la región D en el primer octante limitada por los planos coordenados y por las superficies** $x^2 + y^2 = 9$ $y$ $z = 4$.

**15 PUNTOS**

**1.**

$$Sea \quad g(x,y)=x^2+y^2=1 \quad y \quad f(x,y)=x^2+2y^2$$

$$\nabla f(x,y)=(2x,4y) \quad y \quad \nabla g(x,y)=(2x,2y) \ si$$
$$\nabla f=\lambda\nabla g \quad \rightarrow \quad (2x,4y)=(2x\lambda,2y\lambda) \ \text{de donde}$$

$$\begin{cases} 2x\lambda=2x \\ 2y\lambda=4y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} si \quad \lambda=1 & si \quad x=0 \\ y=0 & y=\pm1 \\ x=\pm1 & \lambda=2 \end{matrix}$$

$$P_1(1,0) \quad P_2(-1,0) \quad P_3=(0,1) \quad P_4=(0,-1) \ \text{los valores de } f \text{ son:}$$

$$f(1,0)=1 \qquad f(0,1)=2 \qquad máximo\ valor\ de\ la\ función\ es\ 2$$
$$f(-1,0)=1 \qquad f(0,-1)=2 \qquad mínimo\ valor\ de\ la\ función\ es\ 1$$

**2.**

$$a)\ \overline{R}(t)=\int \overline{v}(t)dt=(t^2+c_1)\hat{i}+(t^2+c_2)j+(\frac{1}{2}t^2+c_3)k$$

$$En\ t=0 \quad \overline{R}(0)=(1,-1,1) \rightarrow c_1=1,\ c_2=-1\ c_3=1\ por\ lo\ que$$

$$\overline{R}(t)=(t^2+1)\hat{i}+(t^2-1)j+(\frac{1}{2}t^2+1)k$$

$$Para \quad t=1$$

$$\overline{R}(1)=2\hat{i}+\frac{3}{2}k \quad \rightarrow \quad P=(2,0,\frac{3}{2})$$

$$b)\ \overline{a}(t)=2\hat{i}+2j+k$$
$$En\ t=1$$
$$\overline{a_T}=\frac{\overline{a}\bullet\overline{v}}{\left|\overline{u}\right|^2}=\frac{(2,2,1)\bullet(2,2,1)}{3^2}(2,2,1)=(2,2,1)$$
$$\overline{a_T}=(2,2,1) \quad y \quad \overline{a_N}=(0,0,0)$$

$$c)\ k=0 \quad puesto\ que\ la\ trayectoria\ es\ una\ línea\ recta$$

**3.**

*Sea la divergencia*

$$\nabla \bullet \overline{F} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\, sen\,\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(rz)\right)$$

$$\nabla \bullet \overline{F} = \frac{1}{r}(2r\cos\theta + r\cos\theta + r) = 3\cos\theta + 1$$

*El rotacional*

$$\nabla x \overline{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & e_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ r\cos\theta & r^2 sen\,\theta & z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}(2r\, sen\,\theta + r\, sen\,\theta)\, e_z$$

$$\nabla x \overline{F} = (3\, sen\,\theta)\, e_z$$

---

**4.**

*Sea*

$$c:\begin{cases} x = \cos t \\ y = sent \quad t\varepsilon\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} dx = -sent\, dt \\ dy = \cos t\ dt \\ dz = 0 \end{matrix}$$

$$\overline{R} x \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \cos t & sent & 1 \\ -sen\, x & \cos t & 0 \end{vmatrix} dt = \left[(-\cos t)\hat{i} + (-sent)\, j + k\right] dt$$

$$\int_C \overline{R} x d\overline{r} = \hat{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t\, dt + j\int_0^{\frac{\pi}{2}} -sent\, dt + k\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$

*Por lo que*

$$\int_c \overline{R} x dr = -\hat{i} - j + \frac{\pi}{2} k$$

**5.**

*Sea*

$$\nabla x\overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ sen\,x + yz & 2xz & sen\,z + xy \end{vmatrix} = (-x)\hat{i} + (z)\,k$$

*El vector normal al circulo S* limitado *por C es K* :

$$\oint_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r} = \iint_S (\nabla x\overline{F}) \bullet K\,dS = \iint_S z dS = 9\iint_S dS = 9\,A(S) = 81\pi$$

**6.**

$$Flujo\ neto\ de\ \overline{F} = \oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n}\,dS$$

*Por el teorema de Divergencia*:

$$\overline{F} = \oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n}\,dS = \iiint_D div\ \overline{F}\,dV\ ; \quad div\,\overline{F} = \overline{\nabla} \bullet \overline{F} = 6Z$$

*En coordenadas cilídricas circulares*:

$$D = \{(r,\theta,z)\,|\,0 \le z \le 4,\ 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le (\pi/2)\}$$

$$Flujo\ de\ \overline{F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3\int_0^4 6\,zr\,dzdrd\theta$$

$$= 6(\frac{\pi}{2})\int_0^3\int_0^4 rz\,dz\,dr$$

$$= 3\pi\int_0^3 \frac{rz^2}{2}\Big|_0^4 dr$$

$$= \frac{3}{2}\pi\int_0^3 r(16)dr$$

$$= 24\pi\int_0^3 rdr$$

$$= 12\pi r^2\Big|_0^3 = 12\pi(9)$$

$$= 108\pi\ unidades\ de\ flujo$$