Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Coordinación de Matemáticas
CÁLCULO VECTORIAL
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
TIPO C

Semestre: 2017-1 Duración máxima: 2 horas

Nombre: ____ No. de cuenta: ________________________

1. Calcular las dimensiones de una caja prismática de base rectangular con tapa, que tenga el máximo volumen posible empleando 12 cm^2 de material.

15 PUNTOS

2. Sea la curva C representada por:

$$\bar{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)i - \cos t\ j\ ,$$ donde t es el tiempo

Determinar:

a) El triedro móvil de vectores $(\bar{T},\ \bar{N},\ y\ \bar{B})$ en el punto $P(\pi, 1)$
b) Si $\bar{r}(t)$ es una función vectorial de módulo constante.

20 PUNTOS

3. Dada la función $f(x, y, z) = \sqrt{(x^2 + y^2)^3} + 2xy + e^z$,

Calcular el laplaciano de f en coordenadas cilíndricas circulares.

15 PUNTOS

4. Determinar si el campo vectorial expresado por

$$\overline{V} = (4xy + z^2 + 2)\,\hat{i} + (2x^2 - 3)\,j + (2xz + 4)\,k$$

posee función potencial. En caso afirmativo obtenerla y evaluarla en el punto

$P(2,1,\ 2)$ considerando que $\varphi(3,2,\ 1) = 50$

15 PUNTOS

5. Por medio de integral doble calcular el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad y \qquad x + y = 3$$

20 PUNTOS

6. Empleando el Teorema de Gauss calcular el flujo del campo vectorial

$$\overline{F}(x,y,z) = (x + y^2)i + (2y - \frac{z^3}{4})\,j + (sen\,y - z)k$$

a través del cilindro que envuelve al sólido limitado por las superficies

$x^2 + y^2 = 4,\quad x = y,\quad x = -y,\quad z = 3\quad y\quad z = 5$

(se sugiere emplear coordenadas cilíndricas)

15 PUNTOS

2Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Cálculo Vectorial
Solución Primer Examen Final
TIPO C y D

Semestre: 2017-1

1.

Sea la caja con ancho x, largo y, y altura z, entonces:

Función Objetivo: $V(x,y,z)=xyz$

Función Restricción: $2xy+2xz+2yz-12=0$

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=yz+\lambda(2y+2z)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{yz}{2y+2z}.........(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=xz+\lambda(2x+2z)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{xz}{2x+2z}.........(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=xy+\lambda(2x+2y)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{xy}{2x+2y}........(3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=2xy+2xz+2yz-12.......(4)$$

$(1)=(2)$:

$$-\frac{yz}{2y+2z}=-\frac{xz}{2x+2z} \Rightarrow y=x$$

$(2)=(3)$:

$$-\frac{xz}{2x+2z}=-\frac{xy}{2x+2y} \Rightarrow z=y$$

Sustituyendo en (4):

$$2x^2+2x^2+2x^2-12=0$$

$$6x^2=12$$

$$x=\sqrt{2}$$

$$\therefore x=y=z=\sqrt{2}\ \ [\text{cm}]$$

15 PUNTOS

2.

a) $Si \qquad \bar{r}(t) = (t - sen\,t, -\cos t)$

$en\ \ p(\pi,1); \quad t - sen\,t = \pi \quad y \quad -\cos t = 1 \quad de\ donde\ t = \pi$

$\frac{d\bar{r}}{dt} = (1-\cos t, sen\,t) \quad al\,valuar\,en\,P \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = 2i \Rightarrow \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = 2$

$$\bar{T} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right|} = i$$

$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = (sen\,t, \cos t)\ al\ valuar\ en\ P\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -j$

$Sea\ \ \frac{d\bar{r}}{dt}\, x \,\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -2k \ \ por\ lo\ que$

$$\bar{B} = \frac{\frac{d\bar{r}}{dt}\, x\, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\, x\, \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|} = -K$$

$entonces \quad \bar{N} = \bar{B}x\bar{T} = -j$

b) $Como\ \bar{r}(t) = (\pi,1) \quad y \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = (2,0),\ \ se\ cumple\,que\ \ \bar{r}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} \neq 0$

$\therefore \bar{r}(t)$ no es de modulo constante

20 PUNTOS

---

3. $\quad$ Si $\quad f(x,y,z) = (x^2+y^2)^{3/2} + 2xy + e^z, \quad entonces$

$f(\mathrm{r},\theta,z) = r^3 + r^2 sen\,2\theta + e^z$

Sea

$$\bar{\nabla}^2 f = \frac{1}{h_r h_\theta h_z}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta h_z}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{h_r h_z}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h_r h_\theta}{h_z}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]$$

$y\ si$

$\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^2 + 2r sen\,2\theta; \quad h_r = 1$

$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 2r^2\cos 2\theta\ ; \qquad h_\theta = r$

$\frac{\partial f}{\partial z} = e^z\ ; \qquad h_z = 1$

$$\frac{h_\theta h_z}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r} = 3r^3 + 2r^2 sen\,2\theta$$

$$\frac{h_r h_z}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial r} = 2r\cos 2\theta$$

$$\frac{h_r h_\theta}{h_z}\frac{\partial f}{\partial z} = re^z$$

$Por\ \ lo\ \ que$

$\bar{\nabla}^2 f = \frac{1}{r}[9r^2 + 4rsen2\theta - 4rsen2\theta + e^z]$

$\bar{\nabla}^2 f = 9r + e^z$

15 PUNTOS

4.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad 4x = 4x$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \qquad 0 = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad 2z = 2z$$

$$\therefore Si \;\; es\, C.V.C \quad \exists \phi$$

$$\phi = \int P dx \cup \int Q dy \cup \int R dz$$

$$\phi = \int (4xy + z^2 + 2)\, dx \cup \int (2x^2 - 3)\, dy \cup \int (2xz + 4)\, dz$$

$$\phi = 2x^2 y + xz^2 + 2x \cup 2x^2 y - 3y \cup xz^2 + 4z + c$$

$$\phi = 2x^2 y + xz^2 + 2x - 3y + 4z + c$$

$$Se \;\; sabe \;\; que \quad \phi(3,2,1) = 50$$

$$50 = 2(3)^2(2) + (3)(1)^2 + 2(3) - 3(2) + 4(1) + c$$

$$50 = 36 + 3 + 6 - 6 + 4 + c$$

$$50 = 43 + c$$

$$c = 50 - 43$$

$$\therefore c = 7$$

$$\phi(2,1,2) = 2(4)(1) + (2)(4) + 4 - 3 + 8 + 7$$

$$= 8 + 8 + 1 + 15$$

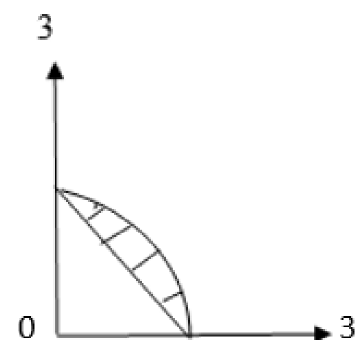
$$\therefore \phi(2,1,2) = 32$$

15 PUNTOS

5.

Sea la región

$$si \quad R = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \big| 0 \le x \le 3;\; 3 - x \le y \le \sqrt{9 - x^2}\,\}$$



$$A = \iint_R dA = \int_0^3 \int_{3-X}^{\sqrt{9-x^2}} dydx$$

$$A = \int_0^3 [\sqrt{9 - x^2} - (3 - x)]dx$$

$$A = \frac{9}{2}[\text{angsen}\,\frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{9}] - 3x + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3$$

$$A = \frac{9}{2}[\frac{\pi}{2} - 9 + \frac{9}{2}] = \frac{9}{2}(\frac{\pi}{2}) - \frac{9}{2}$$

$$A = \frac{9}{2}(\frac{\pi}{2} - 1) \;\; unidades \;\; de \;\; área$$

20 PUNTOS

6.

$$div\overline{F}=\nabla\cdot\overline{F}=\frac{\partial(\mathrm{x}+\mathrm{y}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(2y+\frac{z^3}{4})}{\partial y}+\frac{\partial(\mathrm{sen\ y}-\mathrm{z})}{\partial z}=1+2-1=2$$

Coordenadas cilíndricas que definen el volumen:

$$0\le r\le 2,\quad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}\ \text{ también puede ser } 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\quad y\quad 3\le z\le 5$$

Teorema de Gauss

$$Flujo=\iiint_{Dv} div\overline{F}dv=2\int_0^{\pi/2}\int_3^5\int_0^2 r\,dr\,dz\,d\theta=(2)(\frac{\pi}{2})(2)[\frac{r^2}{2}]_0^2=2\pi[2-0]=4\pi$$

15 PUNTOS