SERIE # 1

CÁLCULO VECTORIAL

1) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$.

RESPUESTA

$P_1(0,0)$ máximo relativo, $P_2(1,1)$ punto silla, $P_3(1,-1)$ punto silla, $P_4(-1,1)$ punto silla, $P_5(-1,-1)$ punto silla.

2) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y + y^2 + 3x^2 - y + 1$.

RESPUESTA

$P_1\left(0,\frac{1}{2}\right)$ mínimo relativo, $P_2\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ punto silla, $P_3(1,2)$ punto silla.

3) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$.

RESPUESTA

$P_1(0,0)$ punto silla, $P_2(0,2)$ mínimo relativo, $P_3(-2,0)$ máximo relativo, $P_4(-2,2)$ punto silla.

4) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3 + y^3$.

RESPUESTA

Un mínimo relativo en $P_1(0,0)$ de valor , un máximo relativo en $P_4\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ de valor $z = \frac{8}{27}$.

5) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

RESPUESTA

f *presenta un punto silla en el punto* $P(-1,1)$.

---

6) Determinar los puntos donde la función $f(x,y)=\cosh x+\operatorname{senh} y$ tiene valores máximos, mínimos o puntos silla.

RESPUESTA

La función no tiene puntos críticos.

---

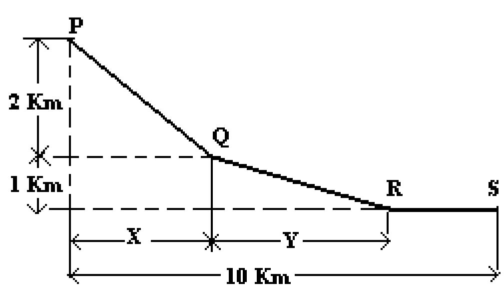
7) Obtener los puntos críticos de la función $f(x,y)=\frac{1}{3}y^3+x^2y-2x^2-2y^2+6$ y determinar la naturaleza de cada uno de los puntos obtenidos.

RESPUESTA

$P_1(0,0)$ máximo relativo, $P_2(0,4)$ mínimo relativo, $P_3(2,2)$ punto silla, $P_4(-2,2)$ punto silla.

---

8) Se desea construir un ducto desde el punto P, hasta el punto S, los costos por cada Km de ducto son: de $3k$ en el tramo $\overline{PQ}$, $2k$ en el tramo $\overline{QR}$, y de k en el tramo $\overline{RS}$. Determinar las dimensiones de X y Y para que el costo del ducto sea mínimo.



RESPUESTA

$\mathrm{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\mathrm{Y}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

---

9) Calcular los valores extremos de la función $f\left(x,y\right)=x^2+y^2+2x-2y-1$ en la región $x^2+y^2\leq 4$.

RESPUESTA

Los valores extremos son: $f\left(-1,1\right)=-3$ mínimo y $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=8.65$ máximo.

---

10) Determinar las coordenadas del punto $P\left(x,y,z\right)$ que pertenece a la superficie $S:x^2+y^2+z+1=0$ y que es el más cercano al origen.

RESPUESTA

El punto $\left(0,0,-1\right)$ es el más cercano (distancia mínima) al origen.

---

11) Dada la función $f\left(x,y\right)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$, determinar sus puntos críticos y la naturaleza de cada uno de ellos.

RESPUESTA

$P_1\left(0,0\right)$ mínimo relativo, $P_2\left(-\frac{5}{3},0\right)$ máximo relativo, $P_3\left(-1,2\right)$ punto silla, $P_4\left(-1,-2\right)$ punto silla.

---

12) Determinar, si existen los valores extremos para la función $f\left(x,y\right)=(x-1)^2-2y^2$.

RESPUESTA

La función no tiene valores extremos.

---

13) Obtener los puntos críticos de la función $f(x,y,z)=4x^3+2x^2y+6xz+3z^2-2y+x^2$ y establecer su naturaleza.

RESPUESTA

$P_1\left(1,-2,-1\right)$ punto silla, $P_2\left(-1,4,1\right)$ punto silla.

14) Determinar los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = 3xz^2 + zy^3 - 3x + 12y - 2z + 2$ y establecer su naturaleza.

RESPUESTA

$P_1(1, 2, -1)$ punto silla, $P_2\left(-\frac{5}{3}, -2, -1 \right)$ punto silla.

15) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = x^2 + 4xy - 10x - 3y^2 + 4y + z^2$.

RESPUESTA

$P\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{7}, 0 \right)$ es un punto silla.

16) Obtener los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + \frac{z^3}{3} + 2zy + 2x + 2z - 10$ y establecer la naturaleza de cada uno de ellos.

RESPUESTA

$P_1(0, -1, 0)$ punto silla, $P_2(2, -3, -2)$ punto silla.

17) Determinar los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = -2x^2 - 3y^2 - z^2 + xy + yz + x + y + z + 10$ y establecer la naturaleza de cada uno de ellos.

RESPUESTA

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ máximo relativo.

18) Obtener los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} - x + 12 - y^2 + 2y - z^2 + 2z$ y determinar la naturaleza de los mismos.

RESPUESTA

$P_1(1, 1, 1)$ punto silla, $P_2(-1, 1, 1)$ máximo relativo.

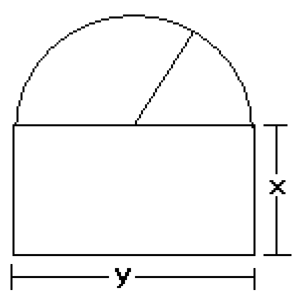
19) Verificar que el campo escalar $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$, tiene un punto crítico en $(1,1,1)$ y determinar la naturaleza de este punto.

RESPUESTA
En el punto $(1,1,1)$, f tiene un valor mínimo igual a –1.

20) Obtener los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 2xz + 8yz - 2x - 36y + 8z - 3$ y establecer la naturaleza de cada uno de los puntos obtenidos.

RESPUESTA
$P(2, -2, 3)$ punto silla.

21) Se desea construir una ventana de área máxima como la mostrada en la figura. Calcular las dimensiones de dicha ventana si su perímetro debe medir 20 *m*.



RESPUESTA

$$x=\frac{20}{4+\pi},\quad y=\frac{40}{4+\pi}$$

22) Calcular mediante el criterio de la segunda derivada la distancia mínima del punto $P(1,2,0)$ a la superficie de ecuación $z=\sqrt{x^2+2y^2}$.

RESPUESTA

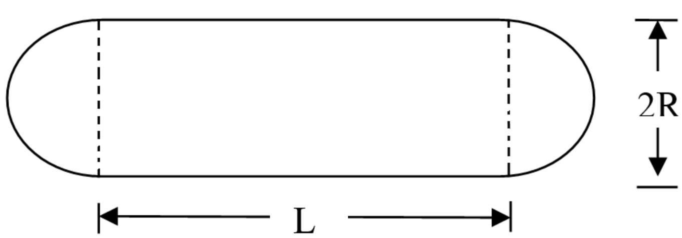
Distancia = $\dfrac{\sqrt{114}}{6}\,\textit{unidades de longitud}$

23) Se desea fabricar un envase con forma de cilindro circular con tapa, empleando una cantidad determinada de lámina. Determinar la razón $\left(\dfrac{r}{h}\right)$ entre el radio r y la altura h del envase, de modo que su volumen sea máximo.

RESPUESTA

$$\frac{r}{h}=\frac{1}{2}$$

24) Se desea fabricar un tanque con capacidad de $10\pi\ m^3$ formado por un cilindro circular de radio R y por dos semiesferas de radio R en sus extremos. Calcular las dimensiones L y R del tanque de modo que se requiera de la menor cantidad posible de material.



RESPUESTA

$$L=0,\ r=\sqrt[3]{\frac{15}{2}}\ m$$

---

25) Se desea fabricar un recipiente sin tapa con forma de cilindro circular recto y cuyo volumen sea de $16\,m^3$. Si el metro cuadrado de material para la base cuesta el doble que para la pared, utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular las dimensiones que debe tener el recipiente para que el costo sea mínimo.

RESPUESTA

$r = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\,m,\ \ h = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}\,m$

---

26) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5$ en la región cerrada R del plano XY limitada por las gráficas de $y = \sqrt{5}$, $y = -\sqrt{5}$ y $x^2 - y^2 = 4$.

RESPUESTA

f presenta 4 máximos absolutos, en:

$f(-3,\sqrt{5}) = 19$

$f(3,\sqrt{5}) = 19$

$f(-3,-\sqrt{5}) = 19$

$f(3,-\sqrt{5}) = 19$

y un mínimo, relativo y absoluto en PC (0 , 0) = 5

---

27) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las coordenadas de los vértices de la hipérbola representada por la ecuación $xy = 4$.

Nota: La hipérbola tiene su centro en el origen.

RESPUESTA

$V_1(2,2)$ y $V_2(-2,-2)$.

---

28) Aplicar el análisis de la variación de una función para establecer las ecuaciones de las rectas sobre las cuales se localizan los ejes de la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

Sugerencia : Tomar en cuenta que la elipse tiene su centro en el origen.

RESPUESTA

$y = x, \quad y = -x$.

29) Calcular la distancia mínima del punto $A(\ 3,-3,1\ )$ a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$.

RESPUESTA

Distancia mínima de 3 unidades.

30) Obtener los máximos y mínimos de la función $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ con la restricción $g(x,y) = 3x - 2y = 5$.

RESPUESTA

$x = -\frac{14}{5}y, \quad y = -\frac{25}{52}$.

31) Determinar las coordenadas del punto de la superficie $z = xy + 1$ que está más cerca del origen.

RESPUESTA

$P(\ 0,0,1\ )$

32) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 1$ sujeta a la restricción $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

RESPUESTA

En $\left(\frac{1}{2},\ 0\ ,\frac{1}{2} \right)$, f tiene un valor mínimo igual a $\frac{1}{2}$.

---

33) Una partícula se mueve en el espacio a lo largo de la curva: $C:\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y+2z=10 \end{cases}$

Determinar las cotas máxima y mínima de la trayectoria de la partícula.

RESPUESTA

Cota máxima en $\left(-2,-2,\ 7\ \right)$, cota mínima en $\left(\ 2,\ 2,\ 3\ \right)$.

---

34) El paraboloide $z=x^2+y^2$ es cortado por el plano $z=4+x+y$. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular el punto de la curva de intersección entre el paraboloide y el plano que está más alejado del origen.

RESPUESTA

$P\left(\ 2,\ 2,\ 8\ \right)$

---

35) Sea la función $f\left(x,y,z\right)=4x^2+y^2+z^2$ restringida por los planos $2x-y+z=4,\quad x+2y-z=1$. Obtener los valores extremos.

RESPUESTA

$f\left(\frac{30}{19},\frac{5}{19},\frac{21}{19}\right)=\frac{214}{19}$.

---

36) Obtener los valores extremos de la función $z=x^2+y^2$, sujeta a la restricción $\cos x-y-5=0$.

RESPUESTA

$f\left(\ 0,-4\right)=16$

---

37) Se desea construir un envase de lámina en forma de cilindro circular recto con tapa, que tenga un volumen de 2 litros. Si el m^2 de lámina cuesta *$100.00*. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del envase para que su costo sea mínimo?.

RESPUESTA

$$r=\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}, \quad h=\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$$

38) Determinar las dimensiones del radio r y de la altura h del cilindro que puede ser inscrito en una esfera de radio R, de tal modo que su superficie total sea mínima.

RESPUESTA

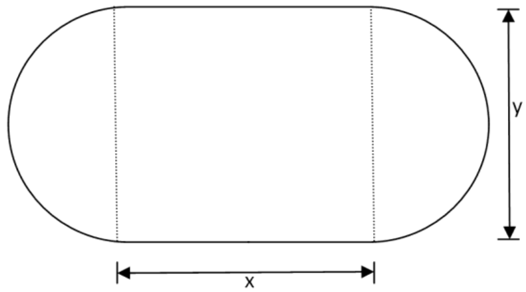
$$r=\frac{R}{\sqrt{2}}, \quad h=\sqrt{2}\,R$$

39) Calcular el área de la región del plano XY limitada por la elipse de ecuación $25x^2-14xy+25y^2-288=0$ (**sugerencia**: el área de una elipse con semiejes, a y b es igual a πab ; determinar el valor de las constantes a y b utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange).

RESPUESTA

$$\mathrm{A}=12\pi \quad u^2$$

40) Se tiene que diseñar un campo deportivo que esté formado por un rectángulo con dos semicírculos en sus extremos. La parte rectangular debe tener un área de *5000* m^2 , y el campo debe estar rodeado por una barda . ¿Cuáles deberán ser las dimensiones del patio de modo que la longitud de la barda que se necesita sea mínima? .



RESPUESTA

$x = 50\sqrt{\pi}, \quad y = \dfrac{100}{\sqrt{\pi}}$

41) Si la suma de tres números positivos a , b , c es S , ¿cuáles son sus valores si la raíz cúbica de su producto debe ser máxima?

RESPUESTA

$a = \dfrac{S}{3}, \quad b = \dfrac{S}{3}, \quad c = \dfrac{S}{3}.$

42) En un aeropuerto se desea tender un cable eléctrico desde un contacto en el piso, localizado en el punto $A(1,1,0)$, hasta un anuncio luminoso montado sobre una superficie plana inclinada de ecuación $x = 3y - z + 2$.
Calcular:

a) La longitud mínima de cable que se puede unir al plano con el contacto.
b) Las coordenadas del punto sobre el plano, más cercano al contacto.

RESPUESTA

a) 1.206 unidades de longitud
b) $P\left(\dfrac{15}{11}, \quad -\dfrac{1}{11}, \quad \dfrac{4}{11}\right)$

43) Un arco metálico cuya configuración geométrica esta representada por las ecuaciones

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 27 = 0 \end{cases}$$

está en un medio con temperatura $T(x, y, z) = x\,y\,z + 10$. Determinar los puntos donde el arco tiene mayor y menor temperatura.

RESPUESTA

Puntos de mayor temperatura: $\left(-3, -3, \dfrac{3}{2}\right)$ y $\left(3,\ 3,\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Puntos de menor temperatura: $\left(-3, -3, -\dfrac{3}{2}\right)$ y $\left(3,\ 3, -\dfrac{3}{2}\right)$.

44) Calcular el valor de los extremos absolutos de la función $f(x, y) = -y^2 + 2y - x^2$ definida en la región $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4;\ y \ge 0\}$.

RESPUESTA

Mínimo absoluto igual a *– 4* en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

Máximo absoluto igual a *1* en $(0, 1)$.

45) Determinar los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = y^2 + x^2 - 4x - 2y + 4$ en una región del dominio de *f* limitada por las rectas $x = 4,\quad y = -1,\quad x - y = 3$.

RESPUESTA

Mínimo absoluto igual a 1 en $(3, 0)$.

Máximo absoluto igual a 7 en $(4, -1)$.

46) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y)=y^2x^2$ sobre la región R definida por $R=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\le 24\}$.

RESPUESTA

El valor extremo de la función $f(x,y)=y^2x^2$ es 36 y se obtiene en cuatro puntos diferentes de los cuales se concluye que son máximos absolutos. La función presenta mínimos absolutos y relativos en todos los puntos de sus ejes ($x=0$ y $y=0$).

47) Calcular el valor máximo de la función $f(x,y)=xy$ en el círculo $x^2+y^2\le 1$.

RESPUESTA

La función f tiene un valor máximo absoluto igual $\frac{1}{2}$ en los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

48) Una placa semicircular está definida por la región

$$R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1;\quad y\ge 0;\quad x\ ,y\in\mathbb{R}\}$$

La temperatura *T*, en grados centígrados, en cualquier punto $P(x,y)$ de la placa, está dada por $T(x,y)=2x^2+y^2-y$. Calcular las coordenadas de los puntos de mayor y menor temperatura.

RESPUESTA

El punto de menor temperatura es $\left(0\ ,\ \frac{1}{2}\right)$ con – *0.25°C* y los puntos $(-1\ ,0)$ y $(\ 1\ ,0)$ son los de mayor temperatura. La mayor temperatura es igual a *2°C*.

49) Determinar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función $f(x,y)=x^2-x+2y^2$ cuyo dominio se restringe a $D_f=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

RESPUESTA

El máximo absoluto es $\frac{9}{4}$ y se presenta en los puntos $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y el mínimo absoluto es $-\frac{1}{4}$ y se presenta en el punto $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$.

50) Para la función $f\left(x,y\right)=x\,ang\,tan(y)$, obtener sus puntos críticos y determinar la naturaleza de cada uno de ellos.

RESPUESTA
En $A\left(0\ ,\ 0\right), f$ presenta un punto silla .

51) Determinar los valores extremos de la función $f\left(x,y\right)=xy$ en la región $R=\left\{\left(x,y\right)|\ x^2+y^2\le a^2,\quad \text{para}\quad f\left(x,y\right)>0\right\}$.

RESPUESTA
Máximos absolutos en $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\ ,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ y $B\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, y su valor es $\frac{a^2}{2}$.

52) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y)=x^2+2y^2-2x-4y+3$ en la región $R:\ (x-1)^2+(y-1)^2\le 1$.

RESPUESTA
Mínimo relativo y absoluto = 0 en PC(1,1).
Máximo absoluto = 2 en A(1,0) y en B(1,2).