SERIE # 2

CÁLCULO VECTORIAL

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 2

1) Calcular las coordenadas del punto P de la curva: $\bar{r}\left(t\right)=\left(1-2\ t\right)i+(t^2)\,j+\left(2\,e^{2(t-1)}\right)k$ en el que el vector $\overline{r'}\left(t\right)$ es paralelo a $\bar{r}\left(t\right)$.

SOLUCIÓN

$P\left(-1, 1\ , 2\ \right)$

2) Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria cuya ecuación vectorial es $\bar{r}\left(t\right)=(e^t\cos t\,)\,i+(e^t sen\,t)\;j$, donde t es el tiempo. Demostrar que el ángulo entre el vector de posición y el vector velocidad es constante y determinar el valor de dicho ángulo.

SOLUCIÓN

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

3) Determinar una ecuación vectorial de la curva: $C:\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ 3-x=y \end{cases}$. Trazar la gráfica de C .

SOLUCIÓN

$\bar{r}=(3)\,i+(1)\,k$ y $\bar{r}=(3)\;j+(1)\,k$, dibujo a criterio del profesor.

4) Determinar si la curva de ecuación vectorial $\bar{r}\,(t)=(sen\,t)\,i+(\cos t)\,k$ está contenida en un plano.

SOLUCIÓN

La curva es plana.

5) Sea C la curva de ecuaciones paramétricas $x=t,\quad y=t^2,\quad z=\dfrac{2}{3}t^3$.

Calcular:

a) La curvatura de C
b) La torsión de C

SOLUCIÓN

$$\kappa = \frac{2}{4\,t^4 + 4\,t^2 + 1}$$

$$\tau = \frac{2}{4\,t^4 + 4\,t^2 + 1}$$

6) Sea la curva dada por $\bar{r}(t) = (t^3 - t^2)\,i + (t^2 + 2t^3)\,j + \left(3t^2\right)k$

a) Comprobar que dicha curva es plana.
b) Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene a dicha curva.

SOLUCIÓN
a) A criterio del profesor.
b) $2x - y + z = 0$

7) Sea C la curva c: $\bar{r}(t) = (2+t)i + (1+t^2)\,j + (3t+t^2)k.$ Determinar si la curva es plana; en caso afirmativo, obtener la ecuación cartesiana del plano que la contiene.

SOLUCIÓN
La curva C es plana y está contenida en el plano $z = 3x + y - 7.$

8) Dada la curva C cuya ecuación vectorial es obtener las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura de C en el punto: $\bar{r}(t) = \left(2t - \frac{2}{3}t^3\right) i + \left(2t^2\right)\, j + \left(2t + \frac{2}{3}t^3\right) k$

Obtener las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura de C en el punto $P\left(\frac{4}{3}\,,\,2\,,\,\frac{8}{3}\right)$.

SOLUCIÓN

$$C\left(-\frac{20}{3}\,,\,2\,,\,\frac{8}{3}\right)$$

9) Calcular el radio de curvatura del tiro parabólico en el punto más alto. La ecuación de la posición de la partícula es: $\bar{r}(t) = \left(4+6t\right)i + \left(6+8t-5t^2\right)j$.

SOLUCIÓN

$\rho = \frac{36}{10} = 3.6$

10) Sea la curva *C* de ecuación vectorial $\bar{r}(t) = \left(\frac{1}{2}e^t sen\, t\right)i - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^t\right)j + \left(\frac{1}{2}e^t \cos t\right)k$.

a) Obtener la ecuación vectorial de *C* en términos de su longitud de arco *s* de modo que cuando *s=1* se tiene que *t=0.*
b) Calcular el vector tangente unitario a la curva *C* en el punto $t = \pi$.

SOLUCIÓN

a) $\bar{r}(s) = \left(\frac{s}{2} sen(\ln s)\right)i - \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)j + \left(\frac{s}{2}\cos(\ln s)\right)k$

b) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$

11) La ecuación vectorial de una curva C, que se genera por la intersección de un cilindro parabólico y un plano, está dada por: $\bar{r}(t) = \left(2 - \frac{t^2}{3} + \frac{t}{2}\right)i + t^2 j + t\,k$

a) Obtener las ecuaciones de las superficies citadas.
b) Obtener el vector normal principal a $\bar{r}(t)$ cuando $\frac{d\bar{r}}{dt} = -\frac{1}{6}i + 2j + k$.
c) La ecuación del plano osculador para la condición anterior.

SOLUCIÓN

a) Ecuación del plano: $6x + 2y - 3z = 12$. Ecuación del cilindro: $y = z^2$.

b) $\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{48^2 + 33^2 + 74^2}}(-48\,i + 33j - 74\,k)$

c) $6x + 2y - 3z = 12$

12) Sea la curva $C : \bar{r}(s) = (-sen\,(s),\ 0,\ \cos(s))$, donde s es el parámetro longitud de arco. Determinar, para el punto $P(0,0,-1)$ que pertenece a la curva:

a) Los vectores $\overline{T}, \overline{N}$ y $\overline{B}$.
b) La curvatura y la torsión de la curva.
c) La ecuación cartesiana del plano osculador.

SOLUCIÓN

a) $\overline{T}(1,0,0)$, $\overline{N}(0,0,1)$, $\overline{B}(0,-1,0)$.
b) $k=1$, $\tau=0$.
c) Plano osculador: $y=0$.

13) Sea C la curva cuya ecuación vectorial es
$\overline{r}(t)=\left(2t^2+2\right)i+\left(at^3-t^3\right)j+\left(t^4+t^2+4\right)k$.

a) Determinar el valor de la constante a de modo que C sea plana.
b) Calcular la curvatura de C en el punto donde $t=1$.

SOLUCIÓN

a) $a=1$
b) $\dfrac{4}{13\sqrt{13}}$

14) Sea C la curva cuya ecuación vectorial es: $\overline{r}(t)=t\,i+t^2\,j+t^3k$.

a) Calcular la curvatura y torsión de la curva C en el punto $P(2,4,8)$.
b) Determinar si la curva C es plana.

SOLUCIÓN

a) $\kappa=\dfrac{\sqrt{724}}{\left(\sqrt{161}\right)^3}$; $\tau=\dfrac{3}{181}$

b) La curva no es plana.

15) Calcular la curvatura de la hélice circular $\overline{r}(t)=a\cos t\;i+a\,\mathrm{sen}\,t\;j+bt\;k$ para $a>0$.

SOLUCIÓN

$$\kappa=\frac{a}{a^2+b^2}$$

---

16) La ecuación vectorial de una curva C está dada por: $\bar{r}(t) = t\ i + t^2 j + \left(4 - t^2 + t\right)k$.

a) Obtener el vector normal $\bar{\mathrm{N}}$.
b) Determinar si la curva es plana y en caso afirmativo obtener la ecuación del plano que la contiene.

SOLUCIÓN

a) $\bar{\mathrm{N}} = \dfrac{(1-4t)i + (2-2t)\,j + (-2t-1)k}{\sqrt{24t^2 - 12t + 6}}$

b) Plano osculador $x - y - z + 4 = 0$.

---

17) Demostrar que $\dfrac{d\,\bar{\mathrm{T}}}{d\,s} \cdot \dfrac{d\,\bar{\mathrm{B}}}{d\,s} = -\kappa\,\tau$.

SOLUCIÓN

A criterio del profesor.

---

18) Calcular la curvatura de la elipse de ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN

$$\kappa = \frac{a^4 b^4}{\left(a^4 y^2 + b^4 x^2\right)^{3/2}} .$$

---

19) Sea la curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ y = x \end{cases}$. Determinar los vectores $\bar{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathrm{B}}$, y $\bar{\mathrm{N}}$, así como la curvatura y la torsión de la curva, para el punto $P(\ 1, 1, 2\ )$.

SOLUCIÓN

$\bar{\mathrm{T}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{1}{\sqrt{18}}, \dfrac{4}{\sqrt{18}}\right)$; $\bar{\mathrm{N}} = \left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$; $\bar{\mathrm{B}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; $\kappa = \dfrac{2}{27}$; $\tau = 0$.

---

20) Sea la curva C representada por:

$$C:\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 4 - z \end{cases}$$

Determinar, para el punto $P(\,0,0,4)$:

a) Los vectores $\overline{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathrm{N}}$ y $\overline{\mathrm{B}}$.
b) La curvatura y la torsión.
c) La ecuación cartesiana del plano oscular y la del plano rectificante.

SOLUCIÓN

a) $\overline{\mathrm{T}} = \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$; $\quad \overline{\mathrm{N}} = (\,0,\,0,-1)$; $\quad \overline{\mathrm{B}} = \dfrac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}$

b) $\kappa = 2;\quad \tau = 0$

c) plano oscular: $x = y$; plano rectificante: $z = 4$

---

21) Sea la curva C representada por: $\bar{r}(t) = (t - sen\, t)\, i - (\cos t)\, j$

Determinar:

a) El triedro móvil de vectores $\left(\bar{T}, \bar{N}\ y\ \bar{B}\right)$ en el punto $P(\pi, 1)$.
b) Si $\bar{r}(t)$ es una función vectorial de módulo constante.
c) La longitud de la curva entre los puntos $A(0,-1)$ y $B(2\pi,-1)$.

SOLUCIÓN

a) $\bar{T} = i,\ \bar{N} - j,\ \bar{B} = -k.$
b) $\bar{r} \square \dfrac{d\,\bar{r}}{d\,t} \neq 0 \therefore \bar{r}(t)$ no es módulo constante.
c) 4 u. de longitud

---

22) Sea la curva C: $\bar{r} = (r)\bar{e}_r + (6)\bar{e}_z$ en coordenadas cilíndricas circulares. Determinar si la curva es plana; en caso afirmativo, determinar la ecuación del plano que la contiene.

SOLUCIÓN

C es plana y está contenida en el plano $z = 6$.

---

23) Sea la curva C: $\bar{r}(s) = (sen\ s,\ 3, \cos\ s)$, donde "s" es el parámetro longitud de arco. Determinar, para el punto $P(-1,3,0)$:

a) Los vectores $\bar{T}$, $\bar{N}$ y $\bar{B}$.
b) La curvatura y la torsión.
c) La ecuación cartesiana del plano osculador.
d) Las coordenadas del centro de curvatura.
e) Unas ecuaciones cartesianas de la circunferencia de curvatura.

SOLUCIÓN

a) $\bar{T} = (0,0,1)$, $\bar{N} = (1,0,0)$, $\bar{B} = (0,1,0)$.

b) $k = 1$, $\tau = 0$.

c) Plano osculador: $y = 3$.

d) $C(0,3,0)$

e) $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ *o* $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

---

24) La posición de una partícula en movimiento está dada por: $\bar{r}(t) = 2t\ i - 3t^2\ j + \frac{3}{2}\ k$ donde *t* es tiempo. Obtener para el instante *t = 0.25* segundos:

a) El vector velocidad $(\bar{v})$ de la partícula,

b) El vector tangente unitario $(\bar{\mathrm{T}})$ a la trayectoria de la partícula.

c) El vector aceleración tangencial $(\bar{a}_T)$ de la partícula.

d) El vector aceleración normal $(\bar{a}_N)$ de la partícula.

SOLUCIÓN

a) $\bar{v} = 2i - \frac{3}{2}j$ b) $\bar{T} = \frac{2}{5}\left(2i - \frac{3}{2}j\right)$ c) $\bar{a}_T = \frac{72}{25}i - \frac{54}{25}j$ d) $\overline{a_n} = -\frac{72}{25}i - \frac{96}{25}j$

---

25) La trayectoria de una partícula esta dada por la expresión $\bar{r} = t^2\ i - t\ j + t^3 k$ donde *t* es el tiempo. Calcular las componentes tangencial y normal de su aceleración en el punto donde *t = 1*.

SOLUCIÓN

$\bar{a} = 5.88\,\overline{\mathrm{T}} + 2.33\,\overline{\mathrm{N}}$; $a_T = 5.879747$, $a_N = 2.329929$.

26) Una partícula se desplaza a lo largo de la curva:

$C : \bar{r}(t) = (\cos\ t + sen\,t)\,i + (sen\,t - \cos t)\,j$; $t \geq 0$

Determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

SOLUCIÓN

$a_T = 0$; $a_N = \sqrt{2}$

27) Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $C : x^2 - y^2 = 1$, con $x < 0$. Calcular los vectores aceleración normal y aceleración tangencial en el punto $P(-1, 0)$.

SOLUCIÓN

$\bar{a}_T = \bar{0}$, $\bar{a}_N = (-1, 0)$.

28) Una partícula se desplaza a lo largo de una curva C: $\bar{r}(t) = \left(te^t\right)\mathbf{i} + \left(e^t\right)\mathbf{j} + \left(e^t\right)\mathbf{k}$, donde t es el tiempo. Calcular para el punto $P(e, e, e)$:

a) Los vectores aceleración normal y aceleración tangencial.

b) Los vectores $\bar{T}$ y $\bar{N}$.

SOLUCIÓN

a) $\bar{a}_T = \dfrac{(8e, 4e, 4e)}{3}$, $\bar{a}_N = \dfrac{(e, -e, -e)}{3}$

b) $\bar{T} = \dfrac{(2,1,1)}{\sqrt{6}}$, $\bar{N} = \dfrac{(1,-1,-1)}{\sqrt{3}}$.

29) Una partícula se desplaza a lo largo de la curva C representada por $\bar{r} = \bar{r}(t)$, donde t es el tiempo. Si en el instante $t = t_0$ la rapidez es mínima, el módulo de la velocidad es igual a 1 y $\bar{a} = (0,1,0)$, calcular la curvatura de la curva C en el punto para el cual $t = t_0$.

SOLUCION
$k = 1.$

---

30) La trayectoria de una partícula está dada por $\bar{r}(t) = (t)\,\boldsymbol{i} + (t^2)\,\boldsymbol{j} + (4)\boldsymbol{k}$, donde t es el tiempo. Determinar las coordenadas del punto P en el cual las componentes normal y tangencial de la aceleración son iguales entre sí**.**

SOLUCIÓN
$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 4\right)$

---

31) Calcular el ángulo de intersección entre las superficies:

$S_1 : 5x - y - 3z^2 = 0$ y $S_2 : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{uv}{4u - v} \end{cases}$

en el punto $A(1,2,1)$.

SOLUCIÓN
$\theta = 90°$

---

32) Sean la parábola *C* y la superficie *S* definidas por las ecuaciones

$$C : \bar{r}_1(t) = \left(t^2 - 2t + 1\right)\mathbf{i} + \left(t\right)\mathbf{k}$$
$$S : \bar{r}_2\,(u,v) = \left(\sec(u)\cos(v)\right)\mathbf{i} + \left(\tan(u)\right)\mathbf{j} + \left(\sec(u)sen(v)\right)\mathbf{k}$$

El punto de intersección de *C* con *S* es el vértice de la parábola. Determinar el ángulo de intersección entre la curva *C* y la superficie *S*.

SOLUCIÓN
$\theta = 90°$

---

33) Calcular el ángulo α de intersección entre la superficie *S* y la curva *C*, cuyas ecuaciones vectoriales son:

$S:\ \bar{r}_1(u,v)=(u+2v)i+(5uv)\,j+(v-2u)k$

$C:\bar{r}_2(t)=(3-3t)i+\left(5-5t-10t^2\right)j+(-4t-1)k$

en el punto donde $v=1$.

SOLUCIÓN

$\alpha=0°$.

34) Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie cuya ecuación vectorial es $\bar{r}(u,v)=(v^3-u^2)\,\boldsymbol{i}+(3v-2u)\,\boldsymbol{j}+(uv+2v)\boldsymbol{k}$, en el punto $P(-1,-2,0)$.

SOLUCIÓN

35) Sea: $\bar{r}(s,t)=(2s)i+(sen\,t+2s\cos t)\,j+(\cos t-2s\ sen\,t)k$ una ecuación vectorial de la superficie S.

a) Identificar la superficie *S*.
b) Obtener una ecuación vectorial del plano tangente a *S* en el punto $P\left(1,\sqrt{2},0\right)$.

SOLUCIÓN

a) Hiperboloide de un manto.
b) $-2x+2\sqrt{2}y=2$.

36) La superficie S: $\bar{r}(u,v)=(\sec u\cos v)\boldsymbol{i}+(\tan u)\,\boldsymbol{j}+(\sec u\ sen\,v)\boldsymbol{k}$ y la recta $L:\ \bar{r}(t)=(1+t)\,\boldsymbol{i}+(1-t)\,\boldsymbol{j}+(t+1)\boldsymbol{k}$ se intersecan en el punto $P(1,1,1)$. Calcular el ángulo que forman la recta L y la superficie S.

SOLUCIÓN

$\theta=90°$

37) Dadas las superficies de ecuaciones vectoriales
$S_1 : r(s,t) = (s\cos t)i + (s\,sen\,t)j + (s^2)k,\quad S_2 : r(u,v) = (3\cos u)i + (3\,sen\,u)j + (v)k$.
Obtener los vectores $\overline{\text{T}}$, $\overline{\text{N}}$ y $\overline{\text{B}}$ de la curva de intersección de S_1 y S_2 en el punto $(3,0,9)$.

SOLUCIÓN
$\overline{\text{T}} = j;\quad \overline{\text{N}} = -i;\quad \overline{\text{B}} = k$.

38) Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de ecuaciones paramétricas. $S : \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ \alpha x - \alpha y - z = 1 \end{cases}$ en el punto $(1, 3, -3)$.

SOLUCIÓN
$x - 3y - 3z - 1 = 0$

39) Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie S cuya ecuación vectorial es $\overline{r}(u,v) = (\cos u\,sen\,v)i + (sen\,u\,sen\,v)j + (\cos v)k$ con $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$ en el punto donde: $u = \pi,\quad v = \dfrac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN
$x - z + \sqrt{2} = 0$

40) Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación vectorial $\overline{r}(u,v) = \big(u\,sen(u)\cos(v)\big)i + \big(u\cos(u)\cos(v)\big)j + \big(u\,sen(v)\big)k$ en el punto $P(0,\pi,0)$.

SOLUCIÓN
$x - \pi y + \pi^2 = 0$.

41) Sea la curva C que resulta de la intersección entre las superficies $S_1 : \overline{r}(s,t) = (s+t)i + (4st)j + (s-t)k$ y $S_2 : \overline{r}(u,v) = (u)i + (v)j + (2)k$.

a) Identificar las superficies.
b) A partir de las ecuaciones vectoriales de S_1 y S_2, determinar la ecuación cartesiana del plano normal a la curva C, en el punto $P(0,-4,2)$.

SOLUCIÓN

a) S_1: paraboloide hiperbólico; S_2: plano horizontal
b) $x = 0$

---

42) Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie representada por $\bar{r}(u,v) = (u+v+1)i + (2u+3v)j + (u+2v-2)k$, en el punto para el cual $u = 2$ y $v = 1$.

SOLUCIÓN

$x - y + z + 1 = 0$.

---

43) Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de ecuación $\bar{r}(s,t) = (2(s+t))i + (2(s-t))j + (16st)k$ en el punto $P(2,-2,0)$.

SOLUCIÓN

$4x + 4y - z = 0$.

---

44) Demostrar que las superficies $S_1 : x - 2y + 3z = 0$ y $S_2 : \bar{r}(\theta,\phi) = (6\cos\theta\, sen\,\phi, 6\, sen\,\theta\, sen\,\phi, 6\cos\phi)$ se intersecan en ángulo recto.

SOLUCIÓN

A criterio del profesor.

---

45) Determinar la expresión en coordenadas cilíndricas del vector de posición de cualquier punto de la superficie: $x^2 + y^2 = r^2$.

SOLUCIÓN

$\bar{r} = (r)\hat{e}_r + (z)\hat{e}_z$

---

46) Sea la transformación $T : \begin{cases} u = y - x \\ v = x + y \end{cases}$

a) Determinar si el sistema de coordenadas (u,v) es ortogonal.
b) Obtener los factores de escala h_u y h_v.

c) Determinar si el campo vectorial $\overline{F}(u,v)=(uv)\overline{e_u}+(2uv)\overline{e_v}$ es conservativo.
d) Obtener los vectores unitarios $\overline{e_u}$ y $\overline{e_v}$.
e) Transformar el vector $\overline{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ a la base $\{\overline{e_u},\overline{e_v}\}$.

SOLUCIÓN

a) Sí es ortogonal.
b) $h_u=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ h_v=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
c) $\overline{F}$ es conservativo.
d) $\overline{e}_u=\dfrac{(-1,1)}{\sqrt{2}},\ \overline{e}_v=\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}$
e) $\overline{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}=\sqrt{2}\ \overline{e}_u$

47) Sea la transformación $T:\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+y\end{cases}$

a) Determinar si el sistema de coordenadas (u,v) es ortogonal.
b) Obtener las ecuaciones para la transformación inversa.
c) Calcular los factores de escala h_u y h_v .
d) Obtener los vectores unitarios $\boldsymbol{\overline{e}_u}$ y $\boldsymbol{\overline{e}_v}$.

SOLUCIÓN

a) No es ortogonal.
b) $\begin{cases}x=\dfrac{u+2v}{3}\\ y=\dfrac{v-u}{3}\end{cases}$
c) $h_u=\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ h_v=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

d) $\bar{e}_u = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$, $\bar{e}_v = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$

---

48) Sea el sistema de coordenadas curvilíneas (u , v), el cual está referido al sistema cartesiano (x , y) por medio de las relaciones:

$u = -4x + 3y$

$v = 3x + 4y$

a) Verificar que el sistema (u,v) sea ortogonal.
b) Calcular los vectores unitarios $\hat{e}_u$ y $\hat{e}_v$.
c) Calcular los factores de escala h_u y h_v .
d) Calcular $J\left|\frac{x,y}{u,v}\right|$.

SOLUCIÓN

a) A criterio del profesor.
b) $\hat{e}_u = -\frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j$; $\hat{e}_v = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$
c) $h_u = \frac{1}{5}$, $h_v = \frac{1}{5}$
d) $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{25}$

---

49) Considere el sistema de coordenadas curvilíneas definido por las ecuaciones

$u = 3x + y$

$v = x - 3y$

a) determinar si el sistema es ortogonal.
b) Calcular los vectores unitarios $\bar{e}_u$ y $\bar{e}_v$.
c) Calcular los factores de escala.
d) Determinar los jacobianos de la transformación $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ y $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$

SOLUCIÓN

a) Sí es ortogonal.
b) $\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{10}}(3i + j)$; $\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{10}}(i - 3j)$

c) $h_u = \dfrac{1}{\sqrt{10}}, \quad h_v = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

d) $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{10}; \quad J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right) = 10$

---

50) Sea la transformación dada por

$u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y), \quad v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$

a) Obtener el jacobiano de la transformación $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$

b) Determinar las ecuaciones de la transformación inversa.

c) Dibujar en un plano *UV* la imagen de la región del plano *XY* limitada por las rectas $x=0, \; x=1 \quad y=0, \quad y=1$.

SOLUCIÓN

a) $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = 1$

b) $x = \dfrac{u+v}{\sqrt{2}}; \quad y = \dfrac{v-u}{\sqrt{2}}$

c) A criterio del profesor.

---

51) Dadas las ecuaciones de transformación $\begin{array}{l} x+y=u+v \\ x-y=2u+v \end{array}$

a) Calcular los jacobianos $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$ y $J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right)$

b) Sea la región R del plano *XY* limitada por las rectas $x=0, \quad y=x-2, \quad y=1$ Determinar la región R´ del plano UV en que se transforma R y representar gráficamente a R y R´.

SOLUCIÓN

a) $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = \dfrac{1}{2}; \quad J\left(\dfrac{u,v}{x,y}\right) = 2$

b) A criterio del profesor.

52) Sea la transformación $T:\begin{cases} u = 2x \\ v = 2y - x^2 \end{cases}$ y sea la región R del plano XY limitada por las curvas $x = 1,\ \ 2y = 1 + x^2$ y $2y = x^2 - 2x$.

a) Determinar si el sistema de coordenadas (u, v) es ortogonal.
b) Graficar la región *R* del plano *XY*.
c) Graficar la región *R´* del plano *UV*, que es la región en la cual se transforma la región R bajo la transformación *T*.
d) Calcular el jacobiano: $J\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right)$.
e) Calcular el área de la región *R*.

SOLUCIÓN

a) A criterio del profesor.
b) A criterio del profesor.
c) A criterio del profesor.
d) $J\left(\dfrac{x, y}{u, v}\right) = \dfrac{1}{4}$.
e) El área de la región R es $\dfrac{9}{8}$ unidades.

53) Dadas las ecuaciones de transformación $x = uv\cos\phi;\quad y = uv\,sen\phi;\quad z = \dfrac{u^2 - v^2}{2}$

a) Obtener los factores de escala h_u , h_v , h_ϕ .
b) Obtener los vectores unitarios $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$, $\hat{e}_\phi$.
c) Determinar si el sistema curvilíneo es ortogonal.
d) Obtener el jacobiano de la transformación $J\left(\dfrac{x, y, z}{u, v, \phi}\right)$.

SOLUCIÓN

a) $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2};\quad h_\phi = uv$

$$\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(v\cos\phi\ i + v\,\text{sen}\,\phi\ j + u\ k\right);$$

b) $$\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(u\cos\phi\ i + u\,\text{sen}\,\phi\ j - v\ k\right);$$

$$\hat{e}_\phi = -\text{sen}\,\phi\ i + \cos\phi\ j$$

c) A criterio del profesor.

d) $J\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,\phi}\right) = u^3 v + u v^3$

---

54) Sea la transformación:

$$T:\begin{cases} u = 3x + 4y \\ v = 4x - 3y \end{cases}$$

y sea R_{uv} la región del plano UV limitada por las gráficas de $u=0$, $u=10$, $v=1$ y $v=6$.

a) Determinar si el sistema de coordenadas (u,v) es ortogonal.

b) Trazar la gráfica de la región R_{xy}, que es la imagen de la región R_{uv} bajo la transformación T.

c) Calcular el Jacobiano de la transformación: $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$.

d) Calcular el área de la región R_{xy}.

SOLUCIÓN

a) Sí es ortogonal.

c) $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right) = -\dfrac{1}{25}$

d) Área de $R_{xy} = 2u^2$

---

55) Sea la transformación ortogonal

$$u = ax - 2y + z$$

$$v = 3x + by - 2z$$

$$w = x - y + cz$$

a) Determinar los valores de las constantes a, b y c.
b) Determinar los factores de escala h_u, h_v, y h_w.
c) Expresar a los vectores i, j y k referidos a la base $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w\}$.

SOLUCIÓN

a) $a = -16,\ b = -25,\ c = 14$

b) $h_u = \dfrac{1}{\sqrt{261}};\ h_v = \dfrac{1}{\sqrt{638}};\ h_w = \dfrac{1}{\sqrt{198}}$

c)
$$i = \frac{14}{\sqrt{261}}\hat{e}_u + \frac{3}{\sqrt{638}}\hat{e}_v + \frac{1}{\sqrt{198}}\hat{e}_w$$
$$j = -\frac{2}{\sqrt{261}}\hat{e}_u - \frac{25}{\sqrt{638}}\hat{e}_v - \frac{1}{\sqrt{198}}\hat{e}_w$$
$$k = \frac{1}{\sqrt{261}}\hat{e}_u - \frac{2}{\sqrt{638}}\hat{e}_v + \frac{14}{\sqrt{198}}\hat{e}_w$$

---

56) Sea la transformación $T: \begin{cases} u = x + 5y + 6 \\ v = 5x - y - 2 \end{cases}$

a) Determinar si el sistema de coordenadas (u, v) es ortogonal.
b) Calcular los factores de escala h_u y h_v.
c) Obtener los vectores base $\hat{e}_u$ y $\hat{e}_v$.
d) Calcular el área de la región limitada por la elipse de la ecuación $(x+5y+6)^2 + (5x-y-2)^2 = 100$ (este inciso corresponde al tema 4).

SOLUCIÓN

---

57) Sea la transformación

$$T: \begin{cases} x = u + v + w \\ y = u - 2w \\ z = u - v + w \end{cases}$$

e) Determinar si el sistema de coordenadas (u,v,w) es ortogonal.
f) Calcular los factores de escala h_u, h_v y h_w.
g) Obtener los vectores unitarios $\bar{e}_u$, $\bar{e}_v$ y $\bar{e}_w$.
h) Expresar al conjunto de vectores $\{i, j, k\}$ en términos de los vectores $\bar{e}_u$, $\bar{e}_v$ y $\bar{e}_w$.

SOLUCIÓN

---

58) Expresar el campo vectorial $\overline{F}(x, y) = \left(x^3 + xy^2 + 2y\right)i + \left(x^2 y + y^3 - 2x\right)j$ en coordenadas polares.

SOLUCIÓN
$\overline{F}\left(r, \theta\right) = (r^3)\,\hat{e}_\rho - (2r)\,\hat{e}_\theta$.

---

59) Para el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ obtener una ecuación vectorial de la superficie en coordenadas cilíndricas así como su correspondiente diferencial de área.

SOLUCIÓN
$d\,S = \rho\sqrt{5}\;d\rho\;d\theta$

---

60) Para las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son:

$S_1 : \phi = \dfrac{\pi}{4}$

$S_2 : \rho = 3$

Determinar :
a) El ángulo que formar S_1 y S_2 .
b) Unas ecuaciones de la curva de intersección entre S_1 y S_2.

SOLUCIÓN
a) 90°
b) $\phi = \dfrac{\pi}{4}; \quad \rho = 3$

otras son

$x^2+y^2=z^2; \quad x^2+y^2+z^2=9$

otras son

$z=\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}; \quad x^2+y^2=\dfrac{9}{2}$

---

61) Sea el sistema de coordenadas cilíndricas elípticas (u,v,z), definido por $x=a\cosh u\cos v, \quad y=a\,\text{senh}\,u\ \text{sen}\,v, \quad z=z$. Determinar si dicho sistema es ortogonal.

SOLUCIÓN
Sí es ortogonal.

---

62) Sean los campos vectoriales:

$\overline{F}(x,y,z)=\left(x^2-2yz\right)i+\left(xy^2\right)j+(x-z)k$ y $\overline{G}(x,y,z)=(2y)i+\left(z^2\right)j+(2x)k$

Obtener $\left(\overline{G}\cdot\nabla\right)\overline{F}$.

SOLUCIÓN
$\left(\overline{G}\cdot\nabla\right)\overline{F}=\left(-2z^3\right)i+\left(2y^3+2xyz^2\right)j+(2y-2x)k$.

---

63) Sean los campos vectoriales

$\overline{F}(x,y,z)=z\,i+x\,j+y\,k$

$\overline{G}(x,y,z)=(yz)i+(xz)j+(xy)k$

Verificar la validez de la expresión $div\left(\overline{F}\times\overline{G}\right)=\overline{G}\cdot rot\,\overline{F}-\overline{F}\cdot rot\,\overline{G}$.

SOLUCIÓN
A criterio del profesor

---

64) Sea el campo vectorial: $\overline{u}(x,y,z)=\left(x^2yz\right)i+\left(xy^2z\right)j+\left(xyz^2\right)k$. Determinar la divergencia y el rotacional de $\overline{u}$ en el punto $P(1,-1,3)$.

SOLUCIÓN
$\overline{\nabla}\cdot\overline{u}=-18$; $\overline{\nabla}\times\overline{u}=8i+8j$

65) Si $\overline{v}=\overline{w}\times\overline{r}$, verificar que: $\overline{w}=\frac{1}{2}rot\,\overline{v}$ siendo $\overline{w}$ un vector constante.

SOLUCIÓN
A criterio del profesor.

66) Dada la función vectorial

$$\overline{u}=\left(6xy-y^2\,\text{sen}\,xy^2+z^2\right)i+\left(3x^2-2xy\,\text{ sen}\,xy^2\right)j+\left(xz^2\right)k$$

Determinar la divergencia y el rotacional de la función.

SOLUCIÓN

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{u}=6y-y^4\cos\left(xy^2\right)-2x\,\text{sen}\left(xy^2\right)-4x^2y^2\cos\left(xy^2\right)+2xz$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{u}=\left(2z-z^2\right)j$$

67) Determinar si el campo vectorial $\overline{F}\left(x,y,z\right)=\left(yz\cos xy\right)i+\left(xz\cos xy\right)j+\left(sen\;xy\right)k$ es irrotacional.

SOLUCIÓN
$\overline{F}$ es irrotacional.

68) Obtener la divergencia del rotacional del campo vectorial:

$$\overline{u}=\left(x\,z\,e^{-y}\right)i+\left(\frac{y\,z}{x}\right)j+\left(x\,y^2z^3\right)k\ .$$

SOLUCIÓN

$$\overline{\nabla}\cdot\left(\overline{\nabla}\times\overline{u}\right)=0$$

69) Dada la función vectorial $\overline{u}=\left(6xy-y^2\,\text{sen}\,xy^2+z^2\right)i+\left(3x^2-2xy\,\text{sen}\,xy^2\right)j+\left(2xz\right)k$
Determinar la divergencia y el rotacional de la función.

SOLUCIÓN

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{u}=6y-y^4\cos\left(xy^2\right)-2x\,\text{sen}\left(xy^2\right)-4x^2y^2\cos\left(xy^2\right)+2x$$

$$\overline{\nabla}\times\overline{u}=\overline{0}$$

---

70) Calcular todos los valores de las constantes α y β de modo que el campo:
$\overline{F}(x,y,z)=\left(-\alpha^2 x+z+2\right)i+\left(\beta z-\alpha\beta y\right)j+\left(\alpha^2 x+\alpha y-2\alpha z\right)$
sea solenoidal e irrotacional.

SOLUCIÓN
$\alpha=-1;\quad \beta=-1$

---

71) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}\right)$, con $(x,y,z)\neq(0,0,0)$. Utilizar coordenadas esféricas para determinar si el campo $\overline{F}$ es:

a) Solenoidal.
b) Irrotacional.

SOLUCIÓN

a) $\overline{F}$ sí es solenoidal.
b) $\overline{F}$ sí es irrotacional.

---

72) Para el campo vectorial $\overline{R}(x,y,z)=\left(y^3-3z^2y\right)i+\left(z^3-3zx^2\right)j+\left(3x^2y-y^3\right)k$ calcular:

a) La divergencia de $\overline{F}$.
b) El rotacional de $\overline{F}$.
c) El laplaciano de $\overline{F}$.
d) El gradiente de $\overline{F}$.

SOLUCIÓN

a) $\overline{\nabla}\cdot\overline{F}=0$

b) $\overline{\nabla}\times\overline{F}=\left(6x^2-3y^2-3z^2\right)i+\left(-6yz-6xy\right)j+\left(-6xz-3y^2+3z^2\right)k$

c) $\overline{\nabla}^2\,\overline{F}=\overline{0}$

d) $\overline{\nabla}\,\overline{F}=\begin{bmatrix} 0 & 3y^2-3z^2 & -6yz \\ -6xz & 0 & 3z^2-3x^2 \\ 6xy & 3x^2-3y^2 & 0 \end{bmatrix}$

---

73) Sea la función: $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}+Ln\left(y^2\right)+e^z$

a) Obtener f en función de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z).

b) Obtener $\overline{\nabla} f$ en coordenadas cilíndricas .

SOLUCIÓN

a) $f(r,\theta,z) = \dfrac{z}{r^2} + 2\ln r + 2\ln(\operatorname{sen}\theta) + e^z$

b) $\overline{\nabla} f = \left(\dfrac{-2z}{r^3} + \dfrac{2}{r} \right)\hat{e}_r + \left(\dfrac{2}{r}\cot\theta \right)\hat{e}_\theta + \left(\dfrac{1}{r^2} + e^z \right)\hat{e}_z$

74) Determinar un vector normal a la superficie $S:\ r = -4\cos\theta$ en el punto $P(-2,2,2)$.

La superficie S está dada en coordenadas cilíndricas y el punto P está en coordenadas cartesianas.
El vector normal debe estar en términos de los vectores unitarios $\overline{e_r}$, $\overline{e_\theta}$ y $\overline{e_z}$.

SOLUCIÓN

$\overline{n}\,|_p = (2\sqrt{2})\overline{e}_r - (2\sqrt{2})\overline{e}_\theta$

75) Utilizar coordenadas cilíndricas circulares para determinar el gradiente de la función $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

SOLUCION

$\overline{\nabla} f = \dfrac{(r)\overline{e}_r + (z)\overline{e}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$

76) Utilizar coordenadas esféricas para calcular: $\overline{\nabla}^2 \, ln\left| \overline{r} \cdot \overline{r} \right|$ donde $\overline{r} = x\,i + y\,j + z\,k$.

SOLUCIÓN

$\dfrac{2}{\overline{r} \cdot \overline{r}}$.

77) Dada la función $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 \right)^{3/2} + 2xy + e^z$, calcular el laplaciano de f en coordenadas cilíndricas circulares.

SOLUCIÓN
$\overline{\nabla}^2 f = 9r + e^z$

78) Sea la función $f(r,\theta) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$, dada en coordenadas polares. Determinar si la función f es armónica.

SOLUCIÓN
f es armónica.

79) Determinar si la función en coordenadas esféricas $f(\rho,\theta,\phi) = \frac{2}{\rho} + 4\theta$ es armónica.

SOLUCIÓN
Sí es armónica.

80) Determinar si la función $f(\rho,\theta,\phi) = \frac{1}{\rho}$, dada en coordenadas esféricas, es armónica.

SOLUCION
Sí es armónica**.**

81) Determinar si la función $f(r,\theta) = 4r^2 \operatorname{sen} 2\theta + r\cos\theta$ es armónica.

SOLUCIÓN
A criterio del profesor.

82) Sea la función: $f(x,y,z) = \frac{y}{x} z$ utilizar coordenadas esféricas para calcular $\overline{\nabla} f$.

SOLUCIÓN
$\overline{\nabla} f(r,\theta,\phi) = (\tan\theta\cos\phi)\hat{e}_r + \left(\sec^2\theta\,\cot\phi\right)\hat{e}_\theta - (\tan\theta\operatorname{sen}\phi)\hat{e}_\phi$

83) Sea el campo vectorial $\overline{F}(\rho,\theta,\phi) = (\rho)\overline{e}_\theta + (\rho sen\phi)\overline{e}_\phi$ en coordenadas esféricas. Obtener el rotacional de $\overline{F}$.

SOLUCIÓN
$\overline{\nabla}\,\mathrm{x}\,\overline{F} = (-\cot\phi)\overline{e}_\rho - (2sen\phi)\overline{e}_\theta + (2)\overline{e}_\phi$

84) Sea el campo $\overline{u} = \frac{2\cos\theta}{\rho^3}\hat{e}_\rho + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho^3}\hat{e}_\theta + 0\,\hat{e}_\phi$. Determinar si el campo $\overline{u}$ es solenoidal.

SOLUCIÓN

El campo $\overline{u}$ no es solenoidal

85) Calcular, en coordenadas polares, el gradiente de la función: $f(r,\theta) = 4r\cos\theta$.

SOLUCIÓN

$\overline{\nabla} f = (4\cos\theta)\hat{e}_r - (4\operatorname{sen}\theta)\hat{e}_\theta$

86) Determinar si el campo vectorial representado por

$\overline{F}(r,\theta,z) = (z\operatorname{sen}^2\theta)\hat{e}_r + (2z\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\hat{e}_\theta + (r\operatorname{sen}^2\theta)\hat{e}_z$

es irrotacional, donde $\overline{F}$ está expresado en coordenadas cilíndricas circulares.

SOLUCIÓN

El campo $\overline{F}$ si es irrotacional.