FACULTAD DE INGENIERIA

U N A M

SERIE # 3

CÁLCULO VECTORIAL

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 3

---

1) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (3x + yz)i + (2x + y^2)j + (xz)k$. Calcular $\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ a lo largo de la curva C: $\begin{cases} x = 2 + y \\ y = z^2 \end{cases}$, del punto $A(3, 1, 1)$ al punto $B(3, 1, -1)$.

SOLUCIÓN

$-\dfrac{4}{5}$

---

2) Sea el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y,z) = (3x + y^2)i + (x - z^2)j + (axz)k$. Calcular el valor de la constante a de modo que $\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ evaluada del punto $A(1, 1, 0)$ al punto $B(2, 1, 4)$ a lo largo de la recta que los une sea igual a 10.

SOLUCIÓN

$\dfrac{27}{80}$

---

3) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x, y, z) = x^2\, i + y^2\, j + z^2\, k$. Calcular $\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ a lo largo de la trayectoria del plano XY dada por $y^2 = x$, del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(2, \sqrt{2}, 0)$.

SOLUCIÓN

$\dfrac{2}{3}(4 + \sqrt{2})$

---

4) Calcular $\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r}$, donde $\overline{F}$ es el campo vectorial $\overline{F}(x, y, z) = (y)i + \left(x + e^z\right)j + \left(1 + ye^z\right)k$ y C es la circunferencia $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$

SOLUCIÓN

$\oint_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r} = 0$

---

5) Calcular $\int_C y\,dx - x\,dy$ donde C es la elipse $x = a\cos t$, $y = b\,sen\,t$, recorrida en sentido positivo.

SOLUCIÓN
$-2\pi ab$

---

6) Calcular la integral de línea $I = \int_C (3x-y)dx + (x+5y)dy$ sobre la circunferencia de ecuaciones $x = cost\;;\quad y = sent\;;\quad 0 \le t \le 2\pi$.

SOLUCIÓN
2π

---

7) Calcular $\oint_C \bar{F} \bullet d\,\bar{r}$, para el campo vectorial $\bar{F}(x,y) = (xy^2 + x^3)\mathrm{i} + (x^2y - 2x + y^3)\mathrm{j}$ y la curva $C: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3sent \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, recorrida en sentido negativo.

SOLUCION
$\oint_C \bar{F} \bullet d\,\bar{r} = 12\pi$

---

8) Calcular $\oint_C \bar{F} \bullet d\,\bar{r}$, para el campo vectorial $\bar{F}(x,y) = (x^3 + xy^2)\mathrm{i} + (y^3 + x^2y + 2x)\mathrm{j}$ y la curva $C: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2sent \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, recorrida en sentido negativo.

SOLUCION
$\oint_C \bar{F} \bullet d\,\bar{r} = -12\pi$

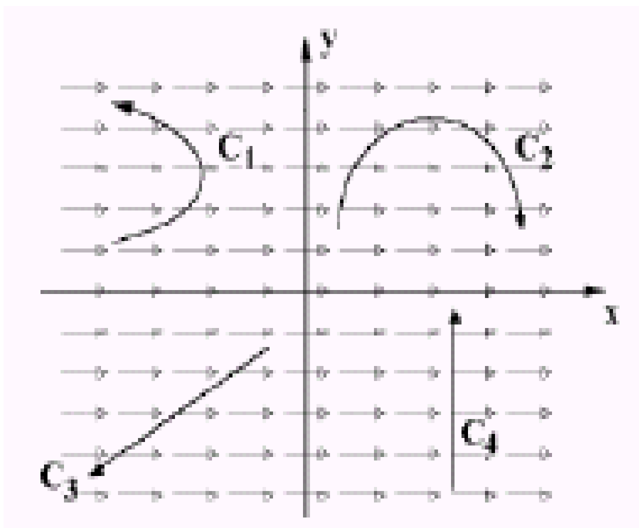
---

9) Calcular $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$ para el campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = (x+2y+4z)i + (2x-3y-z)\,j + (4x-y+2z)k$ y la trayectoria C formada por los segmentos de recta que unen al punto A(0,0,0) con B(1,0,0), B con C(1,0,1) y C con D(1,1,1).

SOLUCIÓN

$\int_C \overline{F} \cdot d\overline{r} = 5$

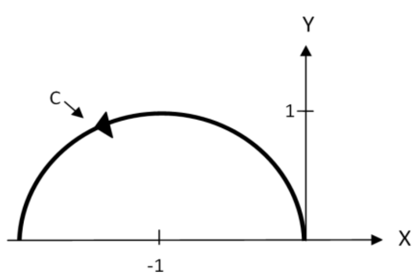
10) Para el campo vectorial $\overline{F}$ y las trayectorias C_1 , C_2 ,C_3 y C_4 que se muestran en la figura, indicar si el valor de $\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ sobre cada una de las curvas es positivo o es negativo. Justificar su respuesta.



SOLUCIÓN

A criterio del profesor.

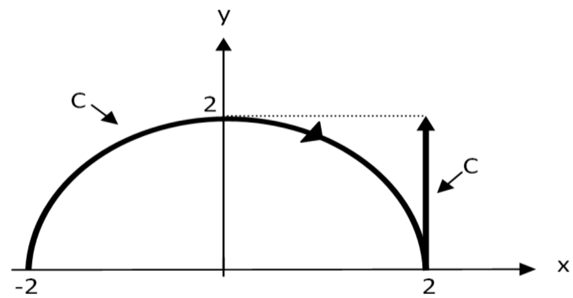
11) Calcular $\int_C \left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + dy$, donde C es el arco de circunferencia que se muestra en la figura:



SOLUCIÓN

$\int_C = 0$

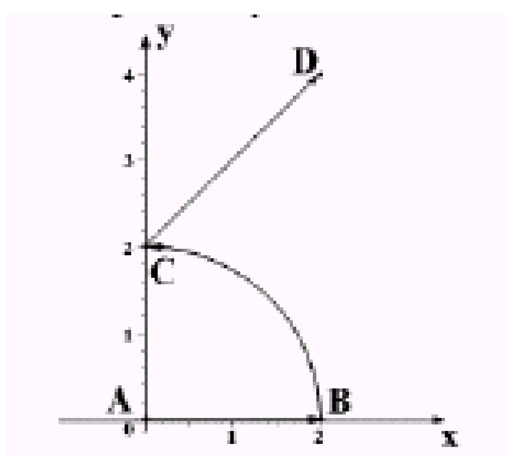
12) Calcular $\int_C \left(x^2 + y^2\right)\, dx + \left(y\right)\, dy$, donde C es la trayectoria que se muestra en la figura:



SOLUCIÓN

$\int_C = 18$

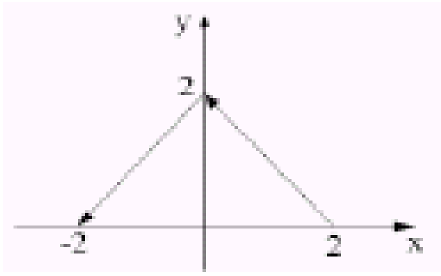
13) Calcular el trabajo que realiza el campo de la fuerza $\overline{F}(x,y) = (x^2 y)i + (y)j$, al mover la partícula a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura.



SOLUCIÓN

$\dfrac{52 - 3\pi}{3}$ u.t.

14) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y) = (4xy^2)i + (y + 2x^2)j$ al mover una partícula del punto $(2,\ 0)$ al punto $(-2,\ 0)$, a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura. Comente el resultado.



SOLUCIÓN
0; Comentario a criterio del profesor.

15) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y) = -e^{-y}i + e^{x}j$, cuando una partícula se mueve a lo largo de la curva C de ecuaciones; $x = 3\ln t, \quad y = \ln 2t,$ para $1 \le t \le 3$.

SOLUCIÓN
$\frac{23}{3}$ u.t.

16) Evaluar el trabajo realizado por el campo $\overline{F}(x,y) = yi + (y+1-x^2)j$ a lo largo de la trayectoria c, que consiste en los segmentos de recta que unen los puntos $(5,-1)$ con $(5,2)$ y luego $(5,2)$ con $(0,2)$.

SOLUCIÓN
$-\frac{161}{2}$ u.t.

17) Calcular el trabajo que desarrolla el campo de fuerzas $\overline{F} = z\,i + (x+6z)\,k$ para mover una partícula a lo largo de la curva C: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ x^2+z^2=y \end{cases}$ del punto $A(1,1,0)$ al punto $B(0,1,1)$.

SOLUCIÓN
3 u.t.

---

18) Calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\overline{F}(x, y, z) = z\,i + 3x\,j + 2xz\,k$ sobre una partícula que se desplaza del punto $P(0,0,0)$ al punto $Q(3,2,1)$ sobre la curva

C: $\begin{cases} x - 4z^2 + z = 0 \\ y - 2z^2 = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

$\dfrac{23}{2}$ u.t.

---

19) Calcular el trabajo realizado por el campo: $\overline{F}(x,y,z) = (e^{-y} - ze^{-x})i + (e^{-z} - xe^{-y})j + (e^{-x} - ye^{-z})k$ al desplazar una particular desde el punto $A(0,0,0)$ hasta el punto $B(1,1,1)$, a lo largo de la curva cuya ecuación vectorial es $\overline{r}(t) = (t)\,i + (t^2)\,j + (t^3)\,k$.

SOLUCIÓN

$\dfrac{3}{e}$ u.t.

---

20) Calcular el trabajo efectuado para desplazar una partícula en el campo de fuerzas representado por $\overline{F}(x,y,z) = (x)i + (y)j + (z)k$, a lo largo de la curva C de ecuaciones $x = \sqrt{5}cost, \quad y = -2\sqrt{5}cost, \quad z = 5sent$, desde el punto para el cual $t = 0$ hasta el punto determinado por $t = \pi$. Explique el porqué del resultado.

SOLUCIÓN

0 u.t. Explicación a criterio del profesor.

---

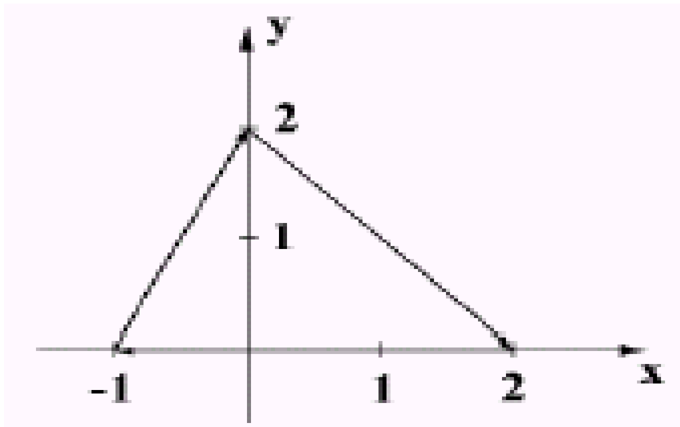
21) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y,z) = (3y)i - (4z)j + (6x)k$ cuando una partícula se desplaza a lo largo de la elipse C de ecuaciones $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ z = 4 \end{cases}$, del punto $A(3,0,4)$ al punto $B(0,2,4)$, siguiendo un sentido de recorrido contrario al de las manecillas del reloj.

SOLUCIÓN

$-\dfrac{9\pi}{2} - 32$ u.t.

---

22) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y)=(x^3+2y)i+(y^2+4x)j$ al mover una partícula a lo largo de la trayectoria cerrada mostrada en la figura.



SOLUCIÓN
-6 u.t.

23) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}=(xz)i+(xy)j+(zy)k$ cuando una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria cerrada definida por la intersección de las superficies $z=4-x^2,\quad x=0,\quad z=0,\quad y=-3,\quad y=4$.

SOLUCIÓN
63 u.t.

24) Sea el campo vectorial cuya ecuación es: $\overline{F}(x,y,z)=\dfrac{e^z y}{1+x^2y^2}i+\dfrac{e^z x}{1+x^2y^2}j+(e^z ang\tan xy)k$ Calcular $\int_C \overline{F}\bullet d\,\overline{r}$ a lo largo de una vuelta completa a la curva de ecuaciones $x^2+z^2=16,\quad x+y+z=10$.

SOLUCIÓN
0.

25) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y,z)=(cosy-y^2senx-z^2)i+(-x\,seny+2y\,cosx-2)j+(1-2xz)k$

al mover una partícula a lo largo de la curva C: $\begin{cases} y = -x \\ z = sen\left(\dfrac{y}{2}\right) \end{cases}$ del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(-\pi, \pi, 1)$.

SOLUCIÓN
$-\pi^2 + 1$

26) Sea el campo conservativo $\bar{v} = \left(\dfrac{2}{z} + 2x\right) i + (4\,sen\,y - z^2 sec^2 y)\; j + \left(-2z\,\tan y - \dfrac{2x}{z^2}\right) k$. Determinar su correspondiente función potencial.

SOLUCIÓN
$\phi(x,y,z) = \dfrac{2x}{z} + x^2 - 4\cos y - z^2 \tan y + C$.

27) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (x + 2y + \alpha z)i + (\beta x - 3y - z)\,j + (4x + \gamma y + 2z)k$ donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Determinar los valores de α, β, γ para los cuales $\overline{F}$ es conservativo.

b) Obtener una función potencial del campo conservativo $\overline{F}$.

SOLUCIÓN
a) $\alpha = 4,\; \beta = -1,\; \gamma = 2.$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - \dfrac{3y^2}{2} - yz + z^2 + \mathrm{c}$

28) Determinar si el campo cuya ecuación en coordenadas polares es $\overline{F}(r,\theta) = r\,sen(2\theta)\widehat{e}_r + r\cos(2\theta)\widehat{e}_\theta$ tiene función potencial, en caso afirmativo, calcular la diferencia de potencial entre el polo y el punto *A* cuyas coordenadas cartesianas son $(1,1)$.

SOLUCIÓN
1 u.t.

29) Calcular el valor de $\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ a lo largo de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, donde $\overline{F}(\mathrm{x,y}) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,i + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,j$.

SOLUCIÓN

2π

30) Calcular $\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ siendo $\overline{F}(r,\theta) = 6r\,sen(2\theta)\hat{e}_r + 6r\cos(2\theta)\hat{e}_\theta$ y C la circunferencia de ecuación $x^2 - 4y + y^2 = 0$.

SOLUCIÓN

0.

31) Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\overline{F}(r,\theta) = \theta\,\hat{e}_r + \hat{e}_\theta$,dado en coordenadas polares, al desplazar una partícula a lo largo de la curva C: $x^2 + 4y^2 = 4$ desde el punto $A(2,0)$ hasta el punto $B(0,1)$, dados en coordenadas cartesianas.

SOLUCIÓN

$\dfrac{\pi}{2}$ u.t.

32) Calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas

$$\overline{F}(r,\theta,z) = \left(z^2\,sen\,2\theta\right)\overline{e_r} + \left(2z^2\cos 2\theta\right)\overline{e_\theta} + \left(2rz\;sen\,2\theta\right)\overline{e_z}$$

en el movimiento de una partícula desde el punto $A\left(2\,,\dfrac{\pi}{4},-1\right)$ hasta el punto $B\left(2\,,\dfrac{3\pi}{4}\,,-1\right)$ a lo largo de la curva $C:\begin{cases} r = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

Todos los datos están dados en coordenadas cilíndricas circulares.

SOLUCIÓN

-4 u. de t.

---

33) Sea $\overline{F}$ el campo vectorial cuya ecuación en coordenadas polares es $\overline{F}(r,\theta) = (-r^2\, sen\theta)\hat{e}_r + (r^2 \cos\theta)\hat{e}_\theta$. Calcular $\int_{C\,A}^{B} \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ a lo largo de la curva C de ecuación $x^2 + y^2 - 4x = 0$ del punto $A(0,0)$ al punto $B(4,0)$ para $y \geq 0$.

SOLUCIÓN

-16π .

---

34) Sea el campo vectorial $\overline{V}$ cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $\overline{V}(r,\theta,z) = 8r\theta^2 z^3\,\hat{e}_r + 8r\theta z^3\,\hat{e}_\theta + 12r^2\theta^2 z^2\,\hat{e}_z$, calcular $\int_C \overline{V} \bullet d\,\overline{r}$ a lo largo de una vuelta completa a la curva C de ecuaciones $x^2 + z^2 = 25, \quad x + y + z = 10$.

SOLUCIÓN

0 u.t.

---

35) El campo vectorial $\overline{F}$ en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$\overline{F}(r,\theta,z) = 2r(sen\theta)\,z^3\,\widehat{e}_r + r(\cos\theta)z^3\,\widehat{e}_\theta + 3r^2(sen\theta)z^2\,\widehat{e}_z$$

Calcular el trabajo que desarrolla el campo $\overline{F}$ al mover una partícula del punto $A\left(1,\ \dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ al punto $B(2,\ 0,\ -1)$, a lo largo de la recta que los une. Los puntos están dados en coordenadas cilíndricas.

SOLUCIÓN

-1 u.t.

---

36) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(r,\theta,z) = (4r\theta + 2\theta)\widehat{e}_r + \left(2r + \dfrac{2\theta z^3}{r}\right)\widehat{e}_\theta + (3\theta^2 z^2 + r\theta)\widehat{e}_z$ al mover una partícula alrededor de la circunferencia de ecuaciones $x^2 + y^2 = 9, \quad z = 9 - x^2 - y^2$.

SOLUCIÓN

36π u.t.

---

37) Determinar si la expresión en coordenadas polares $d\,f = 2r\,3^\theta dr + r^2 3^\theta \ln 3\, d\theta$, es una diferencial exacta. En caso de serlo, obtenga la función de la cual se obtiene.

SOLUCIÓN

$f = r^2\, 3^\theta + C$

38) Sea el campo vectorial $\overline{F}(r,\theta,z) = \left(\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\right)\overline{e}r + \left(\dfrac{sen\theta}{r^3}\right)\overline{e}\theta$ en coordenadas cilíndricas circulares. Determinar si el campo es conservativo; en caso afirmativo, obtener una función potencial de $\overline{F}$.

SOLUCIÓN

$\overline{F}$ es conservativo, $f(r,\theta) = -\dfrac{\cos\theta}{r^2} + c$

39) Sea el campo conservativo $\overline{F} = \dfrac{\overline{r}}{\left|\overline{r}\right|^2}$. Determinar la función potencial de $\overline{F}$.

SOLUCIÓN

$f = \text{Ln}\left(r\right) + C$

40) Utilizar coordenadas esféricas para determinar si el campo vectorial representado por $\overline{F}\left(x,y,z\right) = \dfrac{x\,i + y\,j + z\,k}{x^2 + y^2 + z^2}$ es conservativo. Si lo es, obtener su función potencial.

SOLUCIÓN

El campo vectorial $\overline{F}\left(x,y,z\right)$ es conservativo y su función potencial en coordenadas cartesianas es $f = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C$.