SERIE DE CÁLCULO VECTORIAL

PROFESOR: PEDRO RAMÍREZ MANNY

TEMA 1
Máximos y mínimos de funciones de dos o más variables

1) Identificar la superficie representada analíticamente por cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $9x^2+4y^2-36z^2-72x-16y+88=0$

   b) $x^2+2y^2-2x+4y-z+7=0$

   c) $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1+\dfrac{(z-4)^2}{9}$

   Nota: La identificación requiere más información que el nombre de la superficie.

   $(1EF\ \ /\ \ TIPO\ A\ \ /\ \ 2016-1)$

Solución:

a) $\dfrac{(x-4)^2}{8}+\dfrac{(y-2)^2}{18}-\dfrac{z^2}{2}=1$ Hiperboloide de un manto, centro en $C(4,2,0)$ y eje paralelo al eje Z.

b) $(x-1)^2+2(y+1)^2=z-4$ Paraboloide elíptico, vértice en $V(1,-1,4)$ y eje paralelo al eje Z.

c) $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{(z-4)^2}{9}=1$ Hiperboloide de dos mantos, centro en $C(2,0,4)$, eje paralelo al eje X y vértices en $V_1(5,0,4)$, $V_2(-1,0,4)$.

2) Identificar la superficie representada analíticamente por cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2+y^2+2z^2+x-2y=1$

b) $\dfrac{(y+1)^2}{2}-\dfrac{(x-2)^2}{2}=\dfrac{(z-1)^2}{4}$

c) $(x+1)^2+\dfrac{y^2}{4}-1=\dfrac{z^2}{4}$

Nota: La identificación requiere más información que el nombre de la superficie.
$(2EF\ \ /\ \ 2014-2)$

Solución:

a) $\dfrac{(x+\frac{1}{4})^2}{\frac{17}{16}}+\dfrac{(y-1)^2}{\frac{17}{8}}+\dfrac{z^2}{\frac{17}{16}}=1$ Elipsoide circular, centro en $C\left(-\dfrac{1}{4},1,0\right)$ y eje paralelo al eje Y.

b) $\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{(z-1)^2}{4}-\dfrac{(y+1)^2}{2}=0$ Cono elíptico, vértice en $V(2,-1,1)$ y eje paralelo al eje Y.

c) $(x+1)^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$ Hiperboloide de un manto, centro en $C(-1,0,0)$ y eje paralelo al eje Z.

3) Identificar las superficies que son representadas por las ecuaciones:

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=-\frac{z-3}{3}$

b) $2x^2-2y^2-2z^2=1$

c) $x^2+3\left(y+1\right)^2+z^2=25$

d) $\left(x-2\right)^2-\left(z+3\right)^2=-\left(y-3\right)^2$

e) $\frac{x^2}{4}+\frac{\left(y+1\right)^2}{2}=1+\left(z-1\right)^2$

$(2EF\ \ /\ \ TIPO\ A\ \ /\ \ 2009-1)$

Solución:

a) Paraboloide elíptico, vértice $V\left(0,0,3\right)$, eje coincidente con el eje Z y abre en sentido negativo del eje Z.

b) Hiperboloide de dos mantos, centro en el origen y eje coincidente con el eje X.

c) Elipsoide circular, circunferencias paralelas al plano XZ y centro en $C\left(0,-1,0\right)$.

d) Cono circular recto, vértice $V\left(2,3,-3\right)$ y eje paralelo al eje Z.

e) Hiperboloide de un manto, centro $C\left(0,-1,1\right)$ y eje paralelo al eje Z.

4) Identificar la superficie representada analíticamente por cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y+4z-3=0$

b) $-\frac{x^2}{4}+y+4(z-1)^2-6=0$

c) $-x^2+\frac{(y-2)^2}{4}+\frac{(z+3)^2}{9}=-1$

Nota: La identificación requiere más información que el nombre de la superficie.

$(2EF\ \ /\ \ 2015-1)$

Solución:

a) Esfera, centro $C(-1,-1,-1)$ y radio $r=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

b) Paraboloide hiperbólico, punto silla $(0,6,1)$ y eje paralelo al eje Y.

c) Hiperboloide de dos mantos, centro $C(0,2,-3)$, eje paralelo al eje X y vértices en $V_1(1,2,-3)$, $V_2(-1,2,-3)$.

5) Identificar la superficie representada analíticamente por cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2-3y^2+12z^2+12=0$

b) $x-y^2-9z^2=0$

c) $x^2+2y^2+z^2-4x+4y-2z+3=0$

d) $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^2}{3}=\frac{y^2}{4}$

Nota: La identificación requiere más información que el nombre de la superficie.

$(1EF\ \ /\ \ TIPO\ A\ \ /\ \ 2014-2)$

Solución:

a) Hiperboloide de dos mantos, centro en el origen, eje coincidente con el eje Y y vértices en $V(0,\pm 2,0)$.

b) Paraboloide elíptico, vértice en el origen y eje coincidente con el eje X.

c) Elipsoide circular, circunferencias paralelas al plano XZ y centro en $C(2,-1,1)$.

d) Cono elíptico, vértice en $V(1,0,1)$ y eje paralelo al eje Y.

6) Identificar la superficie representada analíticamente por cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+2x+8y^2=23$

b) $(x-1)^2-9=-3(y+2)^2-3z^2$

c) $-2x^2-5z^2=-25-3y^2$

Nota: La identificación requiere más información que el nombre de la superficie.

$(2EF \;/\; 2013-1)$

Solución:

a) Cilindro elíptico, eje paralelo con el eje Z y elipses paralelas al plano XY.

b) Elipsoide circular, centro en $C(1,-2,0)$, circunferencias paralelas al plano YZ y elipses paralelas a los planos XY y XZ.

c) Hiperboloide de un manto, centro en el origen, eje coincidente con el eje Y e hipérbolas paralelas a los planos XY y YZ.

7) Identificar, especificando las características principales, las superficies cuyas ecuaciones son:

a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

b) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

c) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

d) $x^2 - z^2 = y$

e) $y^2 + z^2 + x = 0$

(3EP / TIPO A / 2003-1)

Solución:

a) Cilindro circular recto, radio de dos unidades y eje coincidente con el eje Z.

b) Cono circular recto, vértice en el origen y eje coincidente con el eje Y.

c) Hiperboloide circular de un manto, centro en el origen y eje coincidente con el eje Y.

d) Paraboloide hiperbólico, punto silla en el origen, hipérbolas paralelas al plano xz.

e) Paraboloide circular, vértice en el origen, abre en sentido negativo al eje x.

8) Identificar la superficie representada por la ecuación dada en cada uno de los incisos.

a) $x^2 - y^2 + z^2 + 3 = 0$

b) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1 + \dfrac{(z-1)^2}{4}$

c) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{3} = \dfrac{(z-1)^2}{4}$

d) $(x-1)^2 + (y+5)^2 - z - 3 = 0$

(2EF / TIPO C / 2008-1)

Solución:

a) Hiperboloide circular de dos mantos, eje coincidente con el eje y $C(0,0,0)$, $V_1\left(0,\sqrt{3},0\right)$ y $V_2\left(0,-\sqrt{3},0\right)$.

b) Hiperboloide de un manto elíptico, centro en $(2,0,1)$, eje paralelo al eje z. Elipses en planos paralelos a xy con eje mayor paralelo al eje y y eje menor paralelo al eje x.

c) Cono circular con eje paralelo a z, vértice $V(0,-1,1)$.

d) Paraboloide circular o de revolución, eje paralelo al eje z, vértice $V(1,-5,-3)$ abre en sentido positivo del eje z.

Para las siguientes funciones obtenga los puntos críticos y establezca la naturaleza de cada uno de ellos.

9) $f(x,y)=x^3+y^3-6x^2+6y^2+8$

Solución: $(0,0)$ p.silla. $(0,-4)$ máx. rel. $(4,-4)$ p.s. $(4,0)$ mín. rel.

10) $f(x,y)=2x^2+2y^3-6y+8x+5$

Solución: $(-2,1)$ mín. rel. $(-2,-1)$ punto silla.

11) $z=e^{-xy}$

Solución: $(0,0)$ punto silla.

12) $f(x,y)=e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$

Solución: $(0,0)$ máx. rel.

13) $f(x,y)=3x^3+18xy+3y^2+63x+6y+30$

Solución: $(5,-16)$ mín. rel. $(1,-4)$ punto silla

14) $f(x,y)=\cosh x+\cosh y$

Solución: $(0,0)$ mín. rel.

15) $f(x,y)=(y-2)\,ang\tan x$

Solución: $(0,2)$ punto silla

16) Para los siguientes problemas, determine la función objetivo (F.O.) y la función restricción (F.R.).

a) Encuentre tres números reales cuya suma sea 9 y la suma de sus cuadrados sea tan pequeña como sea posible.
Solución: $S = x^2 + y^2 + z^2$ F.O.
$x + y + z = 9$ F.R.

b) Encuentre las dimensiones de una caja rectangular cerrada con volumen máximo que puede inscribirse en una esfera unitaria.
Solución: $f(x, y, z) = 8xyz$ F.O.
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ F.R.

c) Encuentre las dimensiones del bote cilindrico circular recto cerrado de menor área de superficie cuyo volumen es $16\pi \ cm^3$.
Solución: $f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ F.O.
$\pi r^2 h = 16\pi$ F.R.

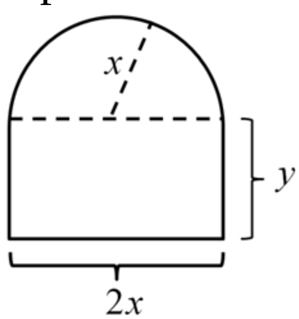
d) Determine las dimensiones del radio r y de la altura h del cilindro que puede ser inscrito en una esfera de radio 10, de tal modo que su superficie total sea máxima.
Solución: $f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ F.O.
$4r^2 + h^2 = 400$ F.R.

e) Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen cuya superficie sea de 6 pulgadas cuadradas.
Solución: $f(x, y, z) = xyz$ F.O. $xy + xz + yz = 3$ F.R.

17) Sea la función $f(x,y)=x+y$ con la restricción $x^2+y^2=4$, obtener los máximos y mínimos.
Solución: $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ máx. $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ mín.

18) Determinar las dimensiones de la caja rectangular con tapa de mayor volumen que puede construirse con $12\,dm^2$ de material. (1EF / TIPO A / 2009-2)
Solución: $x=\sqrt{2}\ dm$, $y=\sqrt{2}\ dm$ y $z=\sqrt{2}\ dm$.

19) Determinar las dimensiones que debe tener una ventana como la que se muestra en la figura, si el área debe ser igual a $18\,m^2$ y el perímetro debe ser mínimo.



(1EF/ SEM 2011-2)

Solución: $x=y=\dfrac{6}{\sqrt{4+\pi}}m$

20) Determinar las dimensiones del cono circular de mayor volumen que puede ser inscrito en una esfera de radio R. (2EF/ SEM 2013-1)
Solución: $h=\dfrac{4}{3}R$ $\quad r=\dfrac{\sqrt{8}}{3}R$

21) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las coordenadas de los vértices de la hipérbola representada por la ecuación $xy = 4$.
Nota: La hipérbola tiene su centro en el origen.
Solución: Vértices: $(2,2),(-2,-2)$

22) Se desea fabricar una caja sin tapa, con forma de paralepípedo y tal que su volumen sea de $4m^3$. Determinar las dimensiones que debe tener la caja de modo que el costo de la soldadura que se va a utilizar para soldar las caras y la base sea el mínimo.
Solución: $x = 2m,\ y = 2m,\ z = 1m$

23) Calcular la distancia mínima del origen a la curva

$$C:\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

Solución: $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right), B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$
$C\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

24) Determine los puntos (x,y,z) del elipsoide $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 70$ de modo que la suma de su primera y tercera coordenadas sea la mayor y la menor posible.
Solución: $(5,0,2),\ (-5,0,-2)$.

25) Un aro metálico cuya configuración geométrica esta representada por las ecuaciones

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 27 = 0 \end{cases}$$

está en un medio con temperatura $T(x, y, z) = xyz + 10$.

Determinar los puntos donde el aro está más caliente y donde está frío.

Solución:

Más calientes: $\left(3, 3, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-3, -3, \frac{3}{2}\right)$ con $T = 10 + \frac{27}{2}$

Más fríos: $\left(3, 3, -\frac{3}{2}\right)$ y $\left(-3, -3, -\frac{3}{2}\right)$ con $T = 10 - \frac{27}{2}$

26) Aplicar el análisis de la variación de una función para establecer las ecuaciones de las rectas sobre las cuales se localizan los ejes de la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

(Sugerencia: Tomar en cuenta que la elipse tiene su centro en el origen).

Solución: $y \pm x$.

27) Se desea fabricar un recipiente sin tapa con forma de cilindro circular recto y cuyo volumen sea de 16 m^3. Si el m^2 del material para la base cuesta el doble que para la pared, calcular las dimensiones que debe tener el recipiente para que el costo sea el mínimo.

Solución: $r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$, $h = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$

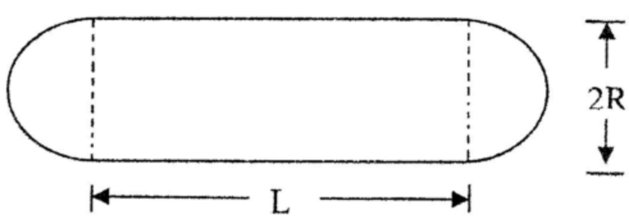
28) Obtener las dimensiones de un silo de almacenamiento formado por un cilindro que tiene en la parte superior a una semiesfera, de modo que se tenga un volumen máximo, si el área de la lámina con que se cuenta para construirlo es de $215\,m^2$.

Solución: $h = r = \sqrt{\dfrac{43}{\pi}}$.

29) La temperatura de la esfera $S: \; x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ está dada por la función $T(x, y, z) = x + z$, en grados centígrados. El rango de la función de temperatura en S va desde $-4°C$ hasta $4°C$. Determinar el radio de la esfera.
$(3EE \; / \; TIPO\ A \; / \; 2015-1)$

Solución: $a = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.

30) Se desea fabricar un tanque con capacidad de $10\pi \; m^3$ formado por un cilindro circular de radio R y por dos semiesferas de radio R en sus extremos. Calcular las dimensiones L y R del tanque de modo que se requiera de la menor cantidad posible de material.



$(1EF \; / \; TIPO\ A \; / \; 2014-2)$

Solución: $L = 0, \;\; R = \sqrt[3]{\dfrac{15}{2}}\,m$, el tanque debe ser esférico.

31) Determinar las coordenadas del punto P que pertenece al plano $x+y-3=0$ y que es el más cercano al punto $A(-1,0,1)$.

$(1EF\ /\ TIPO\ A\ /\ 2014-1)$

Solución: $P(1,2,1)$

32) Calcular los valores extremos de la función $f(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, sujeta a la restricción $x^2+y^2=1$.

$(2EF\ /\ 2014-1)$

Solución:
$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \text{valor máximo}$$
$$B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \text{valor mínimo}$$

33) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$.

$(1EF\ /\ TIPO\ A\ /\ 2015-2)$

Solución: $(0,0)$- mínimo relativo.

34) Calcular mediante el criterio de la segunda derivada la distancia mínima del punto $P(1,2,0)$ a la superficie de ecuación $z=\sqrt{x^2+2y^2}$.

$(1EF\ /\ TIPO\ A\ /\ 2015-1)$

Solución: $P.C.\ \left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$, $d=\frac{\sqrt{114}}{6}$ u. de longitud.

35) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+\frac{z^3}{3}-4x-2y-z\,.$$

$\left(2EF\ \ /\ \ 2011-2\right)$

Solución: $A\left(2,1,1\right)-$ mínimo relativo

$B\left(2,1,-1\right)-$ punto silla

36) Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f\left(x,y,z\right)=x^2-y^2+z^2-2x-4y-2z+3$$

$\left(1EF\ \ /\ \ TIPO\ A\ /\ 2013-1\right)$

Solución: $P.C.\ \left(1,-2,1\right)\ -$ punto silla.

TEMA 2 Funciones vectoriales

37) Encuentre la fórmula para el campo vectorial con las propiedades dadas:
Todos los vectores son de longitud unitaria y perpendicular al vector de posición en ese punto, en el plano cartesiano.
Solución: $\overline{f}(x,y)=\dfrac{y\hat{i}-x\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

38) Determine si la parábola semicúbica $\overline{f}(t)=\left(1+t^3\right)\hat{i}+t^2\hat{j}$ es suave.
Solución: Es suave para $t\neq 0$.

39) Sea C la curva de ecuación
$\overline{r}(t)=(2-2\cos t)\hat{i}+(2sent)\hat{j}+(2+2\cos t)\hat{k}$. Determinar las coordenadas de los puntos de C en los que la recta tangente es perpendicular a su vector de posición.
Solución: $(0,0,4),(2,2,2),(4,0,0),(2,-2,2)$.

40) Determine una ecuación cartesiana de la curva
$\overline{r}(t)=\left(\sqrt{t}\right)\hat{i}+(2-t)\hat{j}$.
Solución: $y=2-x^2$, $x\geq 0$.

41) Una partícula se mueve alrededor de la elipse $\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2=1$ en el plano yz, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Encuentre los valores máximo y mínimo de $\|\overline{v}\|$. (Sugerencia: encuentre primero los valores extremos de $\|\overline{v}\|^2$ y luego saque raíces cuadradas).

Solución: máx$\|\overline{v}\|$=3, mín$\|\overline{v}\|$=2.

42) Encuentre unas ecuaciones paramétricas de la elipse $4x^2+9y^2=1$, de tal manera que el recorrido del vector de posición que barre a la curva se inicie en el punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y el sentido del recorrido del extremo de dicho vector sea el de las manecillas del reloj.

Solución: $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos t \\ y=-\frac{1}{3}sent \end{cases},0\le t<2\pi$

43) Una partícula se mueve desde el punto $A(3,0,4)$ hasta el punto $B(0,2,4)$ sobre la elipse $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ z=4 \end{cases}$; determine unas ecuaciones paramétricas para esta curva.

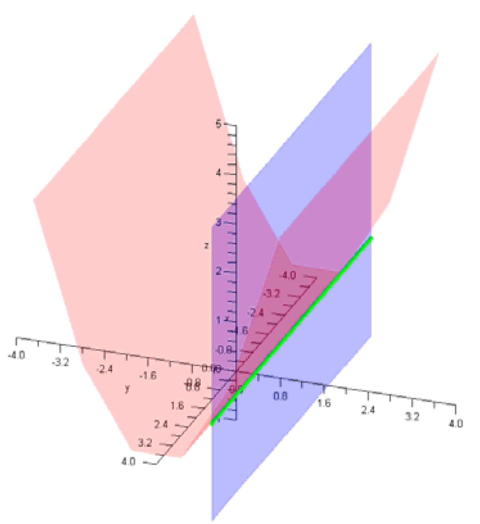
Solución: C:$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2sent \\ z=4 \end{cases},0\le t\le\frac{\pi}{2}$

44) Una partícula se mueve del punto $A\left(\sqrt{5},3,0\right)$ hasta el punto $B\left(\sqrt{5},0,3\right)$ sobre la curva $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ y^2+z^2=9 \end{cases}$; obtenga unas ecuaciones paramétricas.

Solución: $C:\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=3\cos t, 0\le t\le \dfrac{\pi}{2} \\ z=3sent \end{cases}$

45) Determinar una ecuación vectorial de la curva $C:\begin{cases} z=y^2 \\ y=1 \end{cases}$ y hacer un dibujo de C.

Solución: $C:\ \overline{r}\left(t\right)=t\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$



46) Calcule la longitud de la curva $C:\begin{cases} x=6t \\ y=-2sen\left(3t\right) \\ z=-2\cos\left(-3t\right) \end{cases}$, con $0\le t\le \pi$.

Solución: $3\sqrt{8}\pi$ unidades de longitud.

47) Encuentre la longitud de arco de la curva $\overline{r}(t)=\cos t\hat{i}+sent\hat{j}+t\hat{k}$, desde el punto $(1,0,0)$ hasta el punto $(1,0,2\pi)$.

Solución: $s=2\sqrt{2}\pi$ unidades de longitud.

48) Sea la curva C representada por:

$$\overline{r}(t)=\left(\frac{1}{2}e^{t}\cos t\right)\hat{i}-\left(\frac{1}{2}e^{t}\,\mathrm{s}ent\right)\hat{j}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{t}\right)\hat{k},\quad t\geq 0.$$

a) Obtener la ecuación vectorial de C en términos de su longitud de arco s.

b) Determinar el vector tangente unitario a la curva C en el punto $P\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solución:

a) $\overline{r}(s)=\frac{1}{2}(s+1)\cos\left[\ln(s+1)\right]\hat{i}-\frac{1}{2}(s+1)\mathrm{s}en\left[\ln(s+1)\right]\hat{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}(s+1)\hat{k}$

b) $\overline{T}=\frac{1}{2}\hat{i}-\frac{1}{2}\hat{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}$

49) Sea la curva $C:\overline{r}(t)=(a\cos t)\hat{i}+(a\,\mathrm{s}ent)\hat{j}+(bt)\hat{k}$

a) Expresar a la curva C mediante una ecuación vectorial cuyo parámetro sea la longitud de arco "s".

b) Obtener al vector tangente $\overline{T}$ en términos del parámetro longitud de arco "s".

$(2EF\ /\ 2012\text{-}2)$

Solución:

a) $\overline{r}(s)=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}\hat{i}+a\,\mathrm{s}en\frac{s}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}\hat{j}+\frac{bs}{\sqrt{a^{2}+b^{2}}}\hat{k}$

b) $\overline{T}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,sen\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\hat{i}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\hat{j}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\hat{k}$

50) Una partícula se mueve en el plano xy según la ley de posiciones $\overline{r}\left(t\right)=\left(t^2-1\right)\hat{i}+\left(t^2-1\right)^3\hat{j}$ donde t es el tiempo. Determinar, si existen los puntos donde la partícula se detiene.
Solución: $\left(-1,-1\right)$.

51) Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $C:\overline{r}\left(t\right)=\left(3t+1\right)\hat{i}+\left(\sqrt{3}\,t\right)\hat{j}+\left(t^2\right)\hat{k}$, donde t es el tiempo. Calcular el ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración en el instante $t=1$.
$\left(1EF\ \ /\ \ TIPO\ A\ \ /\ \ 2013\text{-}2\right)$
Solución: $\theta=60°$.

52) Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura de la curva descrita por la ecuación vectorial $\overline{r}\left(t\right)=\left(sent\right)\hat{i}+\left(\cos t\right)\hat{j}+\left(sent\right)\hat{k}$, en el punto $P\left(0,-1,0\right)$.
$\left(2EF\ \ /\ \ 2015-2\right)$
Solución: $C\left(0,1,0\right)$

53) Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $C:\overline{r}\left(t\right)=\left(3sen2t\right)\hat{i}+\left(3\cos 2t\right)\hat{j}$, donde t es el tiempo. Calcular los vectores aceleración tangencial y aceleración normal en el punto $P\left(3,0\right)$.
$\left(1EF\ \ /\ \ TIPO\ A\ \ /\ \ 2015\text{-}2\right)$
Solución: $\overline{a}_T=\overline{0},\ \ \overline{a}_N=-12\hat{i}$.

54) Una partícula se mueve según la ley de posiciones $\overline{r}(t)=(t-1)^3\hat{i}+\left(3t^2-8t\right)\hat{j}+(2t+4)\hat{k}$, calcular el vector aceleración normal de la partícula en el punto donde $t=2$.

Solución: $\overline{a}_N=\frac{48}{29}\hat{i}+\frac{6}{29}\hat{j}-\frac{84}{29}\hat{k}$.

55) Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $C:\overline{r}(t)=\left(2t^3\right)\hat{i}+\left(t-t^2+2\right)\hat{j}+\left(2t^2+3t-1\right)\hat{k}$, donde t es el tiempo. Determinar, si existen, los puntos de la curva donde los vectores velocidad, aceleración y $\frac{d^3\overline{r}}{dt^3}$ son coplanares.

$(2EF\ /\ 2013-1)$

Solución: No hay puntos donde los vectores velocidad, aceleración y $\frac{d^3\overline{r}}{dt^3}$ sean coplanares.

56) Sea la curva $C:\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$

Determinar, para el punto $P(1,0,3)$:

a) Los vectores $\overline{T}$, $\overline{N}$ y $\overline{B}$.
b) La curvatura de la curva.
c) La ecuación del plano oscular.
d) La torsión de la curva.

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución:

a) $\overline{T}=(0,1,0)$, $\overline{B}=(0,0,-1)$ y $\overline{N}=(1,0,0)$

b) $k=1$

c) $z=3$

d) $\tau=0$

57) Sea la curva $C:\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z-y=0 \end{cases}$

Calcular, para el punto $P(-2,0,0)$:

a) Los vectores $\overline{T}$, $\overline{N}$ y $\overline{B}$.

b) La curvatura y la torsión.

$(2EF\ /\ 2011\text{-}2)$

Solución:

a) $\overline{T}=\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overline{B}=\left(0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\overline{N}=(1,0,0)$

b) $k=\dfrac{1}{4}$, $\tau=0$ (curva plana contenida en $z=y$).

58) Sea la curva:

$C:\ \overline{r}(t)=\left(e^t\cos t,\cos t,-e^t\cos t\right)$. Calcular para el punto $P(1,1,-1)$:

a) La curvatura y la torsión de la curva .

b) La ecuación cartesiana del plano osculador.

$(1EF\ /\ TIPO\ A\ /\ \ 2015-1)$

Solución:

a) $k=\dfrac{1}{2}$, $\tau=0$.

b) $x+z=0$

59) Sea C la curva cuya ecuación vectorial es $\bar{r}(t)$ donde $\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$ son sus vectores tangente, normal y binormal respectivamente y τ la torsión de C. Si $\frac{d\bar{T}}{ds} = -\frac{1}{5}\hat{j}$, $\bar{B} = \hat{k}$ y $\tau = 6$ para un punto P de la curva C. Obtener los vectores $\bar{N}$, $\frac{d\bar{N}}{ds}$, así como el radio de curvatura de C.

Solución: $\bar{N} = -\hat{j}$, $\frac{d\bar{N}}{ds} = \frac{1}{5}\hat{i} - 6\hat{k}$, $\rho = 5$

60) Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria $\bar{r}(t) = \hat{i} - 4t^2\hat{j} + 3t^2\hat{k}$, donde t es el tiempo. Determine

b) la curvatura y la torsión de la trayectoria.

c) La forma de la trayectoria

Solución: $k = 0, \quad \tau = 0;$ es una recta.

61) Sea C la curva de ecuación $\bar{r}(t) = sent\hat{i} + 2sent\hat{j} + 3\cos t\hat{k}$. Determine si la curva es plana.

Solución: Es plana.

62) Sea la curva C de ecuación: $\bar{r}(s) = \left(4\cos\frac{s}{4}\right)\hat{i} - (2)\,\hat{j} + \left(4sen\frac{s}{4}\right)\hat{k}$, donde s es el parámetro longitud de arco.

Determinar, para el punto $P(4,-2,0)$.

a) Los vectores $\bar{T}$, $\bar{N}$ y $\bar{B}$.

b) La curvatura de la curva.

c) La torsión de la curva.

$(2EF \;\; / \;\; 2014\text{-}2)$

Solución:

a) $\overline{T} = \hat{k}$, $\overline{N} = -\hat{i}$ y $\overline{B} = -\hat{j}$

b) $k = \dfrac{1}{4}$

c) $\tau = 0$ (curva plana contenida en $y = -2$)

63) Sea S la superficie cuyas ecuaciones paramétricas son $x = u + v;\ y = u - v;\ z = u^2 - v^2$, obtener una ecuación del plano tangente a S, en el punto $P(2,0,0)$.

Solución: $2y - z = 0$

64) Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie cuya ecuación vectorial es $\overline{r}(s,t) = (st + 2t)\,\hat{i} + (t^3 - s^2)\,\hat{j} + (3t - 2s)\hat{k}$ en el punto $P(0,-1,2)$.

Solución: $3x - y - z + 1 = 0$.

65) Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie $S : \overline{r}(u,v) = (usenv - \cos v)\,\hat{i} + (u\cos v - senv)\,\hat{j} + (u)\hat{k}$, con $0 \le u \le 3$ y $0 \le v \le \pi$, en el punto $P(0,0,1)$.

$(2EF\ \ /\ \ 2014-1)$

Solución: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2z + 2 = 0$.

66) Sea la parábola C y la superficie S definidas por las ecuaciones

$C:\overline{r}_1(t)=\left(t^2-2t+1\right)\hat{i}+(t)\hat{k}$

$S:\overline{r}_2(u,v)=\left(\sec(u)\cos(v)\right)\hat{i}+\left(\tan(u)\right)\hat{j}+\left(\sec(u)\mathrm{s}en(v)\right)\hat{k}$

El punto de intersección de C con S es el vértice de la parábola. Determinar el ángulo de intersección entre la curva C y la superficie S.

$(3EE\ /\ TIPO\ A\ /\ 2015\text{-}1)$

Solución: $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

67) Sea S la superficie de ecuación vectorial $\overline{r}(u,v)=u\cos v\hat{i}+usenv\hat{j}+u^2\hat{k}$ con $0\le v\le\pi; u\ge 0$ y C la curva de ecuación vectorial $\overline{r}(t)=t\hat{i}+t\hat{j}+4\hat{k}$ .Calcule las coordenadas del punto de intersección entre S y C.

Solución: $P\left(\sqrt{2},\sqrt{2},4\right)$.

68) Encuentre unas ecuaciones paramétricas para la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 5.

Solución: $\begin{cases} x=5sen\phi\cos\theta \\ y=5sen\phi sen\theta \\ z=5\cos\phi \end{cases}$, $\begin{array}{l} 0\le\phi\le\pi \\ 0\le\theta<2\pi \end{array}$

69) Determinar para las siguientes superficies unas ecuaciones paramétricas:

a) $S_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$

b) $S_2 :\ z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}$

c) $S_3 :\ z = \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16}$

d) $S_4 :\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = z^2$

e) $S_5 :\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$

f) $S_6 :\ \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, para la hoja superior.

g) $S_7 :\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Solución:

a) $S_1 : \begin{cases} x = 5\cos u \cos v \\ y = 4\cos u\, sen v; \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, 0 \le v < 2\pi \\ z = 3 sen u \end{cases}$

b) $S_2 : \begin{cases} x = 5u\cos v \\ y = 4u\, sen v; \quad 0 \le u < +\infty, \quad 0 \le v < 2\pi. \\ z = u^2 \end{cases}$

c) $S_3 : \begin{cases} x = 5u \\ y = 4v \qquad ; \quad -\infty < u < +\infty, \quad -\infty < v < +\infty \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$

d) $S_4 : \begin{cases} x = 5u\cos v \\ y = 4u\,\mathrm{s}env; \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 \le v < 2\pi. \\ z = u \end{cases}$

e) $S_5 : \begin{cases} x = 5\cosh u \cos v \\ y = 4\cosh u\,\mathrm{s}env; \quad -\infty < u < +\infty,\ 0 \le v < 2\pi. \\ z = 3senhu \end{cases}$

f) $S_6 : \begin{cases} x = 5senhu\cos v \\ y = 4senhusenv; \quad 0 \le u < +\infty,\ 0 \le v < 2\pi. \\ z = 3\cosh u \end{cases}$ Para la hoja superior.

g) $S_7 : \begin{cases} x = 5\cos u \\ y = 4\,\mathrm{s}enu\ ; \quad 0 \le u < 2\pi, \quad -\infty < v < +\infty. \\ z = v \end{cases}$

70) Sean S la superficie de ecuación vectorial $\overline{r}(u,v) = u\cos v\hat{i} + usenv\hat{j} + u^2\hat{k}$ con $0 \le v \le \pi$, $u \ge 0$ y C la curva de ecuación vectorial $\overline{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j} + 4\hat{k}$

a) Calcular las coordenadas del punto de intersección entre S y C.
b) Determinar si C es perpendicular a S.

Solución:

a) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$

b) la curva C no es perpendicular a la superficie.

71) Sean las superficies de ecuaciones
$S_1 : x^2 - y^2 + z^2 = 12$ y $S_2 : \overline{r}(s,t) = (s^2 t + 2)\hat{i} + (s-t)\hat{j} + 3t^2\hat{k}$.
Obtenga unas ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección entre las superficies S_1 y S_2 en el punto $P(-2,-1,3)$.

Solución: $L: \begin{cases} x = -2 - 40\lambda \\ y = -1 - 17\lambda \\ z = 3 - 21\lambda \end{cases} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$

72) Hallar las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas polares son $P(3, 240°)$.

Solución: $P\left(-\frac{3}{2}, -3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

73) Hallar las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas polares son $P(4, 30°)$.

Solución: $P\left(2\sqrt{3}, 2\right)$

74) Hallar las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas cartesianas son $P\left(-3, \sqrt{3}\right)$.

Solución: $P\left(2\sqrt{3}, 150°\right)$

75) Hallar las coordenadas polares del punto cuyas coordenadas cartesianas son $P(-2, 2)$.

Solución: $P\left(2\sqrt{2}, 135°\right)$

76) Dada la ecuación cartesiana $x^2 - 2x + y^2 = 0$, transformarla a polar.
Solución: $r = 2\cos\theta$

77) Dada la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + 8y = 0$, transformarla a polar.
Solución: $r = -8sen\theta$

Encontrar las ecuaciones cartesianas de las siguientes curvas.

78) $r\cos\theta = -2$ Solución: $x = -2$

79) $r^2 = 9r\cos\theta$ Solución: $x^2 + y^2 - 9x = 0$

80) $r = \dfrac{16}{2\cos\theta - sen\theta}$ Solución: $2x - y = 16$

Trazar las gráficas de las siguientes curvas

81) $\theta = 5\dfrac{\pi}{6}$

82) $r = -12\csc\theta$

83) $r = 8\sec\theta$

84) $r = -8$

85) $r = 8\cos\theta$

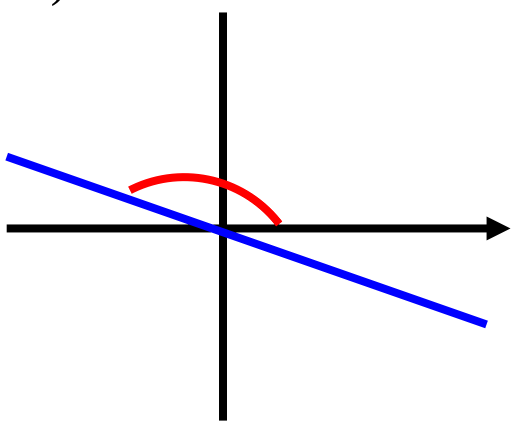
86) $r = -6\cos\theta$

87) $r = 6sen\theta$

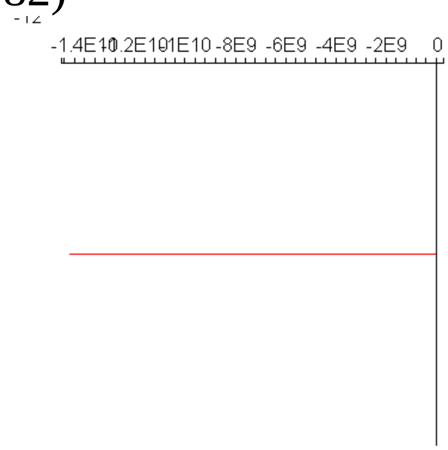
88) $r = -4sen\theta$

Solución:

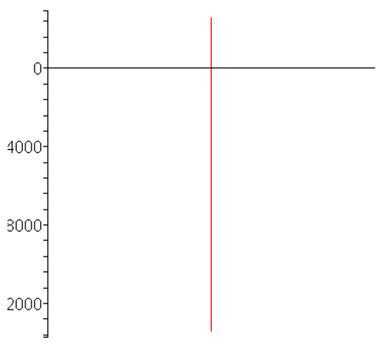
81)



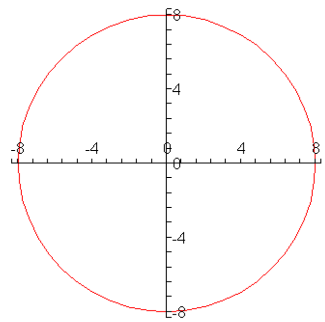
82)



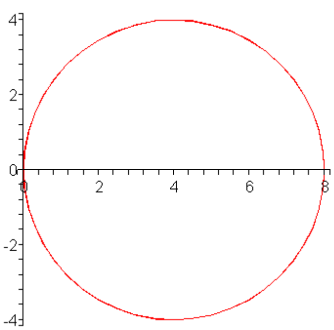
83)



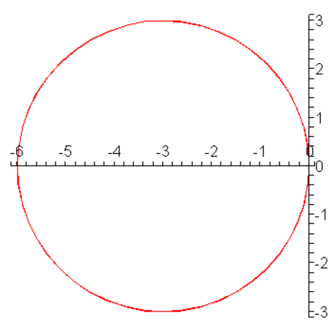
84)

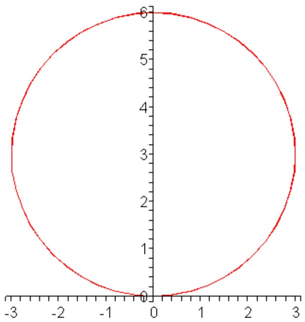
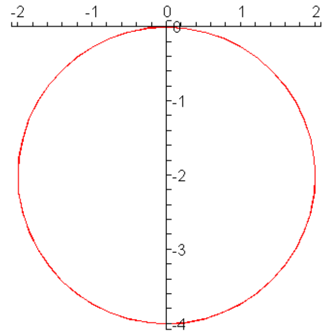


85)

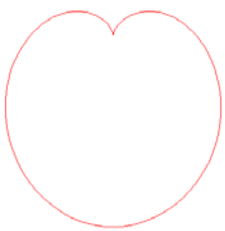
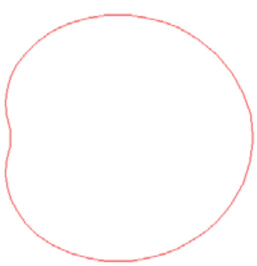
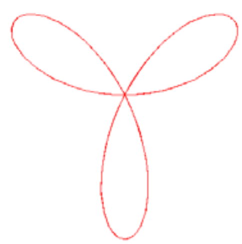
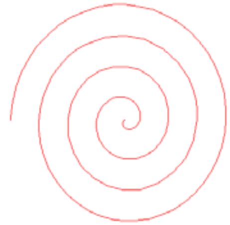


86)



87)	88)
	

89) Identifique las siguientes curvas:

a)	b)
	
c)	d)
	
e)	f)
	

Solución:
a) Cardioide, b) Caracol de Pascal con rizo interior, c) Caracol de Pascal sin rizo interior, d) Rosa de tres pétalos, e) Lemniscata, f) Espiral de Arquímedes.

90) Identifique que representan las siguientes ecuaciones:

$a)\ r = 4(1 + sen\theta)$

$b)\ r = 2sen3\theta$

$c)\ r^2 = 16\cos 2\theta$

Solución:
a) Cardioide, b) Rosa de tres pétalos, c) Lemniscata

91) Utilice coordenadas curvilíneas para calcular el área de la región limitada por las rectas de ecuaciones $y = x$, $y = x + 2$, $y = -2x$, $y = -2x + 6$ (Sugerencia: una de las ecuaciones de transformación es $y - x = u$).
Solución: A=4 unidades de área.

92) Encuentre el área de la región R del plano xy limitada por las curvas $y^2 = 8x$, $y^2 = x$, $x^2 = 8y$, $x^2 = y$; utilizando el cambio de coordenadas al sistema (u,v) definido mediante las ecuaciones $y^2 = ux$; $x^2 = vy$.
Solución: $A_R = \frac{49}{3}$ unidades de área.

93) Sea la transformación $T:\begin{cases} x = uv\cos\theta \\ y = uv\,\mathrm{s}en\theta \\ z = \dfrac{1}{2}\left(v^2 - u^2\right) \end{cases}$.

Determinar :

a) Los vectores unitarios $\overline{e}_u$, $\overline{e}_v$ y $\overline{e}_\theta$.

b) Los factores de escala h_u , h_v y h_θ.

c) Si el sistema de coordenadas (u,v,θ) es ortogonal.

d) El jacobiano de la transformación, $J\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,\theta}\right)$.

$(2EF\ /\ 2014-2)$

Solución:

a) $\begin{cases} \overline{e}_u = \dfrac{1}{\sqrt{v^2+u^2}}\left(v\cos\theta\hat{i} + vsen\theta\hat{j} - u\hat{k}\right) \\ \overline{e}_v = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(u\cos\theta\hat{i} + usen\theta\hat{j} + v\hat{k}\right) \\ \overline{e}_\theta = -sen\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \end{cases}$

b) $h_u = \sqrt{u^2+v^2}$, $h_v = \sqrt{u^2+v^2}$, $h_\theta = uv$.

c) El sistema es ortogonal.

d) $J\left(\dfrac{x,y,z}{u,v,\theta}\right) = -uv\left(v^2+u^2\right)$

94) Para el sistema curvilíneo definido por las ecuaciones de transformación $u = x - 3y$, $v = 3x + y$; obtenga el factor de escala h_u, el vector base $\overline{e}_u$ y determine si el sistema curvilíneo es ortogonal.

Solución: $h_u = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; $\overline{e}_u = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\hat{i} - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\hat{j}$; es ortogonal.

95) Dadas las ecuaciones de transformación $x = senhv\,senu$, $y = \cosh v \cos u$; determine si el sistema curvilíneo es ortogonal; calcule el factor de escala h_u.

Solución: Es ortogonal

$$h_u = \sqrt{senh^2 v + sen^2 u}$$

96) Sea la transformación $T : \begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \end{cases}$.

Determinar:

a) Si el sistema de coordenadas (u,v) es ortogonal.

b) El jacobiano de la transformación, $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$.

c) El área de la región R_{xy} del plano XY, que es la imagen de la región R_{uv} limitada por las rectas $u = 0$, $u = -4$, $v = 1$ y $v = 4$.

d) Las ecuaciones para la transformación inversa de T.

e) Los factores de escala h_u y h_v.

f) Los vectores unitarios $\overline{e}_u$ y $\overline{e}_v$.

$(1EF\ /\ TIPO\ A\ /\ \ 2014-1)$

Solución:

a) No es ortogonal.

b) $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)=\dfrac{1}{3}$

c) $A_R=4$ unidades de área.

d) $T:\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}u+\dfrac{2}{3}v \\ y=-\dfrac{1}{3}u+\dfrac{1}{3}v \end{cases}$

e) $h_u=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ y $h_v=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

f) $\overline{e}_u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath}$ y $\overline{e}_v=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{i}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$

97) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=ayz\hat{i}+bxz\hat{j}+cxy\hat{k}$ donde $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. Determinar los valores de a,b,c tales que el campo $\overline{F}$ sea solenoidal e irrotacional.

Solución: $a=b=c$

98) Determine si la función $f(x,y)=\cos x senhy$ es armónica.

Solución: Es armónica.

99) Para la función $f(\rho,\theta,z)=\rho\theta z$, calcule su gradiente.

Solución: $\nabla f=\theta z\overline{e}_\rho+z\overline{e}_\theta+\rho\theta\overline{e}_z$.

100) Utilizar coordenadas esféricas para obtener el gradiente de la función $f\left(x,y,z\right)=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ para el punto $P\left(-1,0,1\right)$.

$\left(1EF \;\; / \;\; TIPO\ A \;\; / \quad 2014-1\right)$

Solución: $\nabla f = 6\overline{e}_\rho$

101) Sea el campo vectorial $\overline{f}\left(\rho,\theta,z\right)=e^{\rho^2}\overline{e}_\rho+\dfrac{1}{\rho}sen\theta\overline{e}_\theta+z^2\overline{e}_z$

Investigue si es solenoidal.

Solución: No es solenoidal,

$$\nabla\cdot\overline{f}=\frac{1}{\rho}\left[e^{\rho^2}+2\rho^2e^{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cos\theta+2\rho z\right]$$

102) Sea el campo vectorial

$\overline{f}=sen\phi sen\theta\overline{e}_\rho+sen\theta\cos\phi\overline{e}_\phi+\cos\theta\overline{e}_\theta$ investigue si es irrotacional.

Solución: Es irrotacional.

103) Sea la función

$\overline{F}\left(\rho,\theta,z\right)=\left(3zsen\theta\right)\overline{e}_\rho+\left(\lambda z\cos\theta\right)\overline{e}_\theta+\left(\lambda\rho sen\theta\right)\overline{e}_z$ en coordenadas cilíndricas circulares. Determinar el valor de "λ", tal que el campo $\overline{F}$ sea irrotacional.

$\left(2EF \;\; / \;\; 2011-2\right)$

Solución: $\lambda=3$.

104) Sea la función escalar

$$f\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left[ang\cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]\left[ang\tan\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

Determinar si la función es armónica.

Solución: $\nabla^2 f = \dfrac{\theta}{\rho sen\phi}\left(2\phi\theta sen\phi + \theta\cos\phi\right) \neq 0 \therefore$ la función no es armónica.

Ejercicios del segundo examen parcial del semestre 2004-2.

105) Una partícula se mueve a lo largo de la curva C representada por $\bar{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t\right)\hat{i} + \left(\sqrt{2}\cos t\right)\hat{j} + (2sent)\hat{k}$. Determinar las coordenadas de los puntos de la curva donde:

a) La velocidad de la partícula es perpendicular a su vector de posición.

b) La aceleración "apunta" hacia el origen.

Solución:

a) La velocidad es perpendicular $\bar{r}(t)$ en todo punto de la curva.

b) La aceleración apunta hacia el origen en todo punto de la curva.

106) Sea C una de las curvas representadas por $C:\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$ y que contiene a los puntos A(0,4,3) y B(-4,0,3).

a) Obtener una ecuación vectorial de la curva C.

b) Calcular la longitud de la curva entre los puntos A y B.

c) Determinar el triedro móvil en el punto A

d) Calcular la curvatura de C.

e) Determinar si la curva es plana.

Solución:

a) $\bar{r}(t) = (4\cos t)\hat{i} + (4sent)\hat{j} + (3)\hat{k}$

b) Por ser una circunferencia $s = 2\pi\ u.l.$ ó $s = 6\pi\ u.l.$

c) $\bar{T} = -\hat{i},\ \bar{N} = -\hat{j},\ \bar{B} = \hat{k}$

d) $k=\frac{1}{4}$

e) La curva es plana ya que está contenida en el plano $z=3$

107) Sea la superficie S representada por $S:\begin{cases} x=u \\ y=u\cos v \\ z=u\,\mathrm{sen}\,v \end{cases}$

a) Obtener una ecuación vectorial de S.

b) Con la ecuación obtenida en el inciso anterior, determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $P\left(-\sqrt{2},1,1\right)$.

Solución:

a) $\bar{r}(u,v)=(u)\hat{i}+(u\cos v)\hat{j}+(u\,\mathrm{sen}\,v)\hat{k}$

b) $\sqrt{2}x+y+z=0$

108) Determinar si la función $f(\rho,\phi,\theta)=\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)$, dada en coordenadas esféricas, es armónica.

Solución:

$\nabla^2 f=-\frac{1}{\rho^2}\ \therefore\ f$ no es armónica.

109) Sea la transformación $T:\begin{cases} u=2x+y \\ v=2y-x+1 \end{cases}$ y sea R una región en el plano xy cuya área es igual a $4u^2$. Determinar:

a) Si el sistema de coordenadas (u,v) es ortogonal.

b) Los factores de escala h_u y h_v.

c) Los vectores base $\bar{e}_u$ y $\bar{e}_v$.

d) El Jacobiano de transformación $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$.

e) El área de la región R', siendo R' la imagen de la región R bajo la transformación T.

Solución:

a) Es ortogonal.

b) $h_u=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ y $h_v=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\bar{e}_u=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{\imath}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$ y $\bar{e}_v=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\hat{\imath}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\hat{\jmath}$.

d) $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)=\dfrac{1}{5}$

e) área de $R'=20u^2$

110) Sea el campo vectorial

$\bar{F}(x,y,z)=\left(x^2+yz\right)\hat{\imath}+\left(y^2+xz\right)\hat{\jmath}+\left(z^2+xy\right)\hat{k}$

Determinar:

a) Si el campo $\bar{F}$ es solenoidal.

b) Si el campo $\bar{F}$ es irrotacional.

(1EF / TIPO A / 2009-2)

Solución:

a) $\bar{F}$ no es solenoidal.

b) $\bar{F}$ sí es irrotacional.

111) Sea el campo vectorial $\overline{F}$ representado por $\overline{F}=\dfrac{\overline{r}}{\rho^3}$ en donde $\overline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ y $\rho=\|\overline{r}\|$.

a) Determinar si $\overline{F}$ es solenoidal.
b) Determinar si $\overline{F}$ es irrotacional.

Solución:

a) Sí es solenoidal.
b) Es irrotacional.

112) Una partícula comienza a moverse en $t=0$ segundos desde el punto $A(1,2,3)$ con una velocidad dada por $\overline{v}(t)=(t)\hat{i}+(2t)\hat{j}+(2t)\hat{k}\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$. Determinar:

a) Las coordenadas del punto B en el que se encuentra la partícula en $t=2$ segundos.
b) El tiempo que transcurre para que la partícula recorra 24 metros.
c) Los vectores aceleración tangencial y aceleración normal.

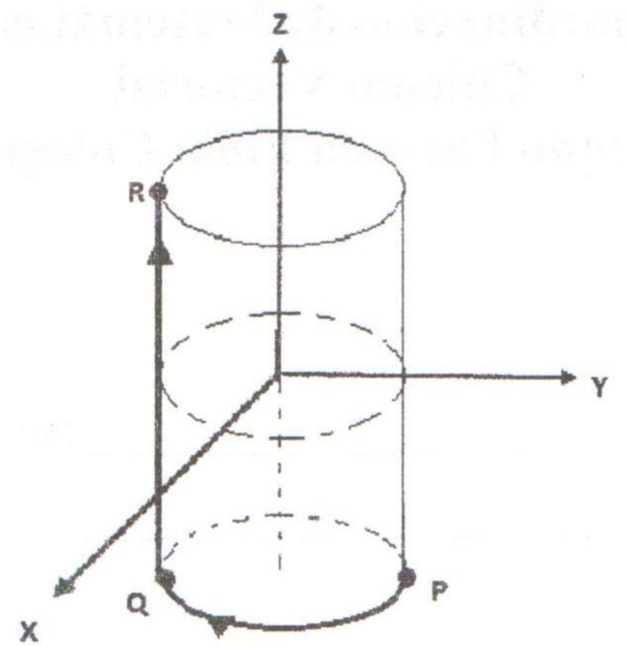
$(2EF/2014-1)$

Solución:

a) $B(3,6,7)$
b) $t=4$ segundos
c) $\overline{a}_T=(1,2,2)$, $\overline{a}_N=\overline{0}$.

TEMA 3 Integrales de línea

113) Calcular $\int_C (x^2+z)\,ds$, donde C es la curva que une al punto $P(0,2,-1)$ con el punto $Q(0,-2,-1)$ y a Q con el punto $R(0,-2,1)$ que pertenece al cilindro circular de radio 2 que se muestra en la figura:
$(2EF\ /\ 2014-1)$

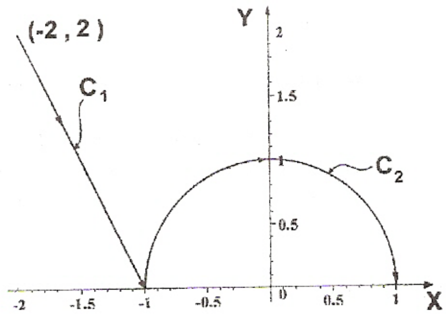


Solución: $\int_C (x^2+z)\,ds = 2\pi$

114) Calcular el valor de $\int_C (x^2-2xy)\,dx+\frac{1}{2}(3xy+2y^2-x)\,dy$, sobre la trayectoria formada por las rectas que unen a los puntos: $P_1(0,0)$, $P_2(0,1)$, $P_3(1,1)$.

Solución: $-\frac{1}{3}$.

115) Calcular $\int_C x^2 y dx + xy^2 dy$ a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura. (1EF/B/2002-2)



Solución: $\dfrac{15}{2}$

116) Calcular la integral de línea $I = \oint_C (3x - y)dx + (x + 5y)dy$ sobre la circunferencia de ecuaciones $x = \cos t$; $y = sent$; $0 \le t \le 2\pi$.

Solución: $I = 2\pi$

117) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x, y, z) = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$.

Calcular $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de la trayectoria del plano XY dada por $y^2 = x$, del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(2, \sqrt{2}, 0)$.

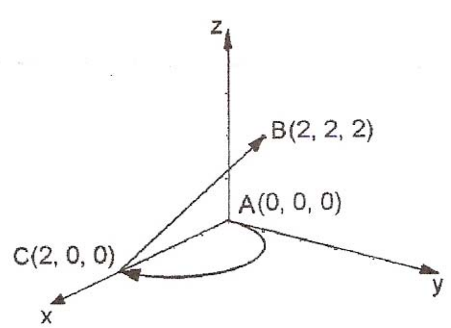
(1EF/A/2003-1)

Solución: $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r} = \dfrac{2}{3}\left(4 + \sqrt{2}\right)$.

118) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(3x+yz)\hat{i}+\left(2x+y^2\right)\hat{j}+(xz)\hat{k}$, calcular $\int_C \overline{F}\bullet d\overline{r}$ a lo largo de la curva $C:\begin{cases} x=2+y \\ y=z^2 \end{cases}$ del punto $A(3,1,1)$ al punto $B(3,1,-1)$. (3EP/A/2002-1)

Solución: $\int_C \overline{F}\bullet d\overline{r}=-\dfrac{4}{5}$

119) Sea $\overline{F}$ el campo vectorial definido por $\overline{F}(x,y,z)=(2x+sen\pi y)\hat{i}+\left(\pi x\cos\pi y+z^3\right)\hat{j}+\left(3yz^2-4z\right)\hat{k}$ Calcular el valor de $\int_C \overline{F}\bullet d\overline{r}$ del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(2,2,2)$ a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura. (3EP/A/2001-2)



Solución: 12

120) Sea el campo vectorial cuya ecuación es

$$\bar{F}(x,y,z)=\frac{e^{z}y}{1+x^{2}y^{2}}\hat{i}+\frac{e^{z}x}{1+x^{2}y^{2}}\hat{j}+e^{z}ang\tan(xy)\hat{k}$$

Calcular $\oint_C \bar{F}\bullet d\bar{r}$, a lo largo de una vuelta completa a la curva de ecuaciones $x^2+z^2=16,\ x+y+z=10$.

Solución: $\oint_C \bar{F}\bullet d\bar{r}=0$.

121) Calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\bar{F}(x,y,z)=\left(2y^2 senz-2x\right)\hat{i}+\left(4xysenz+1\right)\hat{j}+\left(2xy^2\cos z+4\right)\hat{k}$ al desplazar una partícula del punto $A\left(0,0,\frac{\pi}{2}\right)$ al punto $B(0,0,\pi)$. (1EF/B/2004-2)

Solución: $W=2\pi$ unidades de trabajo.

122) Obtener el valor de $\oint_C \bar{F}\bullet d\bar{r}$ calculada a lo largo de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen donde

$$\bar{F}(x,y)=\frac{2xy^2}{\sqrt{1-x^4y^4}}\hat{i}+\frac{2x^2y}{\sqrt{1-x^4y^4}}\hat{j}$$

Solución: $\oint_C \bar{F}\bullet d\bar{r}=0$.

123) La integral $\int_C {}_A^B \overline{F} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de cualquier trayectoria que une al punto $A(0,0)$ con el $B(2,4)$ es igual a 72, donde $\overline{F}(x,y) = (5y - 6x^2)\hat{i} + (6y + ax)\hat{j}$.

Calcular $\int_k \overline{F} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de la trayectoria $k : y = x^3$, del punto $P(1,1)$ al punto $Q(2,8)$. (2EF/A/2004-2)

Solución: 250

124) Sea $\overline{F}$ el campo vectorial cuya ecuación en coordenadas polares es $\overline{F}(\rho,\theta) = \rho^2 \cos\theta \overline{e}_\rho + \rho^2 \operatorname{sen}\theta \overline{e}_\theta$, calcular $\int_C \overline{F} d\overline{r}$ a lo largo de la curva C de ecuación $x^2 + y^2 - 4y = 0$ del punto $A(0,0)$ al punto $B(0,4)$ para $x \leq 0$.

Solución: -16π

125) Determinar si el campo vectorial

$\overline{F}(\rho,\theta,z) = 8\rho\theta^2 z^3 \overline{e}_\rho + 8\rho\theta z^3 \overline{e}_\theta + 12\rho^2\theta^2 z^2 \overline{e}_z$ es un campo conservativo y de ser posible, encontrar la función $\phi(\rho,\theta,z)$ tal

Solución: $\phi(\rho,\theta,z) = 4\rho^2\theta^2 z^3 + C$

126) Sea el campo de fuerzas $\bar{F}$ que en coordenadas cilíndricas circulares está representado por

$$\bar{F}(\rho,\theta,z)=\left(zsen\theta+2\rho\theta z^2\right)\bar{e}_\rho+\left(z\cos\theta+\rho z^2\right)\bar{e}_\theta+\left(\rho sen\theta+2\rho^2\theta z\right)\bar{e}_z$$

Calcular el trabajo que efectúa el campo $\bar{F}$ cuando una partícula se desplaza del punto $A(0,0,0)$ al punto $B\left(2,\frac{\pi}{2},1\right)$ a lo largo del segmento de recta que los une. Los puntos A y B están dados en coordenadas cilíndricas circulares.
(1EF / TIPO A / 2009-2)
Solución: $w=2(\pi+1)$ unidades de trabajo.

127) Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\bar{F}(\rho,\theta)=\theta\bar{e}_\rho+\bar{e}_\theta$, dado en coordenadas polares, al desplazar una partícula a lo largo de la curva $C: x^2+4y^2=4$ desde el punto $A(2,0)$ hasta el punto $B(0,1)$, dados en coordenadas cartesianas.
(1EF/A/2004-1)
Solución: $W=\frac{\pi}{2}$ unidades de trabajo.

TEMA 4 Integrales múltiples

128) Calcule el valor de $I=\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2} sen\pi y^3 dydx$

Solución: cero

129) Calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones $x^2+y^2=9$, $x+y=3$.

Solución: $A=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)u^2$.

130) Para calcular el área de una región del plano XY se obtuvieron las integrales

$$A=\int_{-\frac{2}{3}}^{0}\int_{3^{-3x}}^{9} dydx+\int_{0}^{2}\int_{3^{x}}^{9} dydx$$

a) Cambiar el orden de integración, de modo que el área se obtenga con una sola integral doble.

b) Obtener el área de dicha región.

(1EE/A/2002-1)

Solución:

a) $A=\int_{1}^{9}\int_{-\frac{\ln y}{3\ln 3}}^{\frac{\ln y}{\ln 3}} dxdy$

b) $A=\left(24-\frac{32}{3\ln 3}\right)u^2$.

131) Utilizar integrales doble para calcular el área de la región del plano XY localizada en el primer octante y limitada por las curvas de ecuaciones $16(x-1)=y^2$, $8x=y^2$.
(3EP/A/2002-1)
Solución: $A=\frac{8}{3}u^2$

132) Utilizar integrales dobles para determinar el área limitada por la elipse de ecuación $(x+2y+4)^2+(3x-4y-2)^2=100$.
Sugerencia: Hacer un cambio de variable (1EF/B/2002-2)
Solución: $A=10\pi\, u^2$.

133) Calcular $\iint_R \left(x^2+y^2\right)dxdy$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por las curvas
$xy=1,\quad xy=8,\quad x^2-y^2=3,\quad x^2-y^2=6$. (3EP/A/03-1)
Sugerencia: Hacer el cambio de variable $u=xy$**,** $v=x^2-y^2$**.**
Solución: $\frac{21}{2}$.

134) Calcular el área de un pétalo de la rosa cuya ecuación polar es $\rho=\cos 4\theta$.(2EF/A/2004-1)
Solución: $A=\frac{\pi}{16}$ unidades de área.

135) Utilizar integrales dobles para calcular el volumen de la región localizada en el interior de las superficies de ecuaciones $x^2+z^2-4=0$ y $y^2+z^2=4$.
Solución: $V=\frac{128}{3}u^3$

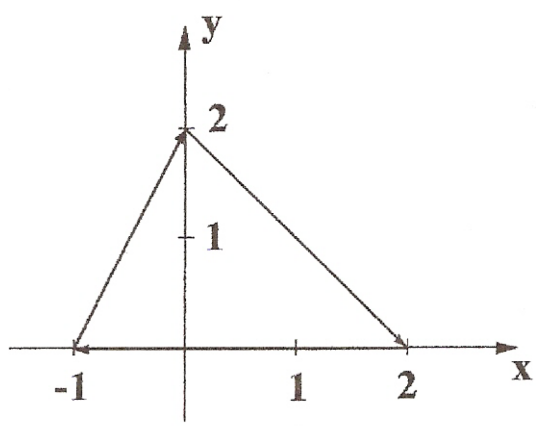
136) Determine la masa de la lámina que corresponde a la región limitada por un pétalo de la rosa $\rho = 2sen2\theta$ en el primer cuadrante; la densidad en un punto de la lámina está dada por $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ donde k es una constante.

Solución: $m = \dfrac{16}{9}k$ unidades de masa.

137) Utilizar el teorema de Green para calcular el valor de $\oint_C x^2 y dx - xy^2 dy$ donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Solución: -8π.

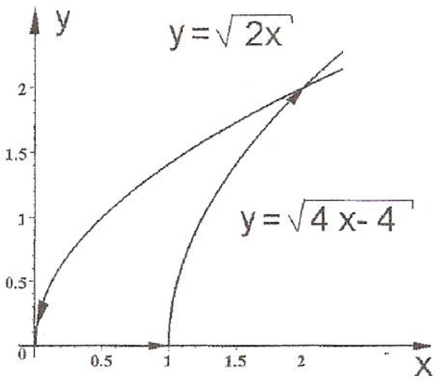
138) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\bar{F}(x, y) = (x^3 + 2y)\hat{i} + (y^2 + 4x)\hat{j}$ al mover una partícula a lo largo de la trayectoria cerrada mostrada en la figura. (3EP/A/2002-1)



Solución: -6 unidades de trabajo.

139) Utilizar el Teorema de Green para calcular

$$\oint_C \left(2y+\sqrt{1+x^6}\right)dx+\left(5x-e^{y^2}\right)dy$$ sobre la trayectoria mostrada en la figura (3EP/A/03-2)



Solución: 4.

140) Determinar el área de la superficie cuya ecuación vectorial es $\bar{F}(u,v)=u^2\hat{i}+v^2\hat{j}+\left(u^2+v^2\right)\hat{k}$ para $0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2$.

Solución: $A=4\sqrt{3}$ unidades de área.

141) Calcular el área de la porción de superficie de ecuación $4-z=x^2+y^2$ localizada por arriba del plano XY.

Solución: $A=\dfrac{\pi}{6}\left[17^{3/2}-1\right]u^2$.

142) Utilizar integración doble para calcular el área de la porción del cono $z^2=x^2+y^2$ comprendida entre los planos $z=1$ y $z=4$. (3EP/A/03-1)

Solución: $A=15\sqrt{2}\pi$ unidades de área.

143) Calcular el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ que está comprendida en el primer octante y que es cortada por el plano $x = z$. (3EP/A/2004-2)
Solución: $A = 9$ unidades de área.

144) Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está comprendida entre los conos $x^2 + y^2 = z^2$ y $3x^2 + 3y^2 = z^2$. (2EF/A/2004-1)
Solución: $A = 2\pi\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$ unidades de área.

145) Calcular el volumen de la región que es limitada por las superficies S_1 y S_2 representadas por:
$S_1 : x^2 + z^2 = 4 - y$, $S_2 : y + 5 = 0$. (3EP/A/2004-1)
Solución: $V = \frac{81}{2}\pi$ unidades de volumen.

146) Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies de ecuaciones $x^2 + z^2 = 9$, $y + z = 4$, $x - 2y - 3z = 12$.
Solución: $V = 90\pi$ unidades de volumen.

147) Calcular el volumen de la región D que es interior al cilindro de ecuación $y^2 + z^2 = 4$, y limitada por el plano $x = 0$ y el paraboloide $y^2 + z^2 + 2x = 16$.
Solución: $V = 28\pi$ unidades de volumen.

148) Dado el campo vectorial $\bar{F}(x,y,z) = z\hat{i} + x\hat{j} - y^2\hat{k}$, utilizar el Teorema de Stokes para calcular $\oint_C \bar{F} \bullet d\bar{r}$, donde C es la intersección del plano $x + y + z - 1 = 0$ con los tres planos coordenados. (1EF/A/2005-2)

Solución: $\dfrac{2}{3}$.

149) Por medio del Teorema de Stokes, calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\bar{F}(x,y,z) = x\hat{i} - z\hat{j} + y\hat{k}$ para desplazar una partícula una vuelta a lo largo de la curva

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Solución: $W = -8\pi$ unidades de trabajo.

150) Sea el campo de fuerzas $\bar{F}(x,y,z) = x\hat{i} - z\hat{j} + y\hat{k}$. Emplear el Teorema de Stokes para determinar el trabajo que realiza el campo $\bar{F}$ para mover una partícula una vuelta a lo largo de la curva C de ecuaciones $C : \begin{cases} z = 2x + 3y \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$.

Solución: $W = 32\pi$ unidades de trabajo.

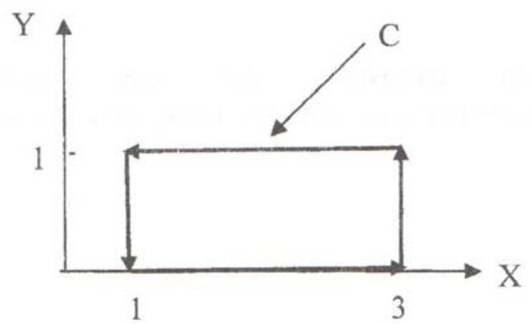
151) Calcular la circulación total del campo vectorial $\overline{F}(x,y,z)=(y-z)\hat{i}+(x+y)\hat{j}+(x+z)\hat{k}$ a lo largo de la curva $C:\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$.

(2EF / SEM. 2013-2)

Solución: Circulación total $=-2\pi$

152) Utilizar el teorema de Stokes para calcular $\oint_C \overline{F}\bullet d\overline{r}$, donde $\overline{F}(\rho,\theta,z)=\overline{e}_\rho+(\rho)\overline{e}_\theta+\overline{e}_z$ está expresado en coordenadas cilíndricas circulares y C es la trayectoria cerrada que se muestra en la figura:

$(2EF\ /\ 2014-1)$



Solución: $\oint_C \overline{F}\bullet d\overline{r}=4$

153) Utilizar el Teorema de Gauss para calcular el valor de la integral $\iint_\gamma \overline{F}\bullet\overline{n}ds$ donde $\overline{F}(x,y,z)=x\hat{i}+y\hat{j}+2\hat{k}$ y γ la superficie de ecuación vectorial $\overline{r}(\phi,\theta)=sen\phi\cos\theta\hat{i}+sen\phi\,sen\theta\,\hat{j}+\cos\phi\hat{k}$ con $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\phi\le\pi$.

Solución: $\iint_\gamma \overline{F}\bullet\overline{n}ds=\frac{8}{3}\pi$.

154) Sea el campo $\bar{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Calcular el valor del flujo neto de $\bar{F}$ a través de una esfera de radio R con centro en el origen.
Solución: flujo = $4\pi R^3$

155) El flujo neto del campo de fuerzas $\bar{F}(x, y, z) = x^3\hat{i} + y^3\hat{j} + z^3\hat{k}$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ es igual a $\frac{384}{5}\pi$ unidades de flujo. Determinar el valor de r. (1EF/B/2004-2)
Solución: $r = 2$.

156) Calcular el flujo neto del campo vectorial $\bar{F}(x, y, z) = (5y^2 + 3z)\hat{i} + (z^3 + 4y)\hat{j} + (x^2 + 2y^3 + 5)\hat{k}$ a través de la superficie cerrada S que envuelve el sólido del primer octante limitado por las superficies de ecuaciones
$x + y + z - 3 = 0,\ x + y + z - 8 = 0,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0$, y $y = 0$.
(2EF / SEM. 2013-1)
Solución: Flujo $= 20\pi$ unidades de flujo

157) Calcular el flujo neto del campo vectorial $\bar{F}(x, y, z) = (x^2 - xz + 3y^2)\hat{i} + (2yz)\hat{j} + (y^2 - 2xz)\hat{k}$ a través de la región D limitada lateralmente por el semi-cono $x^2 + y^2 = z^2$ (con $z \geq 0$) y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
$(2EF/2014-1)$
Solución: Flujo $= \oint\!\!\oint_S \bar{F} \bullet \bar{n}\, dS = 2\pi$ unidades de flujo.

158) Utilizar el Teorema de Gauss para calcular $\oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n} dS$, donde $\overline{F}(x,y,z) = (2xy)\hat{i} - (y^2)\hat{j} + (3z)\hat{k}$ y S es la superficie cerrada que envuelve a la región D del primer octante limitada por las gráficas de $x+y+z=6$, $x+y+z=2$ y $x^2+y^2=1$.

Solución: $\oiint_S \overline{F} \bullet \overline{n} dS = 3\pi$.