CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas

Año 2024 Número 10 18 de agosto

Metodología visual de **enseñanza** de los **sistemas** de **numeración parte 1: Bases**

DRA. Elizabeth Fonseca Chávez

(Coordinadora de ingeniería en telecomunicaciones die)

El tema de los sistemas de numeración es muy común en libros de computación y sistemas digitales; su forma de enseñanza es la misma para la mayoría que toca este tema, es simple y no profundizan. En este artículo, se parte del sistema decimal con el propósito de resaltar las propiedades necesarias para generalizar, y así aplicar el método visual. Posteriormente, utilizando las propiedades ya establecidas se usa el método para bases específicas: bases menores a diez y bases mayores a diez. En el presente artículo, la base dos tiene especial atención debido a su importancia en el desarrollo de Sistemas Digitales y en el desarrollo de nuevas teorías sobre la Computación Cuántica, por lo tanto, se presenta a continuación de lo planteado. Con este método de trabajo, cuando el alumno llega a base dos, desarrolla el sistema de numeración sin dudar. Al final se extrapola para mostrar el sistema de numeración de una base ortogonal (partida del código GRAY) y el sistema de numeración de Qubits.

En este artículo se parte del sistema decimal que se maneja comúnmente, después se resaltan las propiedades necesarias por generalizar y, finalmente, se trabaja el método para bases específicas utilizando estas propiedades, primero para bases menores a diez y luego para bases mayores a diez; después se habla de la base dos, y con el mismo método se desarrolla la numeración.

Un número expresado en un sistema de base r tiene coeficientes multiplicados por potencias de r. En la ecuación 1, se muestra la ecuación que comúnmente se escribe, Mano [1]

$$a_0{}^*r^n+a_{n-1}{}^*r^{n-1}+...+a_2{}^*r^2+a_1{}^*r+a_0+a_1*r^{-1}+a_2*r^{-2}+...+a_m{}^*r^{-m} \quad (1)$$

Donde r es cardinalidad o raíz, Mano [1], an son cada uno de los coeficientes que varían entre 0 y r-1. Mientras Brown [2], ofrece la ecuación 2 exclusivamente para base 10 con coeficientes d, y sólo para su ejemplo del número: 8547.

$$d_{n-1}10^{n-1}+d_{n-2}10^{n-2}+...+d_1 10^1+d_0 10^0 \quad (2)$$

La forma de trabajo es mediante el sistema posicional. En la base 10 cualquier número contenido en este sistema es un múltiplo de potencia de 10, Brown [2]. Por ejemplo, el número

$$3456 \Rightarrow 3000+400+50+6 \Rightarrow 3\,x10^3+4x10^2+5x10^1+6x\,100$$

Ambos autores tratan de sugerir que un número puede representarse por sus coeficientes y sus potencias respectivas a su base.

A continuación, se mostrará de manera gráfica lo que ambos autores comentan, añadiendo nuestra forma visual a la idea con la recta numérica. En ambas direccio-

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

nes el número de la potencia se incrementa uno a uno, la única diferencia es que a la izquierda se tiene números negativos de las potencias. Por otro lado, los coeficientes se asignan respecto a la potencia que corresponde su número de columna, a la izquierda se escribirían los decimales y por lo tanto el centro cuando n=0 corresponde al punto del coeficiente que representa un número real.

En la figura 1 se ilustra el número decimal: 3454.27 en la recta numérica referenciado, abajo, por las ecuaciones de los autores, Mano [1] y Brown [2], vemos que el autor Mano presenta una ecuación completa y Brown plasmó su ecuación únicamente para un ejemplo; la técnica la sigue utilizando con otros ejemplos, para 3454, con 4 cifras, n=4, se tiene n-1=3, n-2=2 y n-3=1, n-4=0, y por lo tanto la última cantidad (3) se multiplicará por 10^{n-1}, es decir 3 x10^3.

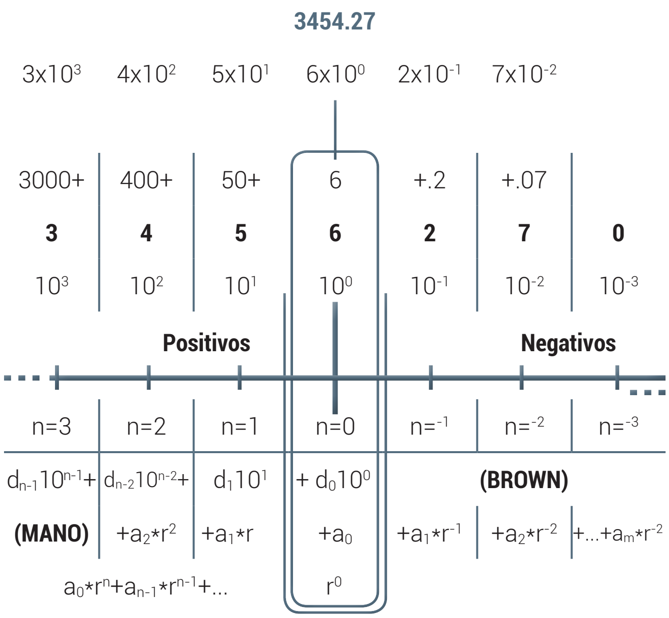

Figura 1. Visualización de la recta numérica, con un número real confrontado con las ecuaciones de los dos autores Mano y Brown

Los libros de diseño digital y lenguajes de computación se dedican exclusivamente a presentar los números de bases 2, 8 y 16; hasta un número limitado y entonces muestran algunos ejemplos mínimos de otras bases pero por conversión de sistemas de numeración Mano[1], Brown[2], Lloris[3], Deitel[4], Tocci[5].

PROPIEDADES DE LAS BASES

Definición 1. Propiedad número 1. Todas las bases se expresan empleando los símbolos arábigos y las letras mayúsculas del alfabeto latino.

Definición 2. Propiedad número 2. Una base queda expresada, por comprensión, usando la palabra "base" seguida de la raíz (cardinalidad) de la misma. A su vez, una base queda expresada, por extensión, como una ordenación de números arábigos.

Ejemplo 1. Base 2= [0,1]
Base 8= [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
Base 10 = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

Definición 3. Propiedad número 3. Toda base comienza con el cero.

Definición 4. Propiedad número 4. El último elemento de la base es igual a la raíz de la base menos uno.

Definición 5. Propiedad número 5. Para bases mayores a 10 se acostumbra a utilizar las letras de la "A" a la "Z". Se usan tantas letras como se necesitan para completar la base. La tabla número 2 nos ilustra la conformación de la base 13, con una referencia en su equivalente decimal (base 10).

Ejemplo 2. Base 11=>11-1=10=>: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A
Base 20=>20-1=19=>: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G H I J

Donde para saber cuál es la letra, referenciamos siempre con respecto a un número decimal a partir del 10 (en decimal):

A=>10, B=>11, C=>12, D=>13, E=>14, F=>15, G=>16, H=>17 I=>18 y J=>19

Definición 6. Propiedad número 6. Para realizar conteos mayores a los permitidos por la raíz de la base, se crea una ordenación nueva mediante el producto cartesiano de la base consigo misma. Se realizan tantos productos cartesianos según se requiera.

Ejemplo 3. Considere la base 3. Con esta base sólo es posible contar de cero a dos. Pero si desea contar más allá se realiza el siguiente producto cartesiano:

Base3´ Base3= [00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22]

Entonces la cardinalidad de los elementos de la ordenación, formada a partir del producto cartesiano de la base tres consigo misma, se calcula como:

Raíz2=32=9

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

Si se desea aumentar la capacidad de conteo, se realiza un triple producto cartesiano, es decir, Base 3×Base 3×Base 3= [000 001 002 010 011 012 020 021 022 100 101 102 110 111 112 120 121 122 200 201 202 210 211 212 220 221 222].

MÉTODO VISUAL

El formato de trabajo para mantener estas propiedades se presenta mediante un arreglo bidimensional, donde la cabecera de las columnas representa a la base de interés, y la columna izquierda representa a los renglones de la misma base de interés.

Para dos espacios de trabajo (base 10 x base 10) mostramos la figura 2, la cual despliega la técnica de colocar la base de interés en renglón y en columna, dentro desarrollamos el sistema de numeración sin equivocación. Se debe notar que en el costado lateral izquierdo y en la cabecera se tiene escrita la base únicamente para referencia, así se presentarán en adelante las diferentes bases. Se parte de este ejemplo muy común para nosotros desde la escuela primaria.

Base de interés										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Figura 2. Se muestra BASE 10 x BASE 10

De forma general se muestra la figura 3 para hacer notar las diferencias entre bases. Todas las bases comienzan por cero, todas terminan con la base-1. En cada base dada, nunca aparece su número de base correspondiente. Después de utilizar un dígito, el número siguiente debe contener dos dígitos y generalmente es el número 10.

Bases: 10	2	3	5	11
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	4	4
5	101	12	10	5
6	110	20	11	6
7	111	21	12	7
8	1000	22	13	8
9	1001	100	14	9
10	1010	101	20	A

Figura 3. Muestra visual del desarrollo de un sistema de numeración para cada base: 10, 2, 3, 5 y 11. Haciendo énfasis visual que todas las bases continúan con el “10” al empezar a utilizar otro dígito.

BASE 4 EN FORMA VISUAL

Para construir el sistema de numeración partimos de la base que se va a desarrollar: 4

Si se trabajara en base 4, requerimos primero presentar la base de trabajo. La base comienza en cero y llega hasta 4-1=3. Se escribe la base 4: 0 1 2 3.

Una vez que se tiene la base se sugiere trabajar gráficamente, acomodando esta base inicialmente en un renglón y a su izquierda nuevamente se escribe la base, pero ahora en columna, esto nos sirve de referencia. Teniendo la base por renglón y columna como referencia, se colocan los datos relacionados en la intersección de columnas y renglones respectivos, esto es base 4 x base 4, como se observa en la figura 4:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

Figura 4. Muestra visual del desarrollo de un sistema de numeración de base 4

Para un sistema de base 5, dos espacios o dos dígitos, el sistema de numeración da (se observa en la figura 5):00 01 02 03 04, 10 11 12 13 14, 20 21 22 23 24, 30 31 32 33 34, 40 41 42 43 44

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

Para tres espacios de trabajo o dígitos da:

000 001 002 003 004	220 221 222 223 224	300 301 302 303 304	400 401 402 403 404
010 011 012 013 014	230 231 232 233 234	310 311 312 313 314	410 411 412 413 414
020 021 022 023 024	240 241 242 243 244	320 321 322 323 324	420 421 422 423 424
030 031 032 033 034		330 331 332 333 334	430 431 432 433 434
040 041 042 043 044		340 341 342 343 344	440 441 442 443 444
100 101 102 103 104			
110 111 112 113 114			

Figura 5. Muestra visual del desarrollo de un sistema de numeración de base 5

Para cuatro espacios de trabajo o tres dígitos tendríamos el inicio con 0000 0001 0002 0003 0004... después 444, 1000 1001 1002 1004... y terminaría con 4440,4441 4442 4443 y 4444.

BASE 2.
Ahora aplíquese el conocimiento anterior a la base 2. Véase la figura 6

De trabajos o dimensiones por utilizar se les llama bit, como unidad mínima de información.

Base: 2 tenemos dos elementos, comienza por cero y termina con 2-1=1.

Base 2: 0 1. Para un bit tenemos el siguiente sistema de numeración: 0 1

Para dos bits 00 01 10 11	Para tres bits 000 001 010 011 100 101 110 111	Para cuatro bits 0000 0001 0011 0100 0101 0110 0111 1000 1001 1011 1100 1101 1110 1111	Para 5 bits: 00000 00001... 10111,... 11110, 11111, Para n bits 00000 00001...

Figura 6. Muestra visual del desarrollo de un sistema de numeración de base 2

Véase la figura 7, entonces la construcción del conocimiento para la base dos en forma visual, esto sirve para entender cómo se construye el sistema de numeración binario.

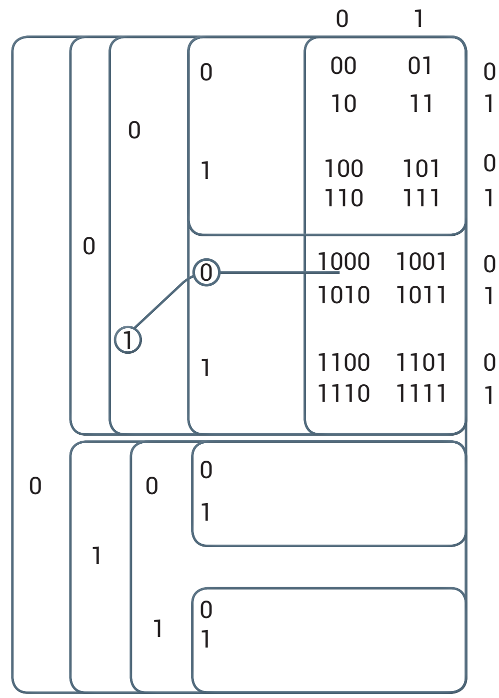

Figura 7. Despliegue de la base dos para "n" bits

BASES MAYORES A 10 EN FORMA VISUAL

Para base 11, ya se considera mayor a la base 10 por lo tanto requerimos asignar las letras necesarias para completar la base, en este caso se utiliza "A" que corresponde al elemento 10.

Base 11: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A

Para un dígito o dimensión: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A

Para dos dígitos o dimensiones:00 01 02 03 04 05 06 07 08 09 0A 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 1A ... 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 9A A0 A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 AA

Véase la figura 8, en el formato visual.

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

Base 11		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0	A	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
0	2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2A
0	3	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	3A
0	4	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	4A
0	5	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	5A
0	6	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	6A
0	7	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	7A
0	8	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	8A
0	9	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	9A
0	A	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	AA
1	0	100										

Figura 8. Despliegue de la base 11, con sus referencias en columnas y renglones, adicionalmente se muestra el número siguiente inmediato de tres espacios (100)

Se presentó en este artículo un nuevo método visual que mejora la enseñanza de los sistemas de numeración, para las materias de computación para ingenieros y diseño de sistemas digitales de las carreras de ingeniería, con el propósito de abordar sin ambigüedades el sistema binario; también, nos ayudó a crear otros sistemas de numeración y entender los nuevos sistemas de numeración que nos están llegando, como son los sistemas de numeración ortogonales y los Qbits (estos los veremos en el otro boletín).

Este método visual, donde una imagen dice más que mil palabras, para este caso funciona muy bien. La forma de trabajo se ha ido mejorando en las exposiciones con los alumnos. Evidentemente en los exámenes sobre base 2, 8 y 16 el alumno rápidamente desarrolla el sistema de numeración.
El entendimiento con las conversiones entre bases y las operaciones binarias es muy rápido, con respecto a otras clases donde no se utiliza este método.

REFERENCIAS

[1] Morris Mano. Diseño digital. Tercera edición. (También en todas sus ediciones) pág. 1-35.

[2] Brown Stephen –Vranesic Zvonko. Cap. 5. Representación de números. Fundamentos de Lógica digital con VHDL, segunda edición. Mc Graw Hill Pág. 245-249.

[3] Lloris, -Prieto-Parrilla. Sistemas Digitales.2003, ed. Mc Graw Hill pág.173-186

[4] Deitel, Apéndice E, Cómo programar en c/c + +, segunda edición, Prentice Hall, pág.892-906.

[5] Ronald J. Tocci Cap.2 Sistemas Numéricos y códigos. SISTEMAS DIGITALES principios y aplicaciones Sistemas, pág. 20-44

[6] Santiago Casado, Los sistemas de Numeración a la largo de la historia, santiago@airastur.es http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html

[7] Luis de la Peña, capítulo 3.Ecuación estacionaria de Schrodinger, introducción a la mecánica cuántica, UNAM/fondo de cultura económica. Page.62.

[8] Ivan S. Oliveira, NMR Quantum Information Processing, Ed.ELSEVIER, 2007; pág. 114.

[9] David McMahon, Quantum Computing Explained, Wiley- Interscience. 2007.

[10] Zbigniew Oziewicz,Jose Hugo Max, párrafo 3.1 Dirac braket, page.11.

[11] Zbigniew Oziewicz, BIRKHOFF'S THEOREMS VIA TREE OPERADS, párrafo 2: Algebras in Graphic, pág. 2 Bulletin of the Section of Logic Volume 28/3 (1999), pp. 1–14.

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel