

# CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas



Año 2024

Número 14

15 de octubre





## 9.1 Tabla rápida de obtención del sistema de numeración ortogonal binaria de qbits

Así como se muestra la forma rápida de obtención del sistema binario en el apéndice A, aquí se muestra también la detección del patrón visual, específicamente para este sistema.

El sistema ortogonal binario no funciona por ponderación "completamente", porque fueron intercambiados determinados bits; sin embargo, se continuará con la notación con ponderación por columna 24 23 21 20, con la precaución debida.

Se detecta el siguiente patrón: Para la columna 20.  $20=1$ . Tenemos que el primer bit (1) es cero y después se deben presentar, 11, 00, 11, 00, 11 etc. (dos "unos", dos "ceros", dos "unos" dos "ceros" ...).

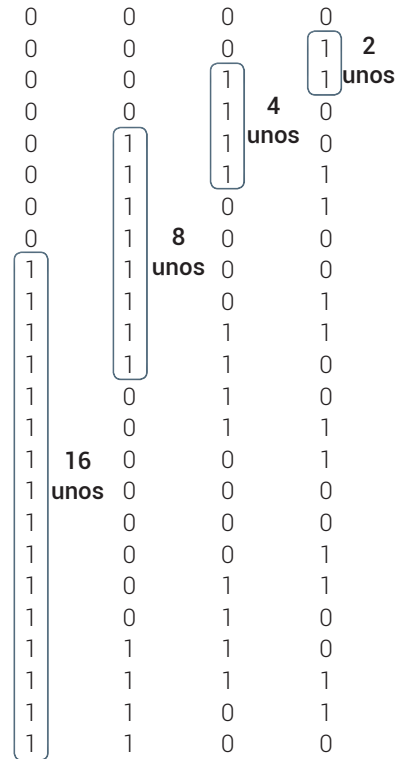
Para la columna 21.  $21=2$ . Tenemos dos bits (2), los primeros que valen cero, después se presenta esta secuencia: 1111, 0000, 1111, 0000, etc. (cuatro "unos", cuatro "ceros", cuatro "unos", cuatro "ceros" ...).

Para la columna 22.  $22=4$ . Tenemos 4 bits (4), los primeros que valen cero, después se presenta esta secuencia: 11111111, 00000000, 11111111, etc. (8 ceros, 8 unos, 8 ceros, 8 unos...).

Para la columna 23.  $23=8$ . Tenemos 8 bits (8), los primeros que valen cero, después se presenta esta secuencia: 1111111111111111, 0000000000000000, 1111111111111111, etc. (16 unos, 16 ceros, 16 unos, 16 ceros...).

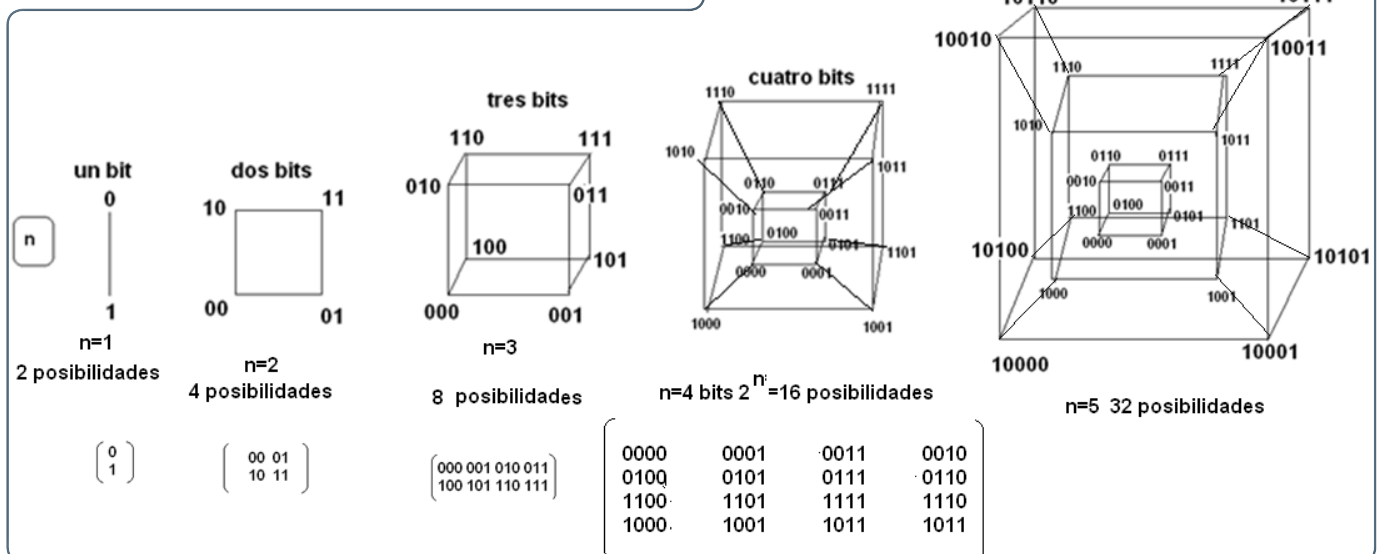
En la siguiente figura se muestra el patrón para un Qbits de 4 bits.

**Figura 28.** Muestra de detección de un patrón para poder determinar rápido los estados posibles del Qbits para cuatro bits



En la figura 29 se muestra una comparación entre sistemas ortogonales y Qbits.

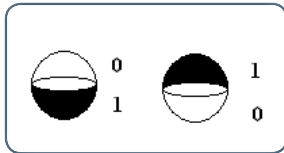
**Figura 29.** Muestra visual de comparación de Hiper cubo, ortogonal gray y posibilidades de estados de Qbits



## 10 Estados de qubits

Un Qubit representa un átomo con núcleo de espín 1/2, como el átomo Hidrógeno. La generalidad en el mundo real es que el átomo no está solo, sino que forma parte de una molécula. Por lo tanto, No hay Qubits independientes. Un Qubit puede ser 0 a 1.

**Figura 30.** Representación visual de un Qubit



### 10.1 Matriz densidad

La forma de caracterizar el sistema es mediante una matriz de densidad, la cual reúne todos los estados.

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3 \quad (4) \quad \otimes \text{significa producto tensorial}$$

En la figura 31 se observa cómo opera el producto tensorial; cada elemento de la primera matriz "a" se multiplica por toda la matriz "b" (elemento por elemento).

**Figura 31.** Cómo funciona el producto tensorial

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rho = a \otimes b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La dimensión (DIM) de la matriz de densidad (Rho) es igual a  $2N \times 2N$  de la i-ésima molécula que contiene N Qubits.

Si tenemos: 1Qubits  $\{(0,1) \text{ o } (1,0)\}$

Entonces  $\text{DIM}(\text{Rho})=2 \times 2=4$  átomos, dimensión de  $\text{Rho}=2 \times 2$ .

Es decir: En la matriz de densidad de una molécula compuesta de 4 átomos, cada átomo es la matriz de dimensión  $2 \times 2$ .

2Qubits  $\{00, 01, 10, 11\}$   $\text{DIM}(\text{Rho})=2 \times 2=4$ ; 16 estados obtenidos

3Qubits  $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$   $\text{DIM}(\text{Rho})=2 \times 2=4$ ; 16 estados obtenidos

4Qubits  $\text{DIM}(\text{Rho})=2 \times 2=4$ ; 256 estados obtenidos

5Qubits  $\text{DIM}(\text{Rho})=2 \times 2=4$ ; 1024

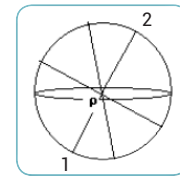
6Qubits  $\text{DIM}(\text{Rho})=2 \times 2=4$ ; 4096

7Qubits  $\text{DIM}(\text{Rho})=2 \times 2=4$ ; 16384, etc.

La construcción de la matriz de densidad es una suma convexa con sus probabilidades  $\omega$ s respectivas. En la esfera de Bloch, de la figura 32, observamos la representación de Rho para un Qubit y su ecuación 5, respectiva, que representa una combinación lineal de estados.

$$\rho = a|1\rangle\langle 1| + d|2\rangle\langle 2|$$

$$\rho = \omega_1|1\rangle\langle 1| + \omega_2|2\rangle\langle 2| \quad (5)$$



**Figura 32.** La esfera de Bloch para dos estados

Las probabilidades  $\omega$ s se obtienen de la frecuencia con que aparecen estos estados. En la ecuación 6, notamos el desglose de la matriz de densidad en dos estados puros.

$$\rho = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

### 10.1.2 operador densidad $|a\rangle\langle a|$

Ahora se crea un sistema de 1Qubit x 1Qubit, con lo que se obtendrán 4 elementos.

En la ecuación 7 se muestra la obtención de todos los estados de un producto tensorial, de un sistema de un Qubit contra otro. En la figura 33 tenemos ese resultado visto de diferentes maneras: a) en matriz de una columna, b) en brakets de dos bits, o visto como c) operadores densidad (se comenta a continuación), ([9]Zvigniew).

$$\{|0\rangle, |1\rangle\} \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\} = \{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \quad (7)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \text{b)} \quad |00\rangle \quad |01\rangle \quad |10\rangle \quad |11\rangle \\
 \text{c)} \quad |0\rangle\langle 0| \quad |0\rangle\langle 1| \quad |1\rangle\langle 0| \quad |1\rangle\langle 1|
 \end{array}$$

**Figura 33.** Forma de presentar los estados puros: a) como vector b) como bras c) como operadores

Si en la matriz de densidad se tienen todos los estados presentes y conocidos, el sistema se denomina completo, pero si no, es incompleto.

Un estado real de un Qubits puede descomponerse en una base de operadores con números complejos, como se observa en la ecuación 8. Aquí, notamos que podemos representar cada matriz como un operador que pertenece a un grupo de operadores, que a su vez forman una matriz de densidad real. Las letras a, b, c y d representan las probabilidades de que aparezca ese estado.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$|1\rangle\langle 1| \quad |1\rangle\langle 2| \quad |2\rangle\langle 1| \quad |2\rangle\langle 2|$

De la ecuación 8 se hace notar que no todos los elementos de esta descomposición son estados. Sólo  $|1\rangle\langle 1|$  y  $|2\rangle\langle 2|$  son estados, ya que la traza (suma de la diagonal) de cada matriz, da UNO. Quedando un polinomio mínimo, el cual se observa en la ecuación numero 9 siguiente.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$|1\rangle\langle 1| \quad |2\rangle\langle 2|$

Esta nomenclatura  $|1\rangle\langle 1|$  representa una matriz armada de una multiplicación tensorial, de un vector renglón  $|1\rangle$  con un vector columna  $\langle 1|$ ; se le llama "operador de proyección". En la ecuación 10 se despliegan dos vectores a y b y se obtiene su producto tensorial, este resultado representa un estado, que es un operador de densidad.

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b = (0 \ 1); \quad a \otimes b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Los Qubits tienen estados que son puros y mixtos.

## 10.2 Estado puro

Todo el sistema o matriz de densidad, que representa los estados de los Qubits, debe tener determinadas características para ser trabajado.

De inicio, todo el sistema debe trabajar con estados independientes (ortonormales). Sobre los operadores de proyección, se precisa que deban ser:

- 1) traza ( $\rho$ )=1
- 2) hermitianos  $\rho^*=\rho$
- 3) idempotentes  $\rho^2=\rho$

Sus operadores por supuesto son mutuamente ortogonales con eigenvalores no negativos.

Se considera el sistema completo porque se conocen todas sus conexiones.

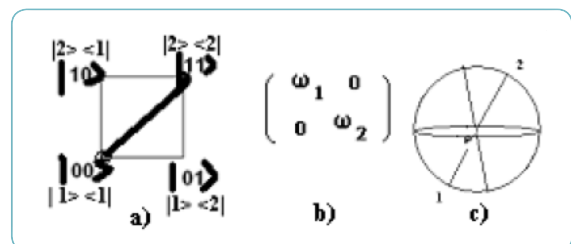
## 10.3 Estado mixto

Si la matriz de densidad no cumple con la traza es un estado mixto, el cual no se tiene todas las conexiones completas, por lo que se le llama incompleto. Una forma de comprobar si es mixto es que la traza  $\rho=1$  y además si traza ( $\rho^2$ ) < 1.

## 10.4 Sistema de numeración estados puros

Conocemos el sistema completo y la traza (Rho)=1. Los pesos ( $\omega$ ) todavía no los utilizamos. Aquí se muestra la evolución de los operadores de densidad.

1 Qubit => DIM(Rho)=4: Partimos de 4 posibilidades 00, 01, 10 y 11; sin embargo, de estas sólo tenemos dos estados 00 y 11; como se observa en la figura 34, inciso a (hipercubo), con esto tenemos una matriz de densidad sólo con  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , como se observa en el inciso b; y lo comparamos con la esfera de Bloch, en el inciso c).



**Figura 34.** Representación de dos estados en a) hiper-cubo, b) matriz de densidad y c) esfera de Bloch

Después mostramos los simples resultados de cómo se obtienen las 4 posibilidades 00, 01, 10 y 11 en la figura 35.

Figura 35. Obtención con programa en computadora para 2 Qubits con sus cuatro posibilidades y su operador de densidad, notando de esta figura 35 que los únicos estados son rho11 y rho22.

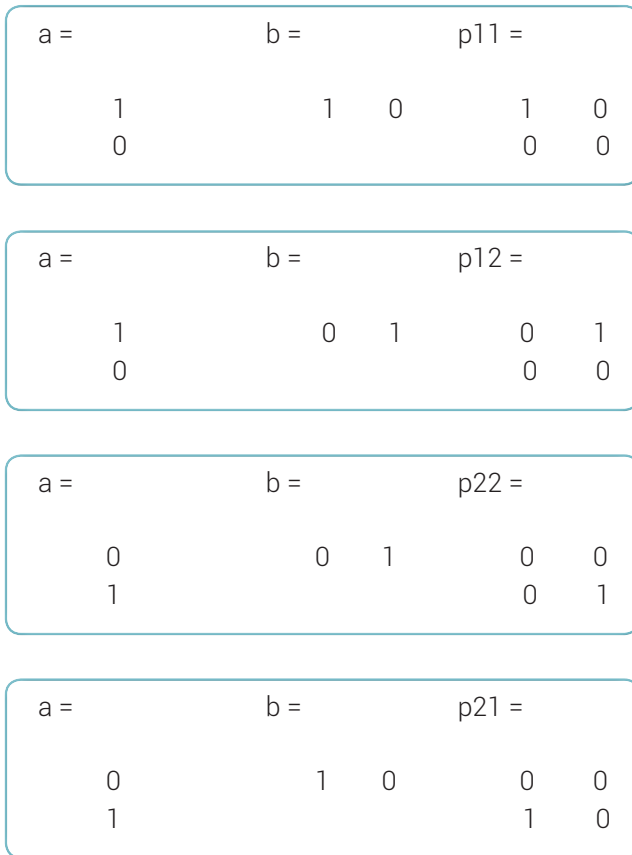


Figura 35. Obtención con programa en computadora para 2 qubits, con sus cuatro posibilidades y su operador de densidad, notando de esta figura 35 que los únicos estados son Rho11 y Rho22 (traza=1)

2qubits=> DIM(Rho)=16: Para 16 posibilidades, mostramos la figura 36 con la multiplicación de ÚNICAMENTE los que son estados

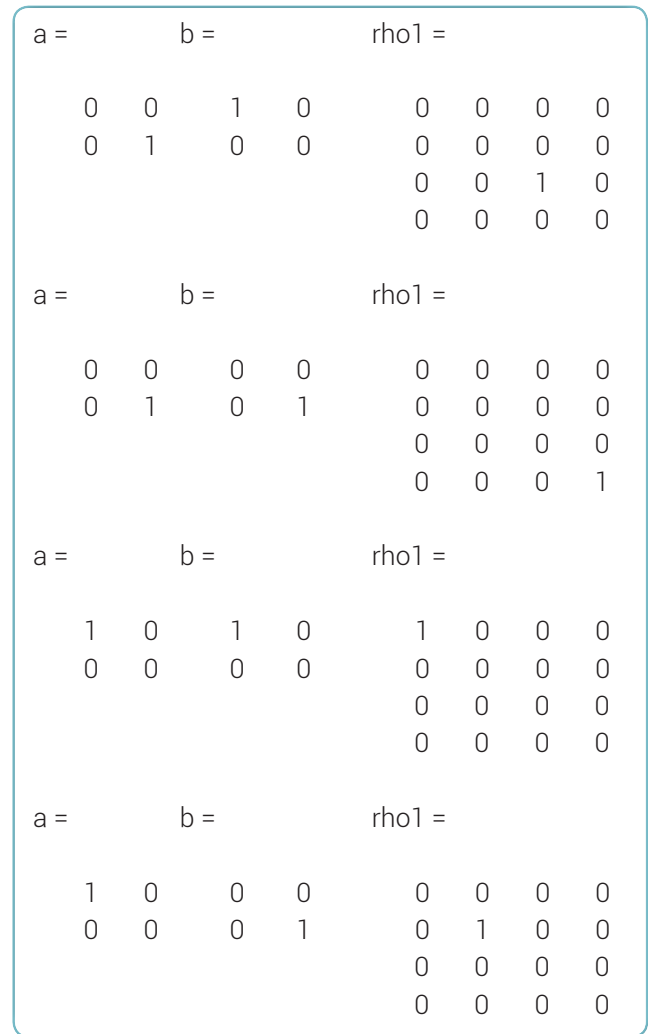


Figura 36. Obtención del operador de densidad, a partir de Qubits de 2

Con esto, tenemos la figura 37 que nos muestra lo obtenido en la esfera de Bloch inciso a), en el hipercubo b) y la matriz Rho c).

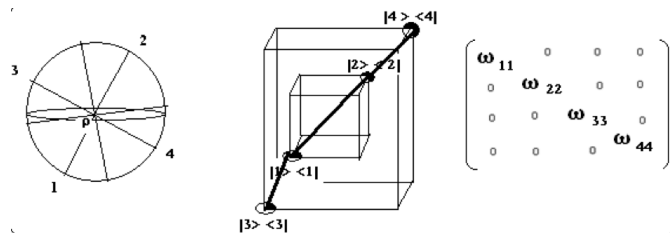
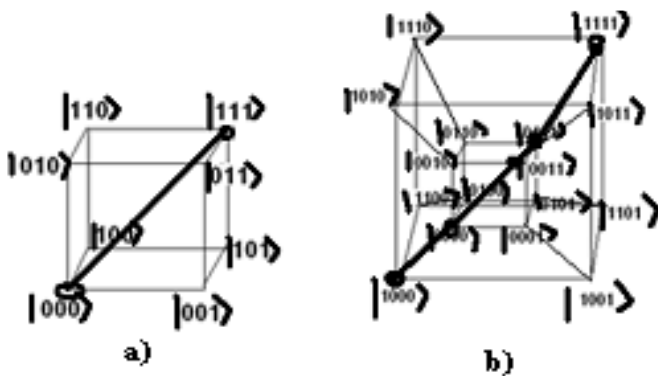


Figura 37. Representación de 4 estados en a) hipercubo b) matriz de densidad y c) esfera de Bloch

Enseguida, ya tenemos nuestra generalización únicamente con el hipercubo, para 3bits en el inciso a, y 4 bits en el inciso b; comprobando que todas las operaciones se basan en la diagonal y se obtienen resultados únicamente para diagonales, o lo que es lo mismo, para estados aceptados.

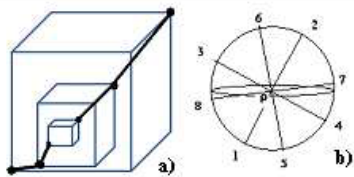




**Figura 38.** Generalización de estados obtenidos para 3 y 4 Qubits

4qubits=> DIM ( $\rho$ )=32: Con 32 posibilidades logramos percibir los posibles resultados en la matriz de densidad para la combinación de estados puros de 4x4 Qubits.

De aquí tenemos, evidentemente nuestro hiper-cubo a) y con la esfera de Bloch b). Con sus resultados obtenidos.



**Figura 43** Representación de 16 estados en a) hiper-cubo b) esfera de Bloch

Como se observa, se continúa la numeración de la misma forma.

El entendimiento con las conversiones entre bases y las operaciones binarias es muy rápido, con respecto a otras clases donde no se utiliza este método.

Se realizó el sistema de numeración ortogonal, para compararlo con sistema del hiper-cubo y los Qubits de forma visual, utilizando el método.

Sobre los Qubits, se estudió desde el nacimiento del Qubit como combinación lineal de dos datos 0 y 1 al mismo tiempo; se observó cómo se va generando esta propagación con respecto al aumento de número de bits, y una forma rápida de escribir este sistema.

Después, se estudiaron los estados cuánticos puros y un poco los mixtos, como se obtienen dada su matriz de

densidad, pudimos generar un sistema de numeración respecto a la matriz de densidad de estados cuánticos puros, sin embargo, para obtenerlos para mixtos aún falta información por completar en investigación, la cual se presentará en artículos próximos.

## Referencias

- [1] Morris Mano. Diseños digitales. Tercera edición. (También en todas sus ediciones) pág. 1-35.
- [2] Brown Stephen –Vranesic Zvonko. Cap. 5. Representación de números. Fundamentos de Lógica digital con VHDL, segunda edición. Mc Graw Hill Pag. 245-249
- [3] Lloris, -Prieto-Parrilla. Sistemas Digitales.2003, ed. Mc Graw Hill pág.173-186
- [4] Deitel, Apéndice E, Cómo programar en c/c++, segunda edición, Prentice Hall, pag.892-906.
- [5] Ronald J. Tocci Cap.2 Sistemas Numéricos y códigos. SISTEMAS DIGITALES principios y aplicaciones Sistemas, pág. 20-44
- [6] Santiago Casado, Los sistemas de Numeración a lo largo de la historia, santiago@airastur.es <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html>
- [7] Luis de la Peña, capítulo 3. Ecuación estacionaria de Schrodinger, introducción a la mecánica cuántica, UNAM/fondo de cultura económica. Pág. 62.
- [8] Ivan S. Oliveira, NMR Quantum Information Processing, Ed. ELSEVIER, 2007; pág. 114.
- [9] David McMahon, Quantum Computing Explained, Wiley- Interscience. 2007.
- [10] Zbigniew Oziewicz, José Hugo Max, párrafo 3.1 Dirac bracket, pág.11.
- [11] Zbigniew Oziewicz, BIRKHOFF'S THEOREMS VIA TREE OPERADS, párrafo2: Algebras in Graphic, pag. 2 Bulletin of the Section of Logic Volume 28/3 (1999), pp. 1-14.