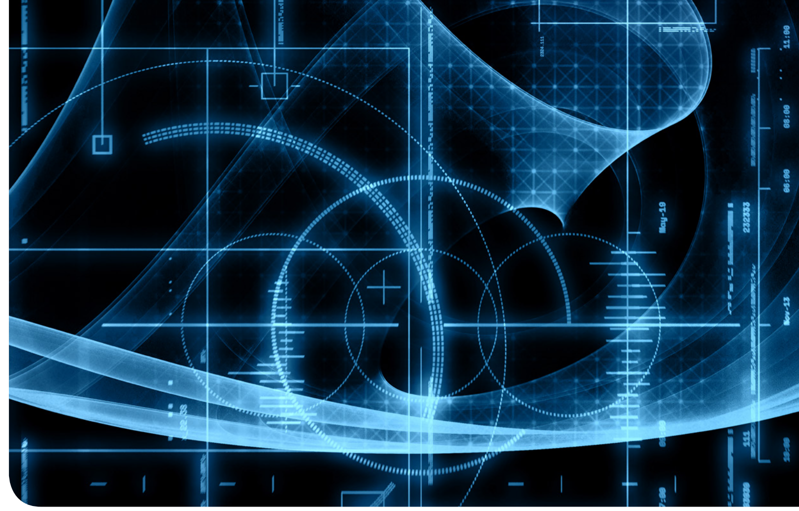
CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas

Año 2024 Número 15 30 de octubre

El trabajo de frontera móvil como área bajo la curva



Rigel Gámez Leal

Departamento de física y química de la DCB

En la Termodinámica es fundamental el estudio de la energía y sus transformaciones. Aunque no es sencillo tener un concepto único sobre energía, sabemos que esta se conserva, por lo que cualquier transformación asociada con ella debe cumplir con este hecho. Una forma de trabajo mecánico muy común, y de múltiples aplicaciones en la ingeniería, es aquella relacionada con la expansión o compresión de un gas en un cilindro-émbolo, lo que implica una variación del volumen de dicho fluido. En la figura 1 se muestra un gas, el cual al aumentar su volumen mueve un pistón logrando que se tenga un trabajo de expansión; al regresar a su posición inicial tendríamos un trabajo de compresión del gas.

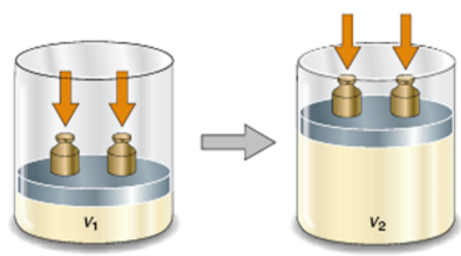


Figura 1. Al expandirse el gas, aumenta el volumen de este, lo que hace que tengamos un trabajo de frontera móvil.
Referencia: Cienciadelux – Página 42 – Blog de Enrique Castaños dedicado a la enseñanza y la divulgación de la Ciencia (wordpress.com)

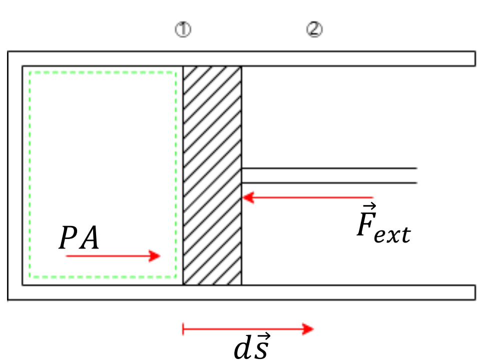


Figura 2. Diagrama en el que se muestra un gas que se expande, por lo que el émbolo se desplaza de la posición 1 a la 2. Obsérvese que estamos despreciando el peso del émbolo.

Desde el punto de vista de la Mecánica podemos calcular el trabajo que realiza el gas, como sigue:

$$\delta w = F_{ext} \cdot dS$$

Con base en el álgebra vectorial, podemos escribir

$$\delta w = \left|F_{ext}\right|\left|dS\right| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo que se forma entre los vectores F_{ext} y dS; en la figura anterior, se puede observar que dicho ángulo tiene un valor de 180^0, por lo que

$$\delta w = -F_{ext} dS$$

De acuerdo con lo anterior, si queremos encontrar el trabajo total desarrollado por el gas al expandirse de la posición 1 a la 2, tenemos

$${}_1W_2 = -\int_1^2 F_{ext} \cdot dS$$

Consideremos ahora que el gas se expande casi estáticamente; es decir, que en todo momento la suma de fuerzas que actúan sobre el émbolo es cero, entonces

$$\sum F = 0$$

Por lo tanto

$$F_{gas} = -F_{ext}$$

Entonces, en forma escalar tenemos

$$\left|F_{ext}\right| = \left|F_{ext}\right|$$

Por lo tanto

$${}_1W_2 = -\int_1^2 F_{gas} \cdot dS$$

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

Sabemos, por otra parte, que la presión es el módulo de una fuerza de contacto que actúa sobre una superficie de contacto, por lo que

$$P = \frac{F}{A}$$

de donde

$$F = PA$$

Si sustituimos la expresión anterior en el cálculo del trabajo, tenemos

$${}_1w_2 = -\int_1^2 P_{gas} A dS$$

y, como

$$AdS = dV$$

el cálculo del trabajo de frontera móvil realizado por el gas se puede escribir como

$${}_1w_2 = -\int_{V_2}^{V_1} P_{gas} dV \qquad (1)$$

Es importante enfatizar que la expresión anterior es válida para valores de presiones absolutas (es decir, siempre positivas).

En la Termodinámica es muy frecuente trabajar con gráficos de propiedades, por ejemplo, el que se muestra en la figura 3.

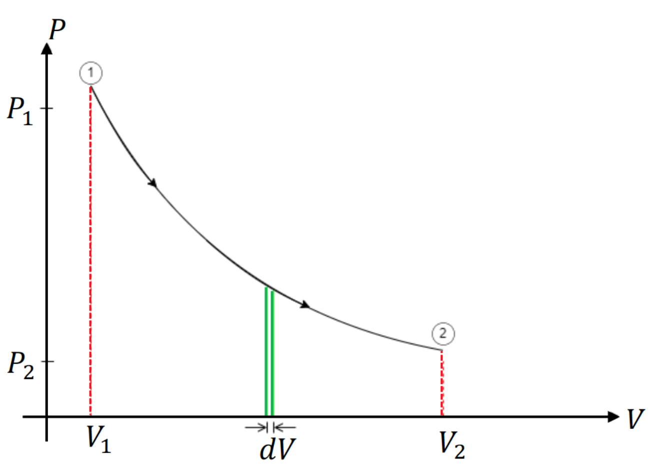
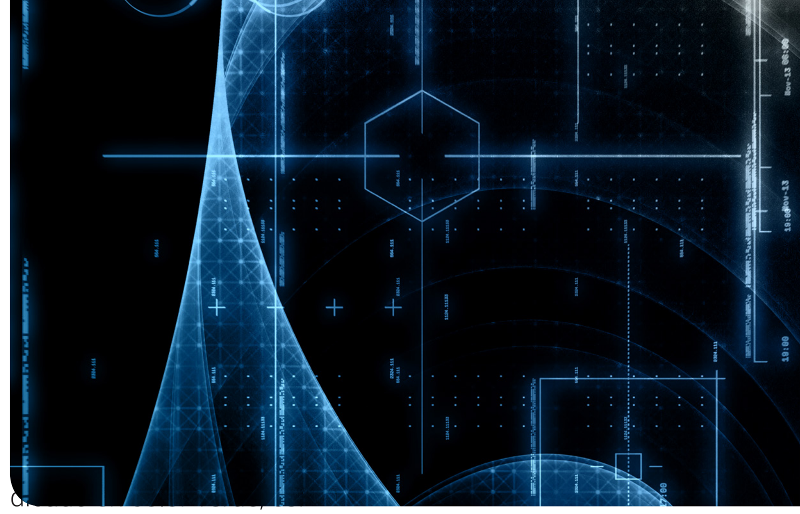


Figura 3. Gráfica de la presión absoluta de un gas, en función del volumen, cuando éste se expande del estado 1 al estado 2.



$$A_{rectángulo} = PdV$$

Sin embargo, si queremos el área total bajo la curva podemos calcularla como sigue

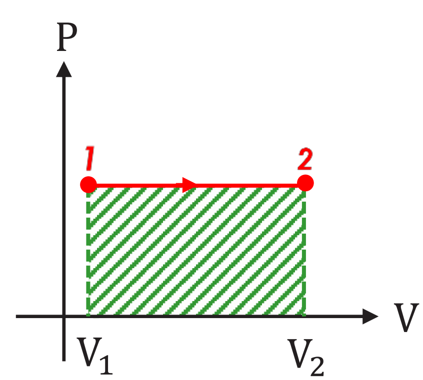
$$A_{total} = \int_{V_1}^{V_2} PdV \qquad (2)$$

Nota. Observe que la gráfica se tendría siempre en el primer cuadrante, ya que las presiones son absolutas y no hay volúmenes negativos.

Si comparamos la expresión (1) con la (2) podemos concluir que el área bajo la curva, mostrada en la figura 3, resulta ser la magnitud del trabajo de expansión de un gas. Lo anterior muestra una aplicación muy importante del Cálculo Integral en el estudio de la Termodinámica.

Con base en lo anterior, podemos mostrar algunos ejemplos del cálculo del trabajo de frontera móvil (o de expansión) para algunos procesos termodinámicos.

a) Proceso isobárico constante



$$P = c \quad (c = cte)$$

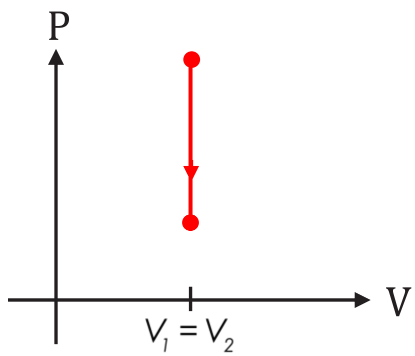
$${}_1w_2 = -\int_{V_1}^{V_2} PdV$$

$${}_1w_2 = -P\int_{V_1}^{V_2} dV = -P(V_2 - V_1)$$

$${}_1w_2 = -P\Delta V_{12}$$

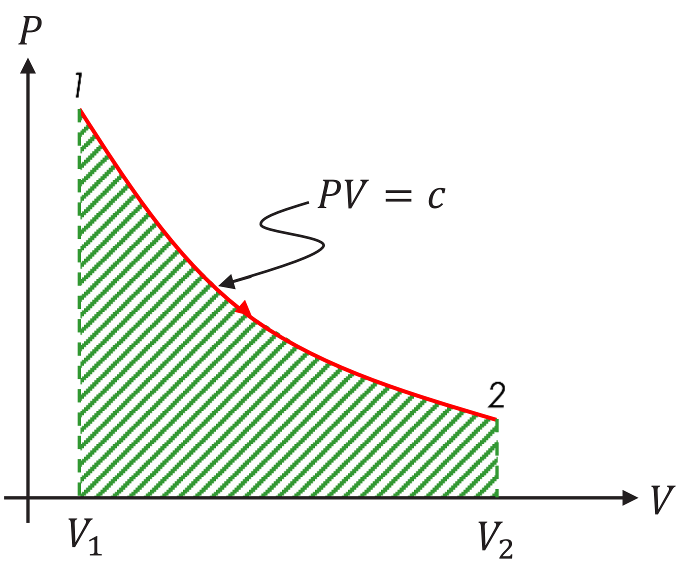
Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

b) Proceso isométrico (a volumen constante)



$${}_1w_2 = -\int_{V_1}^{V_2} PdV \text{ ; como } dV = 0\text{ , } {}_1w_2 = 0$$

c) Proceso isotérmico (a temperatura constante)

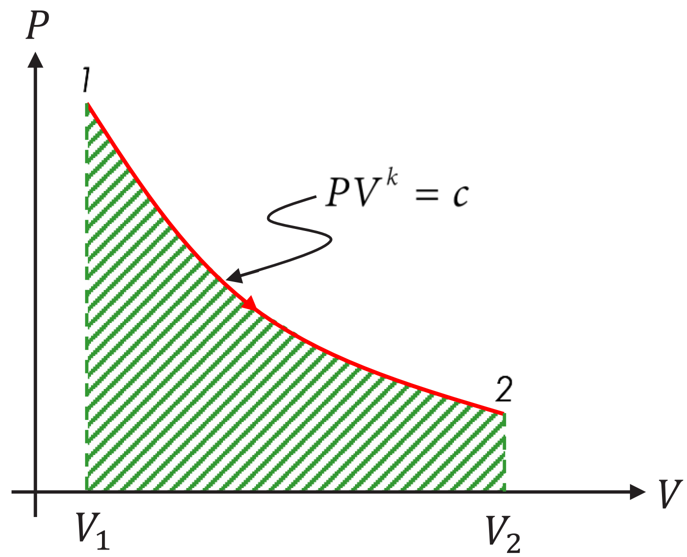


$$PV = c \quad ; \quad c = cte \quad \Rightarrow \quad P = \frac{c}{V}$$

$${}_1w_2 = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V} dV \quad \Rightarrow \quad {}_1w_2 = -c\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -c\left[\ln V\right]_{V_1}^{V_2} = -c\ln\frac{V_2}{V_1}\,{}_1w_2$$

donde

d) Proceso adiabático (Q=0, no hay interacción térmica)



$$P = \frac{c}{V^k} \quad ; \quad {}_1w_2 = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V^k} dV = -c\int_{V_1}^{V_2} V^{-k} dV$$

$${}_1w_2 = -c\left[\frac{1}{-k+1} V^{-k+1}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{c}{k-1}\left[V^{1-k}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{c}{k-1}\left[V_2^{1-k} - V_1^{1-k}\right]$$

$${}_1w_2 = \frac{1}{k-1}\left[cV_2^{1-k} - cV_1^{1-k}\right] \quad ; \quad P_1V_1^k = c = P_2V_2^k$$

$${}_1w_2 = \frac{1}{k-1}\left[P_2V_2^kV_2^{1-k} - P_1V_1^kV_1^{1-k}\right] = \frac{1}{k-1}\left[P_2V_2 - P_1V_1\right] = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{k-1}$$

Referencias

- Cengel Y. y Boles M. "Termodinámica". McGraw Hill. Séptima edición, 2012.
- Serway R. y Vuille C. "Fundamentos de Física". Volumen 1. Cengage Learning. Novena edición, 2012.
- Notas de clase personales.

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel