

CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas



Año 2024

Número 16

15 de noviembre



Iluminación sobre una mesa circular

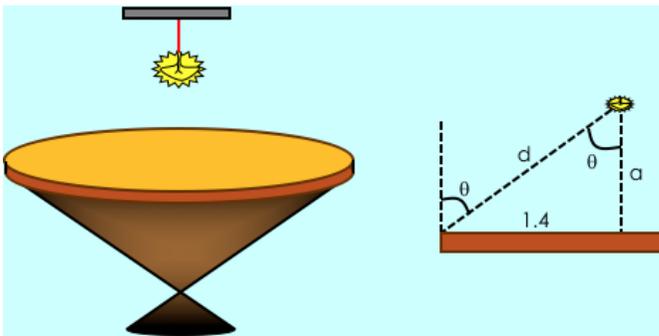
Manuel Vacio González y
Pablo García Y Colomé

Departamentos de física y química y de matemáticas de la DCB

Una lámpara está colgada sobre el centro de una mesa cuya superficie es circular, con 1.40 m de radio. Se requiere saber a qué altura sobre la mesa deberá estar la lámpara para que la iluminación en el borde sea la máxima.

Este problema toma en cuenta conocimientos de Trigonometría, Cálculo y Geometría Analítica y Óptica.

Los modelos físico y geométrico, con magnitudes constantes y variables son los siguientes:



Nota. **Ley del coseno en iluminación.** Cuando la dirección de la luz forma un determinado ángulo con la superficie sobre la que incide, la iluminancia se calcula, aplicando la ley de la inversa del cuadrado de la distancia, pero multiplicando por el coseno del ángulo correspondiente.

Considérese que la iluminación es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de la luz.

El modelo matemático corresponde a la iluminación, que se expresa en términos del ángulo de incidencia y del radio de la mesa. Así, queda de la siguiente forma, haciendo uso del Teorema de Pitágoras:



$$i = k \frac{\cos\theta}{d^2} \Rightarrow i = k \frac{\cos\theta}{a^2 + (1.4)^2}$$

Para relacionar a las variables "a" y "θ" se utiliza la ecuación auxiliar:

$$\cot\theta = \frac{a}{1.4} \Rightarrow a = 1.4 \cot\theta$$

Se sustituye este valor en la iluminación y se tiene que:

$$i = k \frac{\cos\theta}{(1.4 \cot\theta)^2 + (1.4)^2} \Rightarrow i = k \frac{\cos\theta}{(1.4)^2 (\cot^2\theta + 1)} \Rightarrow i = k \frac{\cos\theta}{(1.4)^2 \csc^2\theta}$$

$$\therefore i = \frac{k}{1.96} \sin^2\theta \cos\theta$$

Ahora se resuelve el problema de optimización, mediante la derivada de esta función y se obtiene:

$$\frac{di}{d\theta} = \frac{k}{1.96} [\sin^2\theta (-\sin\theta) + \cos\theta \times 2\sin\theta \cos\theta]$$

$$\frac{di}{d\theta} = \frac{k}{1.96} (-\sin^3\theta + 2\sin\theta \cos^2\theta) \Rightarrow \frac{di}{d\theta} = \frac{k \sin\theta}{1.96} (-\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)$$

Para determinar los puntos críticos donde la derivada es nula o no existe se hace lo siguiente:

$$\frac{di}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{k \sin\theta}{1.96} (-\sin^2\theta + 2\cos^2\theta) = 0$$

$$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

Este valor no se considera ya que no se cumplirían las condiciones del problema.

$$-\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 0 \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2 \Rightarrow \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{2}$$

Es obvio que no hay valores donde la derivada no exista, luego cuando $\tan\theta = \sqrt{2}$ es donde la iluminación es máxima. Entonces, la altura de la lámpara, para que la iluminación en el extremo de la mesa sea la mejor es igual a:

$$a = 1.4 \cot\theta \Rightarrow a = \frac{1.4}{\tan\theta} \Rightarrow a = \frac{1.4}{\sqrt{2}} \therefore \boxed{a \approx 0.99 \text{ m}}$$

Es evidente que una mesa de 2.80 m de diámetro en su superficie circular es grande para el común de los hogares. A continuación, se presenta una tabla donde quienes poseen una mesa de otro diámetro pueden saber a qué altura sobre su superficie colocar la fuente de luz para que quien escribe en la orilla -los hijos su tarea, la lista de compras, etc., tengan la mayor iluminación posible.

Diámetro (cm)	Radio (cm)	Altura lámpara Máxima iluminación (cm)
80	40	28
120	60	42
160	80	57
200	100	71
240	120	85
280	140	99

ARQUÍMEDES

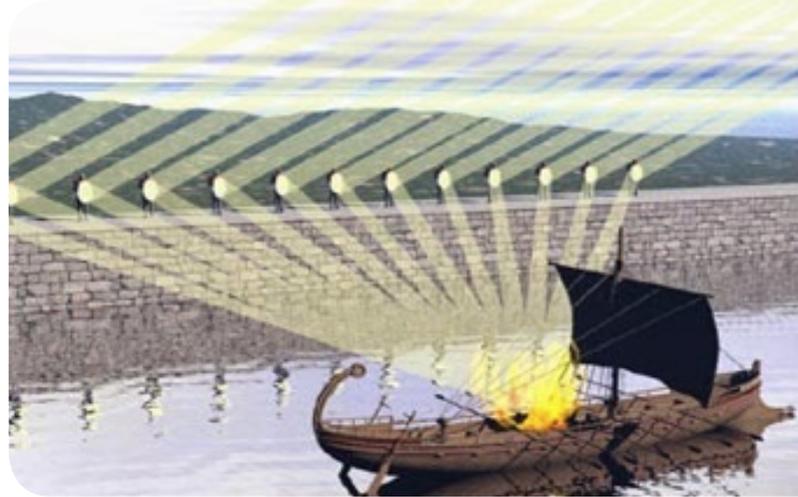
Isaac Asimov

Se podría decir que hubo una vez un hombre que luchó contra todo un ejército. Los historiadores antiguos nos dicen que el hombre era un anciano, pues pasaba ya de los setenta. El ejército era el de la potencia más fuerte del mundo: la mismísima Roma.

Lo cierto es que el anciano, griego por más señas, combatió durante casi tres años contra el ejército romano... y a punto estuvo de vencer: era **Arquímedes de Siracusa, el científico más grande del mundo antiguo**.

El ejército romano conocía de sobra la reputación de Arquímedes, y este no defraudó las previsiones. Cuenta la leyenda que, habiendo montado espejos curvos en las murallas de Siracusa (una ciudad griega en Sicilia), hizo presa el fuego en las naves romanas que la asediaban. No era brujería: era Arquímedes. Y cuentan también que en un momento dado se proyectaron hacia adelante gigantescas garras suspendidas de una viga, tomando las naves, levantándolas en vilo y volcándolas. No era magia, sino Arquímedes.

Se dice que cuando los romanos -que, como decimos, asediaban la ciudad- vieron izar sogas y maderos por encima de las murallas de Siracusa, levaron anclas y salieron de allí a toda vela.



Y es que Arquímedes era diferente de los científicos y matemáticos griegos que le habían precedido, sin que por eso les neguemos a estos un ápice de su grandeza. Arquímedes les ganaba a todos ellos en imaginación.

Por poner un ejemplo: para calcular el área encerrada por ciertas curvas modificó los métodos de cómputo al uso y obtuvo un sistema parecido al cálculo integral. Y eso casi dos mil años antes de que Isaac Newton inventara el moderno cálculo diferencial. Si Arquímedes hubiese conocido los números arábigos, en lugar que tener que trabajar con los griegos, que eran mucho más incómodos, quizá habría ganado a Newton por dos mil años.

Arquímedes aventajó también a sus precursores en audacia. Negó que las arenas del mar fuesen demasiado numerosas para contarlas e inventó un método para hacerlo: y no solo las arenas, sino también los granos que harían falta para cubrir la tierra y para llenar el universo. Con ese fin inventó un nuevo modo de expresar cifras grandes; el método se parece en algunos aspectos al actual. Lo más importante es que Arquímedes hizo algo que nadie hasta entonces había hecho; aplicar la ciencia a los problemas de la vida práctica, de la vida cotidiana. Todos los matemáticos griegos anteriores a Arquímedes -Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides- concibieron las matemáticas como una entidad abstracta, una manera de estudiar el orden majestuoso del universo, pero nada más; carecía de aplicaciones prácticas. Eran intelectuales exquisitos que despreciaban las aplicaciones prácticas y pensaban que esas cosas eran propias de mercaderes y esclavos. Arquímedes compartía en no pequeña medida esta actitud, pero no rehusó aplicar sus conocimientos matemáticos a problemas prácticos.

Nació Arquímedes en Siracusa, Sicilia. La fecha exacta de su nacimiento es dudosa, aunque se cree que fue en el año 287 a.C. Sicilia era a la sazón territorio griego. Su padre era astrónomo y pariente de Hierón II, rey de Siracusa desde el año 270 al 216 a.C. Arquímedes estudió en

Alejandro, Egipto, centro intelectual del mundo mediterráneo, y regresó a Siracusa, donde se hizo inmortal.



En Alejandría le habían enseñado que el científico está por encima de los asuntos prácticos y de los problemas cotidianos.; pero eran precisamente esos problemas los que fascinaban a Arquímedes, los que no podía apartar de su mente. Avergonzado de esta afición, se negó a llevar un registro de sus artilugios mecánicos; pero siguió construyéndolos y a ellos se debe hoy día su fama.

Arquímedes había adquirido renombre mucho antes de que las naves romanas entraran en el puerto de Siracusa y el ejército romano pusiera sitio

a la ciudad. Uno de sus primeros hallazgos fue el de la teoría abstracta que explica la mecánica básica de la palanca. Imaginemos una viga apoyada sobre un pivote, de manera que la longitud de la viga a un lado del fulcro sea diez veces mayor que el otro lado. Al empujar hacia abajo la viga por el brazo más largo, el extremo corto se desplaza una distancia diez veces inferior; pero, a cambio, la fuerza que empuja hacia abajo el lado largo se multiplica por diez en el extremo del brazo corto. Podría decirse que, en cierto sentido, la distancia se convierte en fuerza y viceversa.

Arquímedes no veía el límite a este intercambio que aparecía en su teoría, porque si bien era cierto que un individuo disponía sólo de un acopio restringido de fuerza, la distancia carecía de fronteras. Bastaba con fabricar una palanca suficientemente larga y tirar hacia abajo del brazo mayor a lo largo de un trecho suficiente: en el otro brazo, el más corto, podría levantarse cualquier peso.

-Dadme un punto de apoyo -dijo Arquímedes- y moveré el mundo.

El rey Hierón, creyendo que aquello era un farol, le pidió que moviera algún objeto pesado: quizá no el mundo, pero algo de bastante volumen. Arquímedes eligió una nave que había en el dique y pidió que le cargaran de pasajeros y mercancías; ni siquiera vacía podrían haberla botado gran número de hombres tirando de un sinfín de sogas.

Arquímedes anudó los cabos y dispuso un sistema de poleas (una especie de palanca, pero utilizando sogas en lugar de vigas). Tiró de la soga y con una sola mano botó lentamente la nave. Hierón estaba ahora más que dispuesto a creer que su gran pariente podía mover la tierra si quería, y tenía suficiente confianza en él para plantearle problemas aparentemente imposibles.

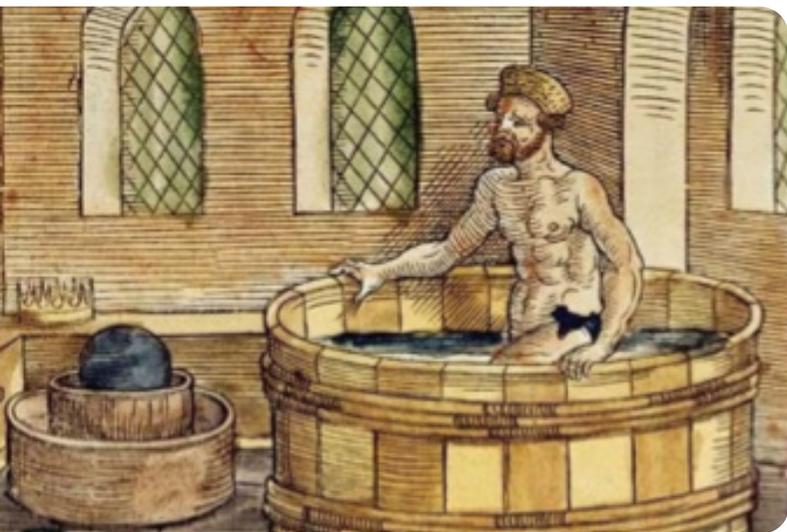


Cierto orfebre le había fabricado una corona de oro. El rey no estaba muy seguro de que el artesano hubiese obrado rectamente; podría haberse guardado parte del oro que le habían entregado y haberlo sustituido por plata o cobre. Así que Hierón encargó a Arquímedes averiguar si la corona era de oro puro, sin estropearla, se entiende.

Arquímedes no sabía qué hacer. El cobre y la plata eran más ligeros que el oro. Si el orfebre hubiese añadido cualquiera de estos metales a la corona, ocuparían un espacio mayor que el de un peso equivalente de oro. Conociendo el espacio ocupado por la corona (es decir, su volumen) podría contestar a Hierón. Lo que no sabía era cómo averiguar el volumen de la corona sin transformarla en una masa compacta.

Arquímedes siguió dando vueltas al problema en los baños públicos, suspirando probablemente con resignación mientras se sumergía en una tinaja llena y observaba cómo rebosaba el agua. De pronto se puso en pie como impulsado por un resorte: se había dado cuenta de que su cuerpo desplazaba agua fuera de la bañera. El volumen de su cuerpo. **Para averiguar el volumen de cualquier cosa bastaba con medir el volumen de agua que desplazaba.** ¡En un golpe de intuición había descubierto el principio del desplazamiento! A partir de él dedujo las leyes de la flotación y de la gravedad específica.

Arquímedes no pudo esperar: saltó de la bañera y, desnudo y empapado, salió a la calle y corrió a casa, gritando una y otra vez: "¡Lo encontré, lo encontré!". Solo que, en griego, claro está: "¡Eureka! ¡Eureka!". Y esta palabra se utiliza todavía hoy para anunciar un descubrimiento feliz.



Llenó de agua un recipiente, metió la corona y midió el volumen de agua desplazada. Luego hizo lo propio con un peso igual de oro puro; el volumen desplazado era menor. El oro de la corona había sido mezclado con un metal más ligero, lo cual le daba un volumen mayor y hacía que la cantidad de agua que rebosaba fuese más grande. El rey ordenó ejecutar al orfebre.

Arquímedes jamás pudo ignorar el desafío de un problema, ni siquiera a edad ya avanzada. En el año 218 a.C. Cartago (en el norte de África) y Roma se declararon la guerra; Aníbal, general cartaginés, invadió Italia y parecía estar a punto de destruir Roma. Mientras vivió el rey Hierón, Siracusa se mantuvo neutral, pese a ocupar una posición peligrosa entre dos gigantes en combate.

Tras la muerte de Hierón ascendió al poder un grupo que se inclinó por Cartago. En el año 213 a.C. Roma puso sitio a la ciudad.

El anciano Arquímedes mantuvo a raya al ejército romano durante tres años. Pero un solo hombre no podía hacer más y la ciudad cayó al fin en el año 211 a.C. Ni siquiera

la derrota fue capaz de detener el cerebro incansable de Arquímedes.

Cuando los soldados entraron en la ciudad estaba resolviendo un problema con ayuda de un diagrama. Uno de aquéllos le ordenó que se rindiera, a lo cual Arquímedes no prestó atención:



el problema era para él más importante que una minucia como el saqueo de una ciudad. "No me estropeéis mis círculos", se limitó a decir. El soldado le mató.

Los descubrimientos de Arquímedes han pasado a formar parte de la herencia de la humanidad. Demostró que era posible aplicar una mente científica a los problemas de la vida cotidiana y que una teoría abstracta de la ciencia pura -el principio que explica la palanca- puede ahorrar esfuerzo a los músculos del hombre.

Y también demostró lo contrario: porque arrancando de un problema práctico -el de la posible adulteración del oro- descubrió un principio científico.

Cicerón describe la tumba de Arquímedes, que habría visitado, e indica que sobre ella se había colocado una esfera inscrita dentro de un cilindro. Arquímedes había probado que el volumen y el área de la esfera son dos tercios de los del cilindro que la inscribe, incluyendo sus bases, lo cual se consideró el más grande de sus descubrimientos matemáticos.

Hoy día creemos que gran deber de la ciencia es comprender el universo, pero también mejorar las condiciones de vida de la humanidad en cualquier rincón de la tierra.

- Arquímedes: *"Aquel que lo intentó y no lo consiguió es superior al que ni lo intentó"* / *"La distancia más corta entre dos puntos es una línea recta"* / *"El que sabe hablar sabe también cuándo callar"* / *"Una mirada hacia atrás vale más que una mirada hacia adelante"* / *"Quien sabe qué hacer, sabe también cuándo"*

Bibliografía.

- Asimov Isaac. *Momentos estelares de la ciencia*. Alianza editorial. El libro de bolsillo. Madrid, España. Décima reimpresión. 2023