CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas

Año 2025 Número 18 30 de marzo

Producto punto o escalar

Juan Velázquez Torres
Departamento de Matemáticas de la DCB
Revisor: Yahvé Abdul Ledezma Rubio, departamento de Mecánica y Dibujo de la DCB

Es común que, en las clases de Geometría Analítica, cuando se aborda el tema de "producto punto" o, lo que es lo mismo, "producto escalar", sólo se dé la definición y sus propiedades, tal vez con la demostración de alguna de ellas. Sin embargo, no es común que se presenten al estudiante de ingeniería algunas aplicaciones del tema. Una forma de definir este producto entre vectores, en términos de sus componentes, es la siguiente:

Definición: Sean los vectores:

$\bar{x} = (a, b, c) \in R^3$ y $\bar{y} = (d, e, f) \in R^3$

Se llama producto punto o escalar de $\bar{x}$ y $\bar{y}$ a:

$$\mathbf{\bar{x} \times \bar{y} = ad + be + cf}$$

Es claro que la operación producto punto actúa sobre dos vectores, pero el resultado, como se observa en la definición, es un escalar.

Teorema (propiedades): Sean los vectores: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R^3$ y el escalar $\lambda \in R$. Entonces:

1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$
2) $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z}$
3) $\lambda \bar{x} \cdot \bar{y} = \lambda (\bar{x} \cdot \bar{y})$
4) $\bar{x} \cdot \bar{x} > 0$ si $\bar{x} \neq \bar{0}$

Ejemplo 1: Obtener el producto punto de los vectores:

a) $\bar{x} = (2, 3, 5)$ y $\bar{y} = (-3, 6, 4)$;

b) $\bar{x} = (1, -2, -4)$ y $\bar{y} = (4, 3, 5)$;

c) $\bar{x} = (8, -1, -2)$ y $\bar{y} = (1, 8, 0)$

Solución:

a) $\bar{x} \cdot \bar{y} = (2)(-3) + (3)(6) + (5)(4) = 32$;

b) $\bar{x} \cdot \bar{y} = (1)(4) + (-2)(3) + (-4)(5) = -22$;

c) $\bar{x} \cdot \bar{y} = (8)(1) + (-1)(8) + (-2)(0) = 0$

Puede observarse, como sucede en el ejemplo anterior, que el producto punto de dos vectores puede ser positivo, negativo o nulo, lo que no tiene significado alguno a partir de la definición vista.

Otra forma de ver el producto punto

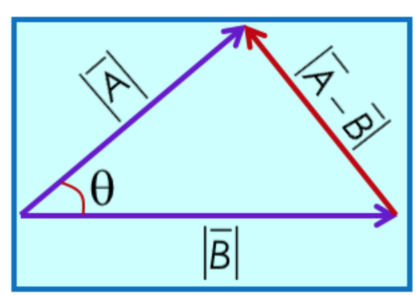
El producto escalar se comprende más fácilmente cuando se estudian sus propiedades geométricas, a partir de las definiciones de suma y diferencia de vectores. Por ejemplo, al calcular la magnitud del vector $\bar{A} - \bar{B}$ en función de las componentes de los vectores que se asume sean:

$$\bar{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad y \quad \bar{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

se obtiene entonces la siguiente relación:

$$d^2 = (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 \qquad (1)$$

La misma distancia se puede obtener geométricamente por el teorema del coseno (regla de los cosenos), aplicado en el triángulo siguiente y considerando los módulos de los vectores:



Dado que es la misma distancia obtenida por dos procedimientos diferentes, se hace evidente la igualdad de (1) y (2), de donde,

$$(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2 = |\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 - 2|\bar{A}||\bar{B}|\cos\theta$$

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) = |\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 - 2|\bar{A}||\bar{B}|\cos\theta$$

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

Como

$$\left|\bar{A}\right|^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad \text{y} \quad \left|\bar{B}\right|^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

entonces:

$$\left|\bar{A}\right|^2 + \left|\bar{B}\right|^2 - 2\left(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\right) = \left|\bar{A}\right|^2 + \left|\bar{B}\right|^2 - 2\left|\bar{A}\right|\left|\bar{B}\right|\cos\theta$$

luego:

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \left|\bar{A}\right|\left|\bar{B}\right|\cos\theta$$

Por lo tanto, el producto punto se puede obtener también a través de los módulos de los vectores, esto es

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = \left|\bar{A}\right|\left|\bar{B}\right|\cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre sus direcciones. Entonces, para los vectores

$$\bar{x} = (a,b,c) \in R^3 \quad \text{y} \quad \bar{y} = (d,e,f) \in R^3$$
$$\bar{x}\cdot\bar{y} = \left|\bar{x}\right|\left|\bar{y}\right|\cos\theta$$

Reflexión

Si la enseñanza del producto escalar se reduce a que el alumno solo calcule productos de diferentes vectores, entonces le queda la pregunta de siempre: y esto, ¿para qué sirve?

Por el contrario, si a la clase se le adiciona el ingrediente de la aplicación de los conceptos, además de las definiciones, las propiedades y la resolución de ejercicios de aplicación puramente matemática, se logrará que el aprendizaje sea significativo y que el gusto y el interés por el concepto y, en general por las matemáticas, sea cada vez más grande por parte del estudiante.

Se han preguntado cómo se calcula la **energía**, es decir, el **trabajo** que se requiere para desplazar un cuerpo desde una posición A hasta una posición B. Esto es así, únicamente se tiene que calcular el **trabajo mecánico** T que se define como:

$$T = \bar{F}\cdot\bar{d}$$

que es el requerido para desplazar un cuerpo desde una posición A hasta una posición B. En este producto punto, $\bar{F}$ es la **fuerza** aplicada y $\bar{d}$ el **desplazamiento** del cuerpo.

El concepto de energía se entiende como "capacidad que tiene un sistema para realizar un trabajo..." (RAE, s.f.), siendo esta asociándola con alguna medición que se realiza al sistema (velocidad, altura respecto a la referencia, temperatura, presión). Por su parte la palabra trabajo se entiende como "producto de la fuerza por la distancia que recorre su punto de acción" (RAE, s.f.), entre otros conceptos.

Dentro del cálculo del trabajo mecánico, el concepto de **fuerza** por desplazamiento es el que se considera más apropiado, ya que fuerza por distancia se asocia con el momento de una fuerza, visto desde un punto o eje, pues distancia es la mínima distancia entre el elemento geométrico y la fuerza.

De esta forma se puede hablar de un trabajo (diferencial) que sería la proyección de la fuerza en dirección del desplazamiento por el mismo desplazamiento. Al usar el concepto de proyección, surge el uso del producto punto.

$$dU = \bar{F} \bullet d\bar{r}$$

Con este ejemplo el estudiante conoce inmediatamente una aplicación del **producto escalar**, lo que hace más interesante y significativo su aprendizaje. Observa, escucha y aprende que dos cantidades vectoriales (en este caso **fuerza** y **desplazamiento**) con su **producto punto** dan por resultado un escalar que representa el **trabajo** realizado, que es la **energía**, medida en joules (J), proporcionada por la fuerza al cuerpo que tiene un determinado desplazamiento.

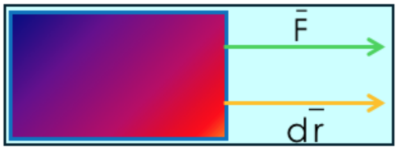
Por otro lado, en el primer ejemplo, el estudiante observó que el escalar obtenido puede ser positivo, negativo o nulo. Por tanto, también el trabajo mecánico, al obtenerse de un producto punto, puede ser positivo, negativo o nulo.

¿Qué situaciones corresponden a cada una de estas tres alternativas?

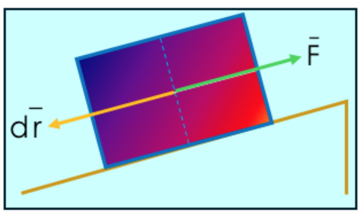
$$\begin{cases} T > 0 \\ T < 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

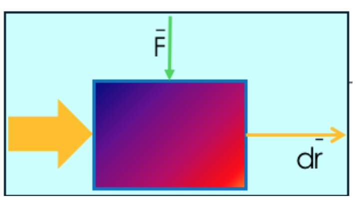
Si la proyección de la **fuerza** y el **desplazamiento** tienen igual dirección y mismo sentido, **el trabajo es positivo**. Se dice entonces que "la **fuerza** actúa en la misma dirección del movimiento".



Si la proyección de la **fuerza** y el **desplazamiento** tienen igual dirección, pero sentido opuesto, **el trabajo es negativo**. Se dice entonces que "la fuerza actúa en la dirección contraria a la del movimiento".



Cuando las direcciones de la fuerza y del desplazamiento son perpendiculares, **el trabajo es nulo**. Se dice entonces que "la **fuerza** ni se opone ni favorece el movimiento".



Resulta todavía más atractivo para el alumno, cuando se conecta el **trabajo** mecánico con la **potencia** mecánica, a través de la pregunta ¿cómo se calcula la **potencia** mecánica del motor del auto, del micro o del camión en el que viaja para llegar a la escuela?

Ejemplo. Mientras una persona sube por una escalera un bulto de cemento de $50\,\text{kg}$ a un departamento que se encuentra en reparación en el cuarto piso de un edificio; otra persona, utilizando una polea, sube otro bulto de $50\,\text{kg}$ hasta el mismo piso en un menor tiempo, ¿quién realiza mayor trabajo?

Puesto que cada uno elevó un bulto de $50\,\text{kg}$ a la misma altura, el **trabajo** realizado es el mismo, sólo que uno lo efectuó en menor tiempo. El ser humano siempre ha buscado realizar su **trabajo** en el menor **tiempo** posible, de ahí la necesidad de introducir un nuevo concepto que señale claramente con qué rapidez se hace un **trabajo**.

Este concepto recibe el nombre de **potencia** mecánica, habla de la razón de variación del trabajo mecánico con respecto al **tiempo** y mide entonces la celeridad con la que se efectúa una determinada actividad que involucra energía proporcionada por una **fuerza**.

La **potencia** mecánica se define entonces como la rapidez con que se realiza un **trabajo**. Se mide en watts (**W**) y se dice que existe una **potencia** mecánica de un watt cuando se realiza un **trabajo** de un joule en un tiempo de un segundo.

Todavía se emplean las siguientes unidades prácticas: el caballo de fuerza (HP) y el caballo de vapor (CV)

1 HP = 746 Watts **1 CV = 736 Watts**

James Watt
Inventor e ingeniero
(Construyó una máquina de vapor)

James Joule
Físico e investigador
Investigador en Termodinámica

Como el trabajo es igual a $T = \bar{F} \times \bar{d}$ entonces la potencia está dada por:

$$P = \frac{T}{t} = \frac{\bar{F} \cdot \bar{d}}{t}$$

Vale la pena mencionar otro concepto que se deriva del producto punto con el que se obtiene el trabajo y es la eficiencia (η) o rendimiento de una máquina que produce trabajo, que se calcula mediante la expresión:

$$\eta = \frac{\text{Trabajo producido por la máquina x100}}{\text{trabajo suministrado a la máquina}}$$

Se pueden presentar ejercicios para practicar esta nueva forma del **producto punto**, pero sería importante y trascendente introducir problemas de aplicación de este concepto en otras disciplinas, como la física, para alentar el interés y el aprendizaje significativo de este **producto escalar** entre vectores

Se presentará un problema de física donde se aplica el **producto punto** en un modelo matemático que tiene que ver con **potencia**, **trabajo (energía)**, **fuerza**, **masa**, **velocidad** y **aceleración**.

En Cálculo Diferencial se ve a la **potencia** como la razón de variación del **trabajo** con respecto al **tiempo** y a la **velocidad** como la razón de variación del **desplazamiento** con respecto al tiempo. Es por ello que se puede expresar a la **potencia** mecánica como el producto punto de la **fuerza** por la **velocidad**.

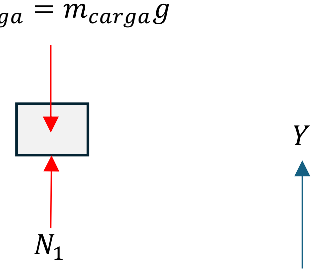
$$P = \frac{dT}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{s}}{dt} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

Problema de aplicación

Un elevador industrial con 950 kg de **masa**, transporta una masa máxima, según especificaciones, de 700 kg. La fuerza de fricción constante que retarda el movimiento del elevador tiene un valor de 1900 Newtons ¿Cuál es la potencia mínima que el motor del montacargas proporciona para elevarlo con una velocidad de 4 m/s ?

Solución. Para la situación descrita en el problema considere el siguiente diagrama de cuerpo libre, en el cual se muestran cuáles son las fuerzas involucradas.

$$W_{carga} = m_{carga} g$$



Se calcula el peso de la carga y queda como:

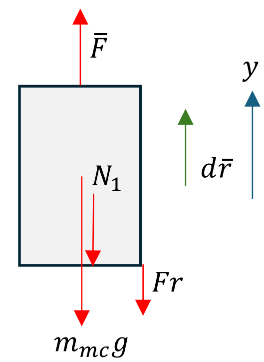
$$W_{carga} = m_{carga} g = 700(9.81) = 6867\ [N]$$

Si el sistema está avanzando a velocidad constante, se puede considerar al sistema en equilibrio, con lo que la normal que experimenta la carga será igual al peso de esta.

Para el elevador, con la normal de la carga, a partir del diagrama de cuerpo libre se obtiene:

$$\Sigma F_{y1} = -W_{carga} + N_1 = 0 \qquad N_1 = W_{carga} = 6867\ [N]$$

Las fuerzas actuando sobre el elevador, considerando la dirección vertical y el sentido hacia arriba, y que el sistema se encuentra a velocidad constante, es decir en equilibrio, la ecuación queda:



$$\Sigma F_{y2} = -N_1 - m_{mc} g - Fr + F = 0$$

$$F = N_1 + m_{mc} g + Fr$$

$$F = 6867 + (950)81 + 1900 = 18086.5\ [N]$$

Esta fuerza queda en el sentido de la velocidad y, para realizar el producto punto entre ellas, se tiene que:

$$\bar{F} = 18086.5\,\hat{\jmath}\ [N] \qquad \bar{v} = 4\,\hat{\jmath}\ \left[\frac{m}{s}\right]$$

Al realizar el producto punto entre los vectores, la potencia queda como:

$$P = \bar{F} \cdot \bar{v} = (18086.5)(4) = 72346\ [W]$$

OTRA APLICACIÓN DEL PRODUCTO PUNTO. El producto escalar es útil también para medir el ángulo formado por un par de vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ así como la posición de un vector respecto a los ejes coordenados. Los ángulos y los cosenos directores se calculan utilizando el producto escalar. Incluso proporciona una forma sencilla para determinar si dos vectores son perpendiculares, es decir, si el ángulo entre ellos es 90^{0}.

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} \quad ; \quad \bar{u}\cdot\bar{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90^{\circ}$$

El ángulo que forma un vector un con cada uno de los ejes coordenados, llamado ángulo director es muy importante en los cálculos prácticos. Los ángulos y los cosenos directores se calculan utilizando el producto escalar. Por ejemplo, en la ingeniería aeronáutica es de vital importancia determinar con mucha precisión el ángulo de lanzamiento de un cohete espacial, un error en el cálculo del ángulo, por muy pequeño que sea, puede hacer que el cohete se desvíe cientos de kilómetros.

Existen múltiples aplicaciones de este interesante concepto matemático y de ahí su importancia, trascendencia, comprensión y aprendizaje.

Referencias:

- Beer, F. P., Johnston, E. J., & Mazurek, D. F. (2016). *Mecánica vectorial para ingenieros, Dinámica* (11 ed.). México: Mc Graw Hill Education.
- Pytel, A., & Kuisalaas, J. (2022). *Introducción a la Dinámica*. México: Cengage.
- RAE. (s.f.). *Diccionario de la lengua española*. Obtenido de trabajo: https://dle.rae.es/trabajo
- RAE. (s.f.). *Diccionario de la lengua española*. Obtenido de Energía: https://dle.rae.es/energía

Referencias:

- Pala y tráiler (pexels-ywanphoto-18879.jpg)
- poleas (pexels-sylvain-lelong-289676095-14252230.jpg), motocicleta (pexels-pixabay-163210.jpg)
- montacargas (pexels-nc-farm-bureau-mark-27793715.jpg)
- taxi (pexels- foto de FranDany)
- automóvil (pexels-foto de Josué Misael)
- autobús público (pexels-foto de José Luis GonzArc)
- Microbús (pexels-foto de Sebastián Odriozola)
- cargador de bulto (pexels-manoz-gowda-13870874.jpg)
- poleas (pexels-juan-pablo-lancia-286674488-24601860.jpg)
- elevador montacargas (pexels-tiger-lily-4487448.jpg)
- James Watt (ThoughtCo-768x517jpeg)
- James Joule (John Collier-famous people-900x750 jpeg).

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel