CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas

Año 2025 Número 19 30 de abril

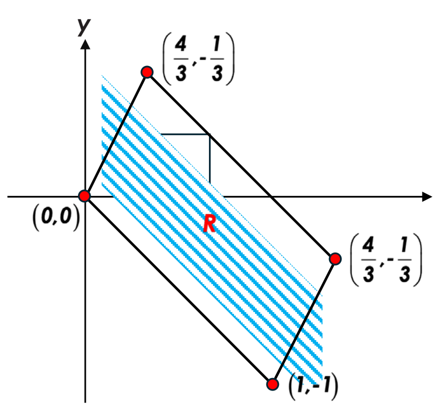
Cálculo vectorial. Problemas de integración múltiple

Pablo García y Colomé
Coordinación de Matemáticas de la DCB

1. Calcular la integral doble $\iint_R (x+y)^3\,dx\,dy$ donde R es la región del plano xy, limitada por las rectas:

$$x+y=0 \quad ; \quad x+y=1 \quad ; \quad 2x-y=0 \quad ; \quad 2x-y=3$$

Solución. Se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales, dos a dos, para obtener los puntos de intersección entre las rectas dadas. La región R se muestra en la siguiente gráfica:



Resolver la ecuación doble con la región dada resulta muy laborioso y complicado por lo que, al ver la forma de las ecuaciones, se sugiere solucionar el problema mediante el uso del sistema coordenado curvilíneo dado por las ecuaciones:

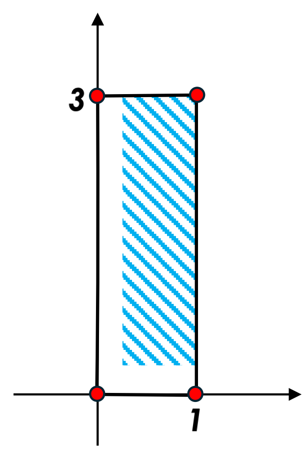
$$u=x+y \qquad y \qquad v=2x-y$$

Para obtener las expresiones de las variables *"x"* y *"y"* en términos de las nuevas variables *"u"* y *"v"*, se resuelve el sistema para *"x"* y *"y"* y se obtiene:

$$\begin{matrix} u=x+y \\ v=2x-y \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} y=u-x \\ y=2x-v \end{matrix} \;\Rightarrow\; u-x=2x-v \quad \therefore \quad \begin{matrix} x=\dfrac{u+v}{3} \\ y=\dfrac{2u-v}{3} \end{matrix}$$

Con los puntos del paralelogramo obtenido se calculan los puntos para el nuevo sistema uv que conforman la siguiente figura, con la cual es fácil resolver el problema.

Entonces, la región R en el nuevo sistema, se transforma en la región Q siguiente:



El jacobiano de la transformación, que es su factor de escala para obtener el valor de la integral doble en el nuevo sistema, está dado por:

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$$

Luego, la integral doble pedida equivale a:

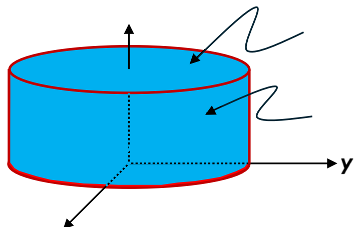
$$\iint_R (x+y)^3\,dx\,dy=\iint_Q u^3 J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)du\,dv=-\frac{1}{3}\int_0^3\int_0^1 u^3\,du\,dv=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^3\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 dv=-\frac{1}{12}\int_0^3 dv=-\frac{1}{12}\left[v\right]_0^3=-\frac{1}{4}$$

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

2. Un sólido tiene la forma de un cilindro circular recto cuyo radio es r y su altura a. Dar las coordenadas de su centro de masa si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia de P a la base del sólido. Resolver el problema con dos sistemas coordenados.

Solución. Es importante ubicar el sólido en un sistema coordenado como sigue:



Como se observa en la figura, el sólido está limitado por las superficies cuyas ecuaciones son:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad ; \quad z = 0 \quad ; \quad z = a$$

Coordenadas cilíndricas. De acuerdo con los datos del enunciado, la densidad en un punto (x, y, z) del sólido es $\rho(x, y, z) = kz$ para algún determinado valor de k. Es evidente, por las condiciones geométricas del sólido, que el centro de masa está en el eje *"z"*, por lo que es suficiente calcular su cota, esto es, su coordenada z, que equivale a $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$. Además, por las simetrías de la distribución de densidad *"ρ"*, así como la del sólido, se pueden calcular M y M_{xy} en el primer octante y los resultados multiplicarlos por 4. Y, como el sólido tiene la forma de un cilindro circular recto, es viable utilizar Coordenadas Cilíndricas. Luego, para la masa, se tiene que:

$$M = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r\int_0^a kz\rho \, dz d\rho \, d\theta = 4k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \left[\frac{\rho z^2}{2}\right]_0^a d\rho \, d\theta =$$

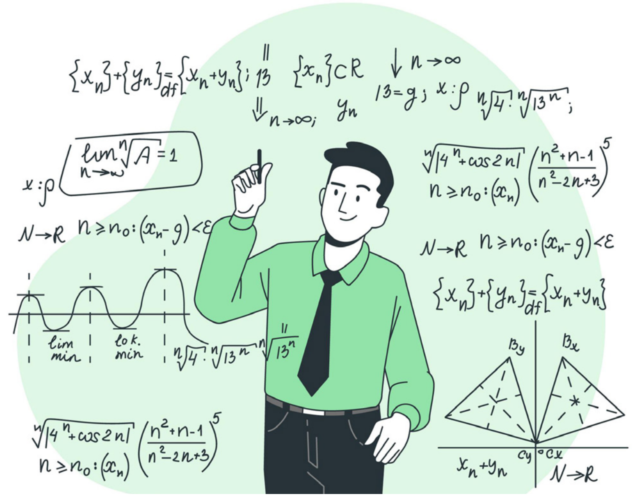
$$= 2ka^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r d\theta = ka^2r^2\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M = \frac{ka^2r^2\pi}{2}$$

$$M_{xy} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r\int_0^a kz^2\rho \, dz d\rho \, d\theta = 4k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \left[\frac{\rho z^3}{3}\right]_0^a d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{4ka^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r d\theta = \frac{2ka^3r^2}{3}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M_{xy} = \frac{ka^3r^2\pi}{3}$$



Finalmente, $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{ka^3r^2\pi}{3}}{ka^2r^2\pi} = \frac{2a}{3}$. *Luego, el Centro de Masa del sólido es el punto:*

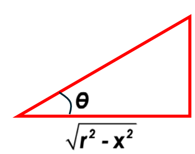
$$CM\left(0, 0, \frac{2a}{3}\right)$$

Coordenadas cartesianas. Ahora se resolverá este problema mediante coordenadas cartesianas, sin aprovechar las ventajas del sistema coordenado cilíndrico ortogonal. Luego, se llegaría a la siguiente integral triple para la masa del sólido que, como se observa, es más difícil que con las coordenadas cilíndricas:

$$M = 4\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_0^a kz \, dz \, dy \, dx = 4k\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{a^2}{2} dy \, dx = 2ka^2\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \, dx$$

Se resuelve la integral por sustitución trigonométrica y se obtiene:

$$\int \sqrt{r^2-x^2} \, dx$$



$$x = r\,\text{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad dx = r\cos\theta \, d\theta$$

$$\sqrt{r^2-x^2} = r\cos\theta$$

$$\int \sqrt{r^2-x^2} \, dx = \int r\cos\theta \cdot r\cos\theta \, d\theta = r^2\int \cos^2\theta \, d\theta = r^2\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{r^2}{2}\theta + \frac{r^2}{4}\text{sen}2\theta + C = \frac{r^2}{2}\theta + \frac{r^2}{2}\text{sen}\theta\cos\theta = \frac{r^2}{2}\text{angsen}\frac{x}{r} + \frac{r^2}{2}\left(\frac{x}{r}\right)\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r} + C$$

Luego,

$$M = 2ka^2\left[\frac{r^2}{2}\text{angsen}\frac{x}{r} + \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}\right]_0^r = 2ka^2\left[\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \frac{2ka^2r^2\pi}{4} = \frac{ka^2r^2\pi}{2}$$

$$M = \frac{ka^2r^2\pi}{2}$$

$$M_{xy} = 4\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_0^a z(kz) \, dz \, dy \, dx = 4k\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{a^3}{3} dy \, dx = \frac{4ka^3}{3}\int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \, dx = \frac{4ka^3}{3}\left(\frac{\pi r^2}{4}\right)$$

$$M_{xy} = \frac{ka^3r^2\pi}{3}$$

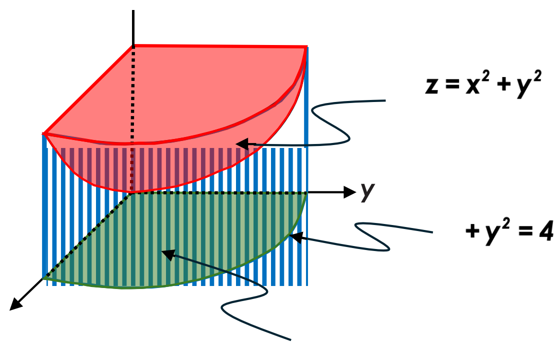
Por lo tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\frac{ka^3r^2\pi}{3}}{ka^2r^2\pi} = \frac{2a}{3}$$

Y, el Centro de Masa, como en el caso de coordenadas cilíndricas, es igual a:

$$CM\left(0,0,\frac{2a}{3}\right)$$

3. Obtener, mediante integración triple, el volumen de un sólido que está limitado, en el espacio cartesiano R^3, por las gráficas del paraboloide $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$, el cilindro $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4}$ y el plano $\boldsymbol{z = 0}$.



$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2}\left[rz\right]_0^{r^2} dr\,d\theta$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2} d\theta$$

$$V = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \qquad \therefore \quad V = 8\pi\ u^3$$

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel